Universidad de la República
Facultad de Ciencias Sociales
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

Documentos de trabajo

Una propuesta metodológica para la especificación de modelos econométricos

Adriana Cassoni

Documento No. 07/92
Diciembre, 1992

Una Propuesta Metodológica para la Especificación de Modelos Econométricos

Adriana Cassoni

Documento No. 7/92 Octubre,1992

Resumen

Se pretende formalizar algunos de los elementos esenciales de la modelización econométrica en el marco de la interpretación desarrollada a partir de principios de los ochentas, cuya inspiración fundamental podría ser atribuída al trabajo de Sargan, su difusión más generalizada a los investigadores de la London School of Economics y su formalización a A. Spanos.

Se plantea una diferencia fundamental con el enfoque tradicional de los libros de texto: mientras en estos se considera que el modelo econométrico es una formalización de la teoría económica que permite cuantificar las relaciones de interés, la nueva propuesta se funda sobre la concepción que la econometría es una forma más de análisis económico, en la que los datos y la teoría aportan elementos complementarios.

Se presentan los modelos econométricos de uso más generalizado, explicitando el conjunto de supuestos subyacentes a los mismos.

Introducción

En la década de los setentas, y después de un período de importante auge, el grado de credibilidad en los modelos econométricos disminuye considerablemente. El fenómeno puede explicarse, en gran parte, por dos factores: por un lado, existía la pretensión de que los modelos contestaran a un número de cuestiones superior al posible, exigiéndoles, por lo tanto, una capacidad predictiva y explicativa superior a aquella en función de la cual eran diseñados. Por otra parte, el uso que se les daba era inadecuado, en el sentido que cualquier hipótesis mantenida, sólida en cuanto a su sustento económico, siempre podía ser validada con una transformación conveniente - "depuración" - de los datos utilizados. De esta manera, aún cuando se lograse una estimación acorde a la teoría, a la hora de realizar pronósticos éstos resultaban demasiado erráticos.

El refinamiento constante de la Teoría Estadística empleada en la estimación y diagnóstico de los modelos econométricos no fue de mucha ayuda para mejorar este desempeño, ya que en las aplicaciones a la economía existe una dificultad insalvable para validar a aquella: la imposibilidad de obtener distintos conjuntos de datos a partir de una situación experimental, elemento básico en los fundamentos de la inferencia estadística.

En parte como consecuencia de lo anterior, retoman nueva fuerza enfoques metodológicos alternativos dentro de la Teoría Econométrica, que proponen modelos sustentados exclusivamente en la estructura temporal de los datos observados y en los que la Teoría Económica no juega ningún papel. Estos probaban ser, en general, más "eficaces" en la realización de pronósticos que los grandes modelos macroeconométricos de ecuaciones simultáneas.

En torno a estos dos enfoques, opuestos en cuanto al papel que cada uno le asigna a la Teoría Económica y a los datos, se da un extenso debate a partir del cual, al tiempo que se reformulan y extienden varias líneas de investigación ya existentes, se desarrolla un tercer enfoque en el que tanto teoría como datos tienen un rol que desempeñar, y en el que se busca redefinir algunos aspectos de la metodología econométrica. Básicamente, el planteo se centra en que la estructura de los datos brinda información sobre el mecanismo a través del cual éstos se generaron, permitiendo, junto con el marco teórico propuesto, una mejor comprensión de la realidad.

La *Econometría* deja de ser considerada solamente como una disciplina que permite la cuantificación de relaciones económicas, para constituirse en una manera más de análisis de las mismas, como se deriva de la definición propuesta: "*es el estudio sistemático* - (en cuanto a que éste se encuentra enmarcado por la Teoría Económica y la Estadística) - *de los fenómenos económicos mediante el uso de datos observables*", (Aris Spanos, 1986).

Así, la Teoría Económica brinda el marco de interpretación, la Estadística un conjunto coherente de técnicas para el análisis de datos numéricos, mientras que la estructura de las observaciones disponibles proporciona información sobre el proceso real que las originó, y que *no necesariamente* coincide con aquel supuesto por la Teoría Económica. Los tres elementos anteriores se "funden" en la especificación de un modelo cuya forma depende entonces de una cierta interpretación teórica del fenómeno económico, de un conjunto de supuestos estadísticos que se cree son pertinentes para esa realidad y, críticamente, del conjunto de datos efectivamente utilizado.

Lo anterior determina que sea necesario distinguir entre el modelo propuesto por la Teoría Económica, el modelo estadístico que resulta de incorporar la estructura de los datos utilizados y el modelo econométrico propiamente dicho que resultará de la imposición de restricciones y/o reparametrización del anterior[1/].

1/Una discusión sobre esta evolución y el planteamiento del marco metodológico propuesto para la correcta modelización econométrica, se encuentra en Aris Spanos: "Towards a unifying methodological framework for econometric modelling".

El tipo de modelo que se plantee determinará, por su parte, cuál es el método de estimación adecuado, en cuanto a que asegure propiedades "deseables" de los estimadores de los parámetros involucrados.

Una vez realizada la estimación del modelo, se considera de primordial importancia llevar a cabo la evaluación exhaustiva de los supuestos estadísticos que lo sustentan, es decir, verificar que el conjunto de información disponible no brinda suficiente evidencia para rechazar la validez de los mismos. Este paso, previo a cualquier "uso" del modelo, resulta fundamental: no tiene sentido someter a prueba hipótesis teóricas, simular políticas o realizar proyecciones, a partir de estimadores de los parámetros de interés que provienen de un modelo estadístico cuyo fundamento no es sustentado por la evidencia empírica (cuyos supuestos subyacentes no se cumplen). La extensa evaluación del modelo cobra una muy especial relevancia en este nuevo enfoque de la econometría, ya que se considera que su ausencia, junto a la depuración de las series de datos utilizadas, estarían en la base del "fracaso" de los modelos macroeconométricos para lograr buenos pronósticos.

A partir de esta premisa, se desarrolla un número importante de pruebas de incorrecta especificación a las que será necesario someter al modelo en cuestión, sabiendo que al aumentar el número de pruebas se vuelve más probable descubrir problemas en la especificación del mismo. El hecho que el resultado de dichas pruebas sea una incorrecta especificación del modelo, se interpreta como el reflejo de que el proceso real por el que se generaron los datos observados no está siendo adecuadamente representado, a diferencia de la metodología tradicional en la que se consideraba que esto era consecuencia de que el término aleatorio no se comportaba "adecuadamente".

Lo anterior implica que será necesario re-especificar el modelo, estimarlo de acuerdo al método que corresponda y, nuevamente, llevar a cabo las pruebas mencionadas. Si bien el proceso propuesto no resulta sencillo, asegura que, finalmente, se obtenga un modelo estadísticamente correcto, con el que se podrán analizar adecuadamente los fenómenos económicos de interés. Además, se vuelven irrelevantes los procesos de manipulación de la información, ya que será muy difícil y costoso obtener series que se "adecúen" a todas las pruebas.

Por último, conviene destacar una diferencia conceptual que resulta fundamental entre el planteo que se realiza en los libros de texto tradicionales y la óptica que aquí se desarrolla. En el primero se propone que la relación determinística planteada por la Teoría Económica no se observa como tal en la realidad como consecuencia de los problemas de medición, el azar, etc.. De esta forma, es necesario incorporar a ella una perturbación que se supone es una variable aleatoria que le "transfiere" dicho carácter a la variable dependiente, y sobre cuya distribución habrá que realizar ciertos supuestos. En el segundo, por el contrario, es la variable cuyo comportamiento interesa modelar la que es aleatoria, de manera que si se propone un modelo que aproxime su media condicional, resultará que la perturbación es un ruido blanco.

Esta última estrategia propicia la re-especificación adecuada del modelo teniendo en cuenta las características del fenómeno bajo análisis y la forma de recolección de los datos, mientras que en el primer caso, al no hacerse explícitas estas consideraciones, la tendencia más generalizada resulta ser la transformación de los datos que lleve a "un comportamiento adecuado del término de error". Como se señaló más arriba, al plantear supuestos sobre las variables en el modelo, el término de error es, por construcción un ruido blanco, condicionado a cierto conjunto de información. Por ello, detectar que no se comporta como tal implica que el conjunto de información no es adecuado y conduce, entonces, a una estrategia de re-especificación del modelo estadístico en direcciones que, en general, son claras a partir del análisis del tipo de distribución que presenta la perturbación.

A continuación se plantean explícitamente los diversos componentes de un modelo econométrico y su interpretación en el marco del enfoque antes presentado. Además, se formalizan los modelos estadísticos de mayor difusión, discutiendo los supuestos subyacentes a cada uno de ellos.

1.- Especificación del Modelo Econométrico

En la especificación de un modelo econométrico se siguen, implícitamente, varias etapas. Cada una de ellas define los diversos componentes del modelo, de manera que el hacerlas explícitas en el curso del trabajo econométrico permitirá orientar la correcta interpretación de los resultados que se obtienen.

En una primera etapa se selecciona un enfoque dentro de la *Teoría Económica*, que brinda una interpretación lógica del fenómeno de interés, bajo ciertos supuestos. Dichos supuestos no se refieren únicamente a elementos teóricos, sino también al hecho de que, al aislar un cierto fenómeno para su estudio, es necesario generalmente hacer abstracción de una extensa serie de interrelaciones. El planteamiento teórico que se proponga, pretenderá ser una "idealización" que permita la mejor comprensión de la realidad, y no una "copia" exacta de la misma. De esta forma, no es posible tener seguridad a priori que este planteamiento se adecuará perfectamente a la realidad bajo estudio.

En segundo término, es necesario realizar una formalización matemática de la anterior, es decir, convertir la proposición teórica en una formulación matemática determinada. Esto dará lugar a un *Modelo Teórico* que, obviamente, no será único, ya que pueden derivarse distintas formas matemáticas para la adecuada descripción de un mismo fenómeno. Por otra parte, el conjunto de información disponible es, generalmente, limitado: las series de datos que lo componen no necesariamente coinciden con las variables teóricas incluídas en el modelo, ya que éstas no siempre son observables. Esto podría, a su vez, obligar a redefinir el modelo teórico.

En Teoría Económica se supone, implícitamente, que existe algún mecanismo real a través del cual se generaron los datos observados. Sin embargo, para el econometrista éste será desconocido y entonces, la tercera etapa en la especificación del modelo consiste en postular, teniendo en cuenta la estructura de los datos utilizados, la forma de dicho mecanismo, al que se denomina *Proceso Generador de Información (PGI)*. Así, al incorporar al enfoque económico relevante, el tipo de información disponible y aquellos factores (institucionales, de dinámica, etcétera) que influyen sobre el PGI, se obtiene el *Modelo Estimable*. Obsérvese que si se pudiese diseñar una situación en la que los datos fueran obtenidos a partir de un proceso acorde a las condiciones que estipula o supone la Teoría Económica, Modelo Teórico y Estimable podrían ser idénticos.

La introducción del PGI como el mecanismo subyacente a la generación de información sugiere, inmediatamente, la idea de una situación experimental en la que los datos observados son uno de los posibles eventos. De esta forma, es necesario postular una estructura probabilística que describa al PGI real. Esto conduce a la especificación de un *Modelo de Probabilidad*, es decir, de una familia paramétrica de funciones de densidad que transformen la incertidumbre relativa a la ocurrencia del evento, en incertidumbre relativa a cuál es el conjunto de parámetros que define a la función de densidad. El planteamiento de un determinado modelo de probabilidad implica realizar supuestos no sólo sobre cuál es la familia de funciones de densidad de probabilidad apropiada, sino también sobre los parámetros que la definen y sobre las variables aleatorias involucradas.

Al mismo tiempo, hay que establecer la forma en que es posible obtener una muestra cualquiera a partir del modelo de probabilidad, o sea, proponer un *Modelo Muestral* que será el vínculo entre la estructura probabilística subyacente al PGI y el conjunto de datos con que se cuenta y que postulará si la muestra es aleatoria (independiente e idénticamente distribuída), o no aleatoria. El contar con información sobre la forma en que se obtienen los datos (el tipo de muestreo utilizado, por ejemplo) es de mucha utilidad en este punto.

Lo anterior conduce a la especificación del *Modelo Estadístico*, que estará constituído por los dos modelos descritos antes más lo que se define como *Mecanismo Generador Estadístico (MGE)*.

El MGE es la forma que toma el modelo estadístico una vez que se le incorpora la estructura probabilística que describe el PGI. De esta manera, resulta que el MGE sintetiza la información proveniente de la Teoría Económica, la disponibilidad de datos sobre las variables involucradas y el mecanismo probabilístico que los originó. La forma particular que tome dependerá de la distribución conjunta de las variables aleatorias involucradas. En principio, es posible diferenciar dos componentes en el MGE: uno sistemático, que queda definido a partir de la elección de las variables que explican el fenómeno de interés en el Modelo Estimable y uno no sistemático que representa la parte que queda sin modelar, dada la elección anterior.

Llegado este punto es posible estimar el modelo, escogiendo el método apropiado de acuerdo a los supuestos hechos en cada una de las etapas anteriores. Sin embargo, estos supuestos subyacentes al modelo no tienen por qué cumplirse necesariamente. Para verificar que son "correctos" para ese conjunto de información, hay que realizar el diagnóstico del modelo, de manera de garantizar que la estimación y la inferencia realizadas a partir de ésta son adecuadas, desde el punto de vista estadístico, para el análisis del fenómeno de interés. En caso contrario, lo que procede es re-especificar el modelo estadístico, es decir, replantear parte o todo el MGE, el modelo probabilístico y/o el modelo muestral, ya que no se ha obtenido una adecuada aproximación al verdadero PGI y, por lo tanto, cualquier inferencia realizada sobre la base de ese modelo no tendrá ningún sentido.

Obtenido lo anterior, es posible iniciar un proceso de búsqueda de evidencia que sustente o no diversas proposiciones de interés. Cuando corresponda, entonces, se podrán imponer restricciones que aporten nueva información al modelo o, en su caso, reparametrizarlo. Esta estrategia conducirá, finalmente, a la obtención de un modelo teóricamente coherente al que se denominará, el *Modelo Econométrico Empírico*, aquel que podrá ser considerado como la mejor aproximación a la descripción del proceso a través del cual se explica el fenómeno económico en cuestión. Sólo entonces resulta recomendable simular políticas, realizar proyecciones, etc. sobre la base del modelo propuesto.

Para ilustrar los conceptos desarrollados hasta aquí, conviene plantear un ejemplo teórico: la teoría de la demanda postula que, si hay competencia perfecta y el bien es normal, existe una relación inversa entre la cantidad demandada (Q^d) y el precio del bien (P^x) en cada momento del tiempo. Existen, además, otros determinantes de la demanda, como ser el ingreso de los consumidores (Y), el precio de bienes sustitutos (PS), el tamaño del mercado (M) o las preferencias de los consumidores (C). Para plantear lo anterior en un modelo teórico se propone una función multiplicativa del tipo:

$$Q_t^d = P_t^{a_1} \cdot Y_t^{a_2} \cdot PS_t^{a_3} \cdot M_t^{a_4} \cdot C_t^{a_5}$$

que puede expresarse en logaritmos como:

$$(1) \qquad q_t^d = a_1 p_t + a_2 y_t + a_3 ps_t + a_4 m_t + a_5 c_t$$

donde las minúsculas denotan el logaritmo natural de la variable.

Para plantear el modelo estimable es necesario analizar la información disponible. Existen variables en el modelo que son no observables, como la cantidad demandada y las preferencias del consumidor. En el primer caso se supondrá que la oferta del bien no está restringida, por lo cual cantidad demandada a ese precio y cantidad vendida coinciden. En el segundo caso se presume que las preferencias no han variado en el período bajo análisis y que, por lo tanto, se trata de una constante. Por último, la variable "tamaño del mercado" será aproximada por la población total. De este modo, el modelo estimable es:

$$(2) \qquad q_t^d = a_0 + a_1 p_t + a_2 y_t + a_3 ps_t + a_4 m_t$$

$$\text{con} \quad a_0 = a_5 c_t$$

El PGI real - desconocido - que se postula es el mecanismo de mercado y éste deberá ser aproximado por alguna función de densidad. Se piensa que una buena aproximación está dada por las funciones de densidad normales. Así, el modelo de probabilidad será:

$$\Phi = \{\ N(q_t/\mathbf{X}_t)\ ;\ \mathbf{X}_t = \{p_t, y_t, ps_t, m_t, c_t\}\ ;\ \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)\ ;$$
$$(\mathbf{a}, \sigma^2) \in \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^+;\ t \in \mathbb{T}\ \}$$

Además, las series de datos provienen de una encuesta cuya muestra fue seleccionada de acuerdo a un muestreo aleatorio simple, con lo cual se puede asegurar que el conjunto de datos es una muestra independiente.

Obsérvese que el plantear explícitamente cada una de estas etapas permite una especificación mucho más clara del modelo y, con ello, la re-especificación adecuada en caso de presentarse problemas al estimarlo. Si, por ejemplo, se supiese que en realidad las preferencias de los consumidores han evolucionado en el tiempo de manera tal que al transcurrir los años la variabilidad de la demanda del bien aumentó, habría que modificar el modelo estadístico, ya que la estructura probabilística que aproxima al mecanismo de mercado, si bien puede continuar siendo representada por la función de densidad de probabilidad normal, tendrá que incorporar la información de que la varianza de q_t es heteroscedástica.

2.- El Modelo Estadístico

En **esta sección** se formalizan los argumentos desarrollados más arriba, de manera de poder introducir varios de los modelos más utilizados, distinguiendo cada uno de sus componentes.

Tomando como punto de partida el Modelo Estimable, lo que se tiene definido es cuál es el conjunto de variables que intervienen en la explicación del fenómeno de interés. Cada una de ellas es una *variable aleatoria* y como tal, estará definida sobre un cierto *espacio de probabilidad*, el que será denotado por $(S,I,P(\cdot))$, donde:

S es el *espacio muestral*, o sea, el conjunto de todas las realizaciones posibles de la variable aleatoria,

I es el conjunto de eventos, es decir, de todos los subconjuntos de S,

$P(\cdot)$ es la *función de probabilidad*, cuyo dominio es I, de manera que a cada evento posible le asigna un número real en el intervalo $[0,1]$, que es la probabilidad de ocurrencia del evento.

A toda variable aleatoria, además, se le asocia una *función de densidad de probabilidad* (fdp), que transforma la incertidumbre sobre la ocurrencia de un evento, en incertidumbre sobre ciertos parámetros que la definen.

La familia paramétrica de fdp de una variable aleatoria, constituye su modelo de probabilidad $\Phi = \{f(X,\psi),\ \psi\in\Psi\}$, siendo X la variable aleatoria, ψ el conjunto de parámetros que intervienen en la fdp f y Ψ el espacio de parámetros. Cuando se elige un cierto modelo de probabilidad, se está asumiendo que el conjunto de datos fue generado por el mecanismo aleatorio descrito por las funciones en Φ. Determinar cuál de las funciones es la adecuada, implica conocer el vector ψ de parámetros que la identifica.

Por otro lado, si se define una *muestra* como un conjunto de variables aleatorias cuyas fdp coinciden con las postuladas por Φ, entonces el conjunto de datos es una de las posibles realizaciones de esa muestra. Además, como un conjunto de variables aleatorias, tendrá una cierta distribución conjunta, que se denomina *distribución muestral* y que será la que define el modelo muestral.

Con los elementos anteriores en mente, es posible formalizar el modelo estadístico:

Sea y una variable aleatoria cuyo comportamiento se desea explicar.

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_k$, k variables aleatorias que se supone intervienen en la determinación de la evolución de y.

Entonces, el vector de variables aleatorias que dio lugar a cierto conjunto de datos en el momento t, queda definido por: $\mathbf{Z}_t = (y_t, \mathbf{X}'_t)'$.

El conjunto de toda la información relevante al fenómeno de interés, determinada a partir de la especificación del modelo estimable, queda sintetizado en F_t, que será un subconjunto de I_t. De manera general F_t se puede expresar como:

$$F_t = \left\{ y_{t-1}, \ldots y_{t-n}, X_{1t}, \ldots X_{kt}, \ldots X_{kt-s} \right\} \quad , \quad F_t \subseteq I_t$$

es decir, los valores presentes y pasados de todas las variables involucradas en la descripción del mencionado fenómeno.

La secuencia ordenada de vectores de variables aleatorias $\mathbf{Z}_t$ define el proceso estocástico vectorial $\{\mathbf{Z}_t, t \in \mathbb{T}\}$ sobre el espacio probabilístico $(S, F_t, P(\cdot))$, donde $\mathbb{T}$ es un conjunto indexado de números reales.

Si se denomina por $D(\cdot,\cdot)$ la fdp asociada a $\mathbf{Z}_t$, entonces el Modelo Probabilístico de $\{\mathbf{Z}_t, t \in \mathbb{T}\}$ será: $\Phi = \{D(\mathbf{Z}, \psi), \psi \in \Psi\}$.

El Modelo Muestral definirá una muestra $\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \ldots, \mathbf{Z}_T\}'$ tomada de $D(\mathbf{Z}_t, \psi_0)$ para algún valor "verdadero" ψ_0 en Ψ.

Finalmente, el MGE, que resume la información muestral y las proposiciones económicas relativas al PGI, postulará una descomposición de la variable cuyo comportamiento se desea modelar, del tipo:

$$y_t = \mu_t(\beta) + u_t \qquad E(u_t^r/F_t) = h_t^{(r)}$$

donde: $\mu_t(\beta)$ es el componente sistemático y $u_t = \mu_t(\beta) - y_t$ es la parte de y_t que queda sin modelar.

Se supone que la forma propuesta es una buena aproximación del PGI real. Si bien éste es desconocido, es posible postular que se descompone en dos partes, una sistemática que da origen a los datos sobre la variable de interés y una no sistemática. Así, y de manera análoga a la descomposición del MGE, y_t puede expresarse en términos de los componentes del PGI como:

$$y_t = \bar{\mu}_t + \bar{u}_t$$

Se define: $\bar{\mu}_t = E(y_t/F_t)$, la esperanza de y_t condicional al conjunto de información, es decir, el primer momento del PGI. De esta forma:

$\bar{u}_t = y_t - \bar{\mu}_t = y_t - E(y_t/F_t)$ es un proceso innovación referido al PGI, ya que por construcción **posee** las siguientes propiedades:

1. $E(\bar{u}_t/F_t) = E\left[(y_t - \bar{\mu}_t)/F_t\right] = E(y_t/F_t) - E(\bar{\mu}_t/F_t) = \bar{\mu}_t - \bar{\mu}_t = 0$

2. $Cov(\bar{u}_t\bar{u}_s/F_t) = E\left[(y_t - \bar{\mu}_t)(y_s - \bar{\mu}_s)/F_t\right] = \begin{cases} V(y_t) = \sigma^2 & \text{si } t=s \\ 0 & \text{si } t \neq s \end{cases}$ 2/

2/Sea $t>s \Rightarrow y_s, \bar{\mu}_s \in F_t \Rightarrow Cov(\bar{u}_t\bar{u}_s/F_t) = (y_s - \bar{\mu}_s)E[(y_t - \bar{\mu}_t)/F_t] =$

$= (y_s - \bar{\mu}_s)[E(y_t/F_t) - \bar{\mu}_t] = (y_s - \bar{\mu}_s)(\bar{\mu}_t - \bar{\mu}_t) = 0$

Además,

3. $Cov(\bar{u}_t\bar{\mu}_t/F_t) = E\left[(y_t-\bar{\mu}_t)\bar{\mu}_t/F_t\right]$

Como $\bar{\mu}_t \in F_t$, entonces:

$$Cov(\bar{u}_t\bar{\mu}_t/F_t) = \left[E(y_t/F_t) - \bar{\mu}_t\right]\cdot\bar{\mu}_t = \bar{\mu}_t^2 - \bar{\mu}_t^2 = 0$$

De lo que se deriva que $\bar{\mu}_t + \bar{u}_t$ es una descomposición ortogonal de la variable de interés y_t.

Si se analizan los momentos condicionales de orden superior, se tiene que:

$$\bar{h}_t^{(r)}= E\left[(y_t- \bar{\mu}_t)^r/F_t\right] = E(\bar{u}_t^r/F_t)$$ es el momento de orden r

La innovación referida al momento r-ésimo para $r\geq 2$ es:

$$\bar{\epsilon}_t^{(r)} = (y_t- \bar{\mu}_t)^r- E\left[(y_t- \bar{\mu}_t)^r/F_t\right] = \bar{u}_t^r - E(\bar{u}_t^r/F_t) = \bar{u}_t^r- \bar{h}_t^{(r)}$$

de lo que se deduce:

$$E(\bar{\epsilon}_t^{(r)}/F_t) = E(\bar{u}_t^r/F_t) - E(\bar{h}_t^{(r)}/F_t) = 0$$

Visto de esta manera, la especificación de un modelo implica proponer una forma determinada para el componente sistemático y para los demás momentos de la distribución, es decir, postular que $\bar{\mu}_t$ y $\bar{h}_t^{(r)}$ toman la forma $\mu(\beta)$ y $h_t^{(r)}(\theta_r)$, siendo β y θ_r un conjunto de parámetros, para $r = 2,3,\ldots,p$, con p el número de momentos que definen la distribución de y_t/F_t.

Como se desarrolla extensamente en Sabau (1991), si la especificación es correcta, entonces existe un vector de parámetros $\theta^0= (\beta^0, \theta_2^0, \ldots, \theta_p^0)$, tal que se cumplen las igualdades:

$$\bar{\mu}_t= \mu(\beta^0) \quad \text{y} \quad \bar{h}_t^{(r)}= h_t^{(r)}(\theta_r^0) \quad \text{para } r=2,\ldots,p$$

¿Cómo se relacionan las innovaciones del modelo con las del PGI?

$$y_t = \bar{\mu}_t + \bar{u}_t \qquad \text{describe al PGI}$$

$$y_t = \mu_t(\beta) + u_t \qquad \text{es el modelo propuesto}$$

Entonces: $\bar{\mu}_t + \bar{u}_t = \mu_t(\beta) + u_t \Rightarrow$ **(1)** $u_t = \bar{u}_t + \left(\bar{\mu}_t - \mu_t(\beta)\right)$

Las innovaciones del modelo son iguales a las de PGI más la diferencia entre los componentes sistemáticos real y modelado.

Así, $u_t = \bar{u}_t$ sólo si $\bar{\mu}_t = \mu_t(\beta)$,

o sea, si el primer momento está modelado adecuadamente, en cuyo caso se tendrá que:

$$E(u_t/F_t) = E(\bar{u}_t/F_t) + E\left[(\bar{\mu}_t - \mu_t(\beta))/F_t\right] = 0$$

En caso contrario, esta esperanza no será nula, originándose errores de especificación que conducen a estimadores inadecuados de los parámetros de interés.

Lo mismo ocurre para los momentos de orden superior:

$$\epsilon_t^{(r)} = u_t^r - h_t^{(r)}(\theta_r) = \left[\bar{u}_t + (\bar{\mu}_t - \mu_t(\beta))\right]^r - h_t^{(r)}(\theta_r) =$$

$$= \bar{u}_t^{\,r} + \sum_{j=1}^{r} \binom{r}{j} \left(\bar{\mu}_t - \mu_t(\beta)\right)^j \cdot \bar{u}_t^{\,r-j} - h_t^{(r)}(\theta_r)$$

Como $\bar{\epsilon}_t^{(r)} = \bar{u}_t^r - \bar{h}_t^{(r)} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{u}_t^{\,r} = \bar{\epsilon}_t^{(r)} + \bar{h}_t^{(r)}$

Sustituyendo y reordenando:

$$\textbf{(2)} \qquad \epsilon_t^{(r)} = \bar{\epsilon}_t^{(r)} + \left[\bar{h}_t^{(r)} - h_t^{(r)}(\theta_r)\right] + \sum_{j=1}^{r} \binom{r}{j} \left(\bar{\mu}_t - \mu_t(\beta)\right)^j \cdot \bar{u}_t^{\,r-j}$$

De este modo, $\epsilon_t^{(r)} = \bar{\epsilon}_t^{(r)}$ sólo si el momento de orden r está bien especificado $\left(h_t^{(r)}(\theta_r) = \bar{h}_t^{(r)}\right)$ y, además, $\mu_t(\beta) = \bar{\mu}_t$, de manera que no haya errores inducidos por incorrecta especificación en la media.

De lo anterior se deduce que la existencia de errores de especificación en el modelo proviene, en definitiva, de la inadecuada especificación de los momentos de la distribución condicional de la variable dependiente al conjunto de información. Es decir, de que estos momentos modelados no son un reflejo fiel de los momentos reales (los del PGI). Así, el procedimiento para la detección de errores de especificación lo constituye la comparación de los mismos.

Por otra parte, las relaciones **(1)** y **(2)** sugieren que para evaluar la correcta especificación del modelo (qué tan buena aproximación es del PGI) habrá que analizar el comportamiento de las innovaciones.

La forma que tome $\mu_t(\beta)$, la familia de fdp $D(\cdot,\cdot)$ que constituyan el modelo probabilístico y la manera en que se estipule que fue generada la muestra, determinarán el tipo de modelo que se propone como "mejor" aproximación al PGI y, por lo tanto, el método de estimación que resulte óptimo.

3.- Los Modelos de Regresión Lineal

En lo que sigue se exponen los modelos estadísticos más utilizados en el trabajo econométrico, explicitando todos los supuestos que subyacen al MGE, el modelo probabilístico y el modelo muestral, en cada uno de los distintos casos.

3.1. El Modelo de Regresión Lineal Simple

Sea $\{\mathbf{Z}_t,\ t\in\mathbb{T}\}$ el vector de variables aleatorias a partir del cual se generaron los datos observados, con $\mathbf{Z}_t = (y_t,\ \mathbf{X}_t)'$ y y_t la variable cuyo comportamiento se desea modelar, y sea $D(\mathbf{Z}_1,\ldots,\mathbf{Z}_T;\psi)$ la distribución conjunta del vector de procesos estocásticos $\mathbf{Z}_t$.

Al postular el modelo de regresión lineal simple (MRLS) como el modelo estadístico adecuado, se está planteando una aproximación al PGI en la que se supone que el vector de procesos estócasticos $\mathbf{Z}_t$ es normal, independiente e idénticamente distribuído, que la información relevante viene dada por una única realización muestral y que la distribución marginal de las variables $\mathbf{X}_t$ puede ser desechada para la estimación de los parámetros estadísticos ($\mathbf{X}_t$ débilmente exógenas).

La independencia posibilita la descomposición de la distribución conjunta de $\mathbf{Z}_t$ en el producto de las marginales:

$$D(\mathbf{Z};\psi) = \prod_{t=1}^{T} D(\mathbf{Z}_t,\psi_t) \ ,$$

Además, $\psi_t = \psi$ por idéntica distribución, por lo cual:

$$D(\mathbf{Z};\psi) = \prod_{t=1}^{T} D(\mathbf{Z}_t,\psi_t) = \prod_{t=1}^{T} D(\mathbf{Z}_t,\psi)$$

Por otra parte, la distribución conjunta se puede expresar como el producto de la condicional de y_t a $\mathbf{X}_t$ por la marginal de $\mathbf{X}_t$, con lo cual:

$$D(\mathbf{Z}_t,\ \psi) = D(y_t/\mathbf{X}_t;\ \psi_1).D(\mathbf{X}_t;\ \psi_2)\ ,\ \text{con } \psi_1 \subseteq \psi\ ;\ \psi_2 \subseteq \psi$$

Dada la exogeneidad débil de las $\mathbf{X}_t$ (concepto que se definirá más adelante), la distribución relevante para la especificación del modelo será únicamente la condicional de y_t a $\mathbf{X}_t$:

$$D(y_t/\mathbf{X}_t;\ \psi_1)$$

Para formalizar el modelo, los supuestos subyacentes serán planteados de forma agrupada, en términos de los tres componentes descritos anteriormente:

(*i*) Supuestos relativos al *MGE* : $y_t = \mathbf{x}_t\beta + u_t$, $t \in \mathbb{T}$, $\mathbf{x}_t$ es una realización de $\mathbf{X}_t$

1.- $\mu_t = E(y_t/\mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t) = \mathbf{x}_t\beta$ es el componente sistemático

$u_t = y_t - E(y_t/\mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t)$ es el componente no sistemático o innovación del modelo

Este primer supuesto implica que se está considerando el siguiente conjunto de información :

$$F_t = \{\mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t \ ;\ t \in \mathbb{T}\}$$

es decir, una única realización del vector $\mathbf{X}_t$ para t en el conjunto $\mathbb{T}$.

2.- $\theta = (\beta, \sigma^2)$ son los parámetros estadísticos de interés, con $\beta \in \mathbb{R}^k$

O sea, son la parametrización particular elegida para representar a los verdaderos parámetros del modelo de probabilidad (ψ_1). Dado que $\mathbf{Z}_t$ es normal, se tiene que :

$$\mathbf{Z}_t \equiv \begin{Bmatrix} y_t \\ \mathbf{X}'_t \end{Bmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \right)$$

con σ_{12} y σ_{21} vectores de $1\times k$ y de $k\times 1$, respectivamente y Σ_{22} una matriz cuadrada de orden k. Se supone, a efectos expositivos, que la media de $\mathbf{Z}_t$ es cero, ya que esto no implica una pérdida de generalidad.

Los parámetros $(\sigma_{11},\sigma_{12},\sigma_{21},\Sigma_{22})$ son un subconjunto de ψ_1 y se definen de acuerdo a:

$$\sigma_{11}= V(y_t) \quad , \quad \sigma_{12}= Cov(y_t,\mathbf{X}_t) \quad , \quad \Sigma_{22}= Cov(\mathbf{X}_t)$$

Así, las expresiones que se derivan de la distribución condicional de un subvector a un vector NIID $(y_t/\mathbf{X}_t)$, son las siguientes:

$$\beta = \Sigma_{22}^{-1}.\ \sigma_{21} \qquad \text{y} \qquad \sigma^2= \sigma_{11}-\ \sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\sigma_{21}$$

3.- No hay información a priori sobre $\theta = (\beta,\sigma^2)$

Si éstos son los parámetros estadísticos, no necesariamente idénticos a los especificados en el modelo teórico (a los que se denominará ξ), no hay razón para que exista información alguna sobre ellos antes de estimar el modelo.

4.- $rango(\mathbf{x}) = k < T$ con $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1',\mathbf{x}_2'...\mathbf{x}_T')'$ la matriz de datos

Este supuesto puede considerarse como la contrapartida muestral de que el rango de Σ_{22} sea k - y por lo tanto exista su inversa y estén bien definidos los parámetros estadísticos - ya que $\mathbf{x}'\mathbf{x}/T$ puede ser tomado como el momento muestral correspondiente a Σ_{22}.

5.- $\mathbf{X}_t$ es débilmente exógena con respecto a θ , $t=1,2,...,T$

La interpretación de este supuesto se refiere a si es posible ignorar, a efectos de la estimación de los parámetros de interés θ, la distribución marginal de $\mathbf{X}_t$: como θ es una parametrización de ψ_1 en $D(\mathbf{Z}_t,\psi) = D(y_t/\mathbf{X}_t;\psi_1).D(\mathbf{X}_t;\psi_2)$, se está suponiendo que ψ_2 no es de interés. Es decir, para $\theta = h(\psi_1)$, los valores que tome $\psi_2 \in \Psi_2$ no determinan el valor de $\psi_1 \in \Psi_1$ y viceversa (o sea, $(\psi_1,\psi_2) \in \Psi_1 \mathbf{x} \Psi_2$).

(*ii*) Supuestos relativos al *Modelo de Probabilidad* :

$$\Phi = \left\{ D(y_t/\mathbf{X}_t;\theta) = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} exp\left[\frac{-(y_t-\mathbf{x}_t\beta)^{2}}{2\sigma^2}\right],\ \theta \equiv (\beta,\sigma^2) \in \mathbb{R}^k x\ \mathbb{R}^+_,\ t\in\mathbb{T} \right\}$$

Entonces, se está suponiendo que:

6.- (*6i*) $D(y_t/\mathbf{X}_t;\theta)$ es una distribución normal

(*6ii*) $E(y_t/\mathbf{X}_t=\mathbf{x}_t) = \mathbf{x}_t\beta$ lineal en $\mathbf{x}_t$

(*6iii*) $V(y_t/\mathbf{X}_t=\mathbf{x}_t) = \sigma^2$ homoscedástica

o sea, la distribución que se postula como la que mejor aproxima la estructura probabilística del PGI, es normal. Dado que ésta queda totalmente definida por sus dos primeros momentos, se explicita que la media es lineal en $\mathbf{x}_t$ y la varianza es constante para todo valor de $t\in\mathbb{T}$.

7.- $\theta \equiv (\beta,\ \sigma^2)$ invariante en el tiempo

es decir, que no existe un conjunto de parámetros diferente dependiendo del momento del tiempo en que se observen los datos.

(*iii*) Supuestos relativos al *Modelo Muestral*:

8.- $(y_1,y_2,\ ...y_T)'$ es una muestra aleatoria de $D(y_t/\mathbf{X}_t;\psi)$, para $t = 1,...,T$, respectivamente.

Esto implica que las variables $y_1,y_2,...y_T$ son independientes e idénticamente distribuídas.

El plantear que la muestra es aleatoria significa que se está suponiendo que los datos fueron obtenidos a través de un muestreo aleatorio simple. Esto es válido, por ejemplo, cuando se utilizan datos de corte transversal, en los que cada unidad en la población tiene igual probabilidad de ser seleccionada. No ocurre lo mismo, sin embargo, si las observaciones se obtuvieron por medio de muestreo estratificado, ya que las variables aleatorias, en este caso, no estarían idénticamente distribuídas, aunque si al interior de cada estrato la selección se realiza por muestreo aleatorio simple, seguirían siendo independientes. En el caso en que se trabaja con series de tiempo, lo más probable es que se trate, además, de variables dependientes, por lo cual la muestra será no aleatoria. El tipo de muestreo que se utilice para la generación de los datos determina cuál es el modelo de probabilidad adecuado y, por lo tanto, el modelo estadístico que corresponde plantear.

3.2. El Modelo de Regresión Lineal Estocástico

En el MRLS el conjunto de información relevante, aquel sobre el que se condiciona, está constituído por una única realización de la muestra ($\mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t$).

Sin embargo, es posible que la estructura estocástica de la variable $\mathbf{X}_t$ contenga información en relación a y_t. Es decir, que el componente sistemático de la variable dependiente deba ser definido en términos de todos los posibles eventos originados por $\mathbf{X}_t$. En este caso es necesario definir la σ-álgebra generada por $\mathbf{X}_t$, $\sigma(\mathbf{X}_t)$, que es la mínima σ-álgebra con respecto a la cual $\mathbf{X}_t$ es una variable aleatoria, como el conjunto de información sobre el que se condiciona.

Esto da lugar al modelo de regresión lineal estocástico (MRLE), que presenta algunas características distintas respecto al MRLS, como se deduce del planteamiento de los supuestos que se desarrolla a continuación:

(*i*) Supuestos relativos al MGE : $y_t = \mathbf{X}_t\beta + u_t, \quad t\in\mathbb{T}$

1.- $\mu_t = E(y_t/\sigma(\mathbf{X}_t)) = \mathbf{X}_t\beta$ es el componente sistemático

$u_t = y_t - E(y_t/\sigma(\mathbf{X}_t))$ es el componente no sistemático

Es decir, que el conjunto de información relevante es:

$$F_t = \left\{ \sigma(\mathbf{X}_t) = \sigma\left[\bigcup_{i=1}^{k} \left(\sigma(X_{it}) \right) \right] \right\}$$

Obsérvese que μ_t deja de ser un componente no estocástico, como ocurría en el MRLS, transformándose en una variable aleatoria respecto a $\sigma(\mathbf{X}_t)$. Esto tendrá consecuencias sobre la estimación del modelo, como se verá más adelante.

2.- $\theta = (\beta,\sigma^2)$ son los parámetros estadísticos de interés, con $\beta \in \mathbb{R}^k$, $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$

3.- No hay información a priori sobre $\theta = (\beta,\sigma^2)$

4.- $rango(\mathbf{X}) = k < T$ con $\mathbf{X} = (\mathbf{X}'_1,\mathbf{X}'_2\ldots\mathbf{X}'_T)'$ para todos los posibles valores observables de $\mathbf{X}$

5.- $\mathbf{X}_t$ es débilmente exógena con respecto a θ , $t=1,2,\ldots,T$

(*ii*) Supuestos relativos al ***Modelo de Probabilidad***:

$$\Phi = \left\{D(y_t/\mathbf{X}_t;\theta)\cdot D(\mathbf{X}_t;\psi_2) \ , \ \theta\equiv(\beta,\sigma^2) \in \mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^+, \ t\in\mathbb{T}\right\}$$

Al ser $\mathbf{X}_t$ una variable aleatoria, en el modelo de probabilidad debe aparecer la distribución conjunta de $\mathbf{Z}_t$, o bien el producto de la condicional de y por la marginal de $\mathbf{X}$. Esta última forma permite introducir los parámetros de interés θ, que son función sólo de ψ_1, dado el supuesto de exogeneidad débil.

Considerando que:

$$D(y_t/\mathbf{X}_t;\theta) = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} exp\left[\frac{-(y_t-\mathbf{X}_t\beta)^2}{2\sigma^2}\right] \quad , \quad \text{con } \theta\equiv(\beta,\sigma^2) \ , \ \theta=h(\psi_1) \quad \text{y}$$

$$D(\mathbf{X}_t;\psi_2) = \frac{\left(\det\Sigma_{22}\right)^{1/2}}{(2\pi)^{k/2}} exp\left[-\tfrac{1}{2}\mathbf{X}_t\Sigma_{22}^{-1}\mathbf{X}'_t\right]$$

se tiene que Φ toma la forma:

$$\Phi=\left\{\left[\frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}}exp\left(\frac{-(y_t-\mathbf{X}_t\beta)^2}{2\sigma^2}\right)\right]\times\left[\frac{\left(\det\Sigma_{22}\right)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{k/2}}exp\left[-\tfrac{1}{2}\mathbf{X}_t\Sigma_{22}^{-1}\mathbf{X}'_t\right]\right], \theta\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^+, t\in\mathbb{T}\right\}$$

Entonces:

6.- (6*i*) $D(y_t/\mathbf{X}_t;\theta)$ es una distribución normal

(6*ii*) $E(y_t/\sigma(\mathbf{X}_t)) = \mathbf{X}_t\beta$ lineal en $\mathbf{X}_t$

(6*iii*) $V(y_t/\sigma(\mathbf{X}_t)) = \sigma^2$ homoscedástica

7.- $\theta \equiv (\beta, \sigma^2)$ invariante en el tiempo

(*iii*) Supuestos relativos al ***Modelo Muestral***:

8.- $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \ldots \mathbf{Z}_T)'$ es una muestra aleatoria de $D(\mathbf{Z}_t;\psi)$, para $t = 1,\ldots,T$, respectivamente.

Los supuestos del MRLE son, en apariencia aunque no en esencia, muy similares a los del MRLS. Sin embargo, a los efectos de la inferencia estadística, el tener un componente sistemático aleatorio tendrá implicaciones de importancia, relacionadas al desconocimiento de la distribución exacta de los estimadores y, por lo tanto, a la construcción de estadísticos de prueba. Sin embargo, dado que su distribución en el límite es normal, la inferencia se resuelve haciendo uso de la teoría asintótica.

3.3. El Modelo de Regresión Lineal Dinámico

Gran número de procesos, y en especial los relacionados a variables económicas, son de carácter dinámico. La implicación de ello es que no es posible, entonces, considerar que las variables aleatorias que los representan siguen siendo independientes, ya que en cada momento del tiempo, el pasado de la variable contiene información relevante.

De esta manera, en la especificación del Modelo de Regresión Lineal Dinámico (MRLD) ya no es posible mantener los supuestos de independencia e idéntica distribución de las variables $\mathbf{Z}_t$. En su lugar habrá que suponer que $\{\mathbf{Z}_t,\ t \in \mathbb{T}\}$ es un proceso normal, asintóticamente independiente y estacionario.

La independencia asintótica, que implica que las condiciones iniciales son despreciables, resulta imprescindible, ya que de otro modo se tendría un número infinito de rezagos y, por lo tanto, de variables explicativas y parámetros en la especificación.

Habrá entonces que realizar algunas modificaciones en los supuestos subyacentes :

(*i*) Supuestos relativos al MGE :

$$y_t = \mathbf{X}_t\beta + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^{m} \delta_i' \mathbf{X}_{t-i}' + u_t \ , \ t\in\mathbb{T}$$

Sean $\quad \mathbf{Z}_t^{\circ} = \left\{\mathbf{X}_t,\ y_{t-1},\ y_{t-2},\ldots,\ y_{t-m},\ \mathbf{X}_{t-1},\ldots,\ \mathbf{X}_{t-m}\right\}$

las variables sobre las que se debe condicionar, mientras que los parámetros relativos a la media condicional son:

$$\beta^{\circ} = \left\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k,\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m,\delta_1^1,\ldots,\delta_1^k,\ldots,\delta_m^1,\ldots,\delta_m^k\right\}$$

Entonces,

1.- $\mu_t = E(y_t/F_t) = \mathbf{x}_t\beta + \sum_{i=1}^{m}(\gamma_i y_{t-i} + \delta_i'\mathbf{x}_{t-i}')$ es el componente sistemático

$u_t = y_t - E(y_t/F_t)$ es la innovación o componente no sistemático.

El conjunto de información es, ahora :

$$F_t = \left\{\sigma(y_{t-1}),\sigma(y_{t-2}),\ldots,\sigma(y_{t-m})\ ;\ \mathbf{X}_{t-i} = \mathbf{x}_{t-i},\ i = 0,1,\ldots,m\right\}$$

Nótese que en este caso la distribución que se considera relevante es la condicional de y_t a $\mathbf{Z}_t^{\circ}$. Para llegar a ésta se tuvo que realizar una descomposición de la conjunta de la siguiente forma:

$$D(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2,\ldots,\mathbf{Z}_T;\psi) = D(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2,\ldots,\mathbf{Z}_m;\psi)\cdot\prod_{t=m+1}^{T} D(\mathbf{Z}_t/\mathbf{Z}_{t-1},\ldots,\mathbf{Z}_{t-m};\psi)$$

El primer término de la derecha de la igualdad es la distribución conjunta de las primeras m observaciones, que se denominan condiciones iniciales y que, al suponer independencia asintótica, se suponen despreciables.
Además:

$$D(\mathbf{Z}_t/\mathbf{Z}_{t-1},\ldots,\mathbf{Z}_{t-m};\psi)=D(\mathbf{Z}_t/\mathbf{Z}_{t-1}^{\circ})=D(y_t/\mathbf{X}_t,\mathbf{Z}_{t-1}^{\circ};\psi_1)\cdot D(\mathbf{X}_t/\mathbf{Z}_{t-1}^{\circ};\psi_2)$$

De manera que, para basar el modelo en la distribución condicional de y_t será necesario realizar supuestos sobre la distribución de las variables $\mathbf{X}_t$ que posibiliten ignorar su distribución marginal. Estas deberán ser más restrictivas que en el caso del modelo simple porque en este caso las variables sobre las que se condiciona incluyen valores pasados de y que pueden tener incidencia sobre las observaciones presentes de $\mathbf{X}$.

2.- $\theta^{\circ} = (\beta^{\circ},\ \sigma^2)$ son los parámetros de interés ($[(m+1)k+m]$ si no hay constante, $[(m+1)k]$ si hay constante).

3.- $\{\gamma_1 \ldots \gamma_m\}$ deben de satisfacer la siguiente restricción para garantizar independencia asintótica:

Las raíces λ_i de : $p(\lambda) = \lambda^m - \sum_{i=1}^{m} \gamma_i . \lambda^{m-i} = 0$ deben cumplir: $|\lambda_i| < 1$ para $i = 1,2 \ldots m$

Lo anterior se deriva del planteamiento siguiente :

Si el MRLD se especifica como una ecuación diferencial del tipo:

$$\gamma(L)y_t = \omega_t + u_t$$

Con : $\omega_t = \mathbf{x}_t \beta + \sum_{i=1}^{m} \delta'_i \mathbf{x}'_{t-i}$, $\gamma(L) = 1 - \gamma_1 L - \gamma_2 L^2 - , \ldots, - \gamma_m L^m$

y se supone que $\gamma(L)$ tiene m raíces distintas, su solucion será:

$$y_t = g(t) + \gamma^{-1}(L)(\omega_t + u_t)$$

donde : $g(t) = c_1 . \lambda_1^t + c_2 . \lambda_2^t + \ldots + c_m . \lambda_m^t$ es la solución de la ecuación homogénea : $\gamma(L)y_t = 0$ y los coeficientes c_i dependen de las condiciones iniciales.

Así, para asegurar independencia asintótica, se requiere que cuando $t \longrightarrow \infty$ se "olviden" las condiciones iniciales, es decir : que cuando $t \longrightarrow \infty$, $g(t) \longrightarrow 0$. Esto se cumple si y sólo si :

$$|\lambda_i| < 1 \quad \text{para } i = 1,2 \ldots m$$

siendo λ_i las raíces de : $\gamma(\lambda) = \lambda^m - \gamma_1 \lambda^{m-1} - , \ldots, - \gamma_m = 0$

Las condiciones anteriores relativas a λ_i se traducirán en restricciones sobre los γ_i , $i = 1, \ldots, m$ que habrá que verificar.

4.- $\mathbf{X}_t$ fuertemente exógena con respecto a θ°. La exogeneidad fuerte implica que las variables son débilmente exógenas respecto al conjunto de parámetros y, además, no causalidad en el sentido de Granger.

Este supuesto hace posible ignorar la distribución marginal de $\mathbf{X}_t$ para la estimación de θ°. La posible interrelación entre el pasado de y_t y el presente de $\mathbf{X}_t$ se elimina si $\mathbf{Y}^{\circ}_{t-1}$ no causa $\mathbf{X}_t$ en el sentido de Granger. Este concepto se define como sigue:

Sean $\mathbf{X}^{\circ}_{t-1} = (\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_{t-1})$; $\mathbf{Y}^{\circ}_{t-1} = (y_1,\ldots,y_{t-1})$; $\mathbf{Z}^{\circ}_{t-1} = (\mathbf{Y}^{\circ}_{t-1},\mathbf{X}^{\circ}_{t-1})$

Entonces, $\mathbf{Y}^{\circ}_{t-1}$ no causa $\mathbf{X}_t$ en el sentido de Granger si condicionar sobre $\mathbf{Y}^{\circ}_{t-1}$ no afecta la distribución de $\mathbf{X}_t$, es decir, si $D(\mathbf{X}_t / \mathbf{Z}^{\circ}_{t-1}, \psi_2) = D(\mathbf{X}_t / \mathbf{X}^{\circ}_{t-1}, \psi_2)$

5.- $Rango(\mathbf{Z}^{\circ}_t) = k(m+1)+m<T$ (si no hay constante) o

$Rango(\mathbf{Z}^{\circ}_t) = k(m+1)<T$ (si hay constante).

(*ii*) Supuestos relativos al *Modelo de Probabilidad*:

$$\Phi = \left\{ D(y_t/\mathbf{Z}^{\circ}_t;\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[(-1/2\sigma^2)(y_t - \mathbf{Z}^{\circ}_t\beta^{\circ})^2\right];\ \theta^{\circ} \in \mathbb{R}^{m(k+1)} \times \mathbb{R}^{+};\ t>m \right\}$$

6.- (6*i*) $D(y_t/F_t\ ;\ \theta)$ es una distribución normal

(6*ii*) $E(y_t/F_t) = \mathbf{Z}^{\circ}_t\beta^{\circ}$ lineal en $\mathbf{Z}^{\circ}_t$

(6*iii*) $V(y_t/F_t) = \sigma^2$ homoscedástica (libre de $\mathbf{Z}^{\circ}_t$)

7.- $\theta^{\circ} = (\beta^{\circ}, \sigma^{2})$ invariante en el tiempo

(*iii*) Supuestos relativos al ***Modelo Muestral***:

8.- $\left\{y_{m+1}, \ldots, y_{T}\right\}$, es una muestra asintóticamente independiente y estacionaria tomada de $D(y_t/\mathbf{Z}^{\circ}_{t-1}, \mathbf{X}_t; \theta^{\circ})$, para $t = m+1, \ldots, T$, respectivamente.

Nótese que el tomar una muestra desde el período $(m+1)$ es posible sólo a partir del supuesto de independencia asintótica sobre y_t, que permite despreciar el efecto asintótico de las primeras m observaciones.

3.4. El Modelo de Regresión Lineal Múltiple

El Modelo de Regresión Lineal Múltiple (MRLM) es la generalización del MRLS al caso en que se tiene un sistema de ecuaciones en vez de una ecuación única. Así, la variable dependiente será, ahora, un vector de variables:

$$\mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} y_{1t} \\ \vdots \\ y_{nt} \end{bmatrix} = B\mathbf{x}'_t + \mathbf{u}_t$$

con $\mathbf{y}_t$ un vector de $n x 1$ variables endógenas, B una matriz $n x k$ de coeficientes, $\mathbf{x}'_t$ un vector de $k x 1$ variables y la matriz de varianzas y covarianzas de $\mathbf{u}_t$:

$$E(\mathbf{u}_t \mathbf{u}_s) = \begin{cases} \Omega & \text{si } t=s \text{ , matriz simétrica de nxn} \\ 0 & \text{si } t\neq s \end{cases}$$

Cada una de las n ecuaciones es de la forma: $y_{1t} = \beta_1 \mathbf{x}'_t + u_{1t}$

En la distribución conjunta $D(\mathbf{Z}_t;\ \psi)$ interviene un conjunto de $(n+k)$ variables : $\mathbf{Z}_t = \left\{ y^1_t, \ldots, y^n_t,\ X^1_t, \ldots, X^k_t \right\}$.

Esto determina que se tenga que cambiar la *forma* en que se plantean los supuestos subyacentes al modelo, pero éstos son en esencia idénticos al caso uniecuacional:

(*i*) Supuestos relativos al MGE : $\mathbf{y}_t = B\mathbf{x}'_t + \mathbf{u}_t \qquad t\in\mathbb{T}$

1.- $\mu_t = E(\mathbf{y}_t / \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t)$ es el componente sistemático, vector de $nx1$

$\mathbf{u}_t = \mathbf{y}_t - E(\mathbf{y}_t / \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t)$ es el componente no sistemático

2.- $\theta = (B, \Omega)$ son los parámetros estadísticos de interés

$$B = \Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{21} \qquad \Omega = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{21} \qquad\qquad \theta \in \Theta \equiv \mathbb{R}^{nk} \times \mathbb{C}^n$$

donde $\mathbb{C}^n$ es el espacio de matrices positivas definidas de rango n.

3.- No hay información a priori sobre $\theta = (B,\Omega)$.

4.- $\mathbf{X}_t$ es débilmente exógena con respecto a θ.

5.- $Rango(\mathbf{x}) = k<T$, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}'_1,\mathbf{x}'_2,\ldots,\mathbf{x}'_T)'$ matriz de $T\times k$.

(*ii*) Supuestos relativos al ***Modelo de Probabilidad***:

$$\Phi = \left\{ D(\mathbf{y}_t/\mathbf{X}_t;\theta) = \frac{|\Omega|^{-1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left[-\tfrac{1}{2}(\mathbf{y}_t - B\mathbf{x}'_t)'\Omega^{-1}(\mathbf{y}_t - B\mathbf{x}'_t)\right]; \quad \theta \in \mathbb{R}^{nk}\times \mathbb{C}^n;\ t \in \mathbb{T} \right\}$$

6.- (6*i*) $D(\mathbf{y}_t/\mathbf{X}_t)$ es normal multivariada

(6*ii*) $E(\mathbf{y}_t/\mathbf{X}_t= \mathbf{x}_t) = B\mathbf{x}'_t$ lineal en $\mathbf{x}_t$

(6*iii*) $Cov(\mathbf{y}_t/\mathbf{X}_t= \mathbf{x}_t) = \Omega$ homoscedástica

7.- $\theta \equiv (B,\Omega)$ es invariante en el tiempo

(*iii*) Supuestos relativos al ***Modelo Muestral***:

8.- $\left\{\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_T\right\}$ es una muestra independiente tomada de $D(\mathbf{y}_t/\mathbf{X}_t;\theta)$ para $t = 1,\ldots,T$, respectivamente.

La exposición anterior muestra que en la especificación del MRLM la única diferencia real con el MRLS es que ahora se tiene un número mayor de parámetros estadísticos de interés. Si bien la estimación y evaluación del modelo econométrico está fuera del alcance de este documento, parece importante señalar que:

1.- La estimación se realiza en principio ecuación por ecuación, por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) o Máxima Verosimilitud (MV). Sin embargo, la significación global del sistema, medida por la relación entre la variación explicada por el modelo con respecto a la variación total, es ahora una matriz, por lo cual deberá calcularse una transformación de ella que la convierta en un escalar, como ser la traza o el determinante.

Sea $\mathbb{G} = (Y'Y - \hat{U}'\hat{U})(Y'Y)^{-1}$ la matriz que da cuenta de la variación explicada por el sistema como proporción de la variación total.

Entonces, $d_1 = (1/n)tr(\mathbb{G})$ y $d_2 = det(\mathbb{G})$, traza y determinante respectivamente, son medidas que varían entre 0 y 1 con una interpretación análoga al $\mathbb{R}^2$ tradicional.

2. De igual forma, las pruebas de incorrecta especificación del modelo deberán realizarse teniendo en cuenta todas las ecuaciones conjuntamente, debiendo utilizarse estadísticos que son una transformación de las matrices y vectores que resultan de aplicar al sistema idénticos principios que en el caso uniecuacional. Lo mismo aplica para la realización de pruebas de hipótesis sobre parámetros de varias ecuaciones simultáneamente.

De esta forma, solamente una vez que no se rechacen hipótesis sobre la existencia de interrelaciones entre las variables y_t del sistema (que resultan de restricciones sobre los parámetros de distintas ecuaciones) y se desee, por lo tanto, incorporar esta información para realizar una estimación eficiente, corresponderá utilizar métodos que tengan en cuenta la forma de la matriz de varianzas y covarianzas, como ser Mínimos Cuadrados Generalizados (MCG), SURE, etc..

Por último, conviene mencionar el caso particular en que las ecuaciones del sistema son una misma relación para diferentes individuos (datos panel). En principio, éste puede verse como un MRLM con la particularidad que el conjunto de regresores es idéntico para todas las ecuaciones. De esta forma, aún cuando las variables dependientes tengan covarianzas contempóraneas no nulas el método de estimación pertinente continúa siendo MCO (MV). Sólo el sometimiento a prueba de restricciones de exclusión en las distintas ecuaciones, o bien la detección de varianza heteroscedástica, etc., justifica el uso do métodos alternativos.

3.5. El Modelo Regresión Lineal de Ecuaciones Simultáneas

El modelo de ecuaciones simultáneas (MRLES) puede ser representado por:

$$(1)\quad \Gamma' \mathbf{y}_t + \Delta' \mathbf{x}'_t + E_t = 0 \qquad Cov(E) = V$$

con $\mathbf{y}_t$ un vector de n filas, $\mathbf{x}'_t$ un vector columna de orden k, Γ una matriz de nxn, Δ de kxn y V una matriz de nxn.

Se observa que aparentemente es muy similar al MRLM desarrollado en la sección anterior. Una primer diferencia, sin embargo, es que en cada ecuación aparecen todas o algunas de las variables endógenas, es decir, éstas son parte del componente sistemático. Así, para incluir dichas variables, será necesario redefinir el conjunto de información sobre el que se condiciona.

Considérese la $\imath$-ésima ecuación :

$$\gamma_{\imath 1} y_{1t} + \gamma_{\imath 2} y_{2t} + ,\ldots,+ \gamma_{\imath\imath} y_{\imath t} + ,\ldots,+ \gamma_{\imath n} y_{nt} + \Delta'_\imath \mathbf{x}'_t + \varepsilon_{\imath t} = 0$$

Si esta ecuación se plantea para explicar el comportamiento de la $\imath$-ésima variable, se puede despejar $y_{\imath t}$ dividiendo todo por $-\gamma_{\imath\imath}$:

$$y_{\imath t} = -\frac{\gamma_{\imath 1}}{\gamma_{\imath\imath}} y_{1t} - ,\ldots, - \frac{\gamma_{\imath n}}{\gamma_{\imath\imath}} y_{nt} - \frac{1}{\gamma_{\imath\imath}} \Delta'_\imath \mathbf{x}'_t - \frac{1}{\gamma_{\imath\imath}} \varepsilon_{\imath t}$$

que se puede expresar como:

$$(2)\quad y_{\imath t} = \Gamma^{o\prime}_\imath y_{(\imath)t} + \Delta^{o\prime}_\imath \mathbf{x}'_t + \varepsilon^*_{\imath t}$$

con $y_{(\imath)}$ el vector de $(n-1)$ endógenas que resulta de excluir $y_\imath$, $\varepsilon^*_{\imath t}$ la perturbación multiplicada por $(-1/\gamma_{\imath\imath})$, $\Gamma^o_\imath$ y $\Delta^o_\imath$ los vectores de coeficientes de la $\imath$-ésima ecuación normalizados (divididos por $-\gamma_{\imath\imath}$).

Así, el conjunto de información relevante para la $\imath$-ésima ecuación es:

$$F_{(\imath)t} = \left\{ \sigma(y_{(\imath)t}) \ ; \ \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t \right\}$$

El componente sistemático de $y_{\imath t}$ será :

$$\mu_{\imath t} = E(y_{\imath t}/F_{(\imath)t}) = \Gamma_{\imath}^{\circ\prime} y_{(\imath)t} + \Delta_{\imath}^{\circ\prime}\mathbf{x}_t'$$

y la varianza de $y_{\imath\imath}$: $v_{\imath\imath} = E(\varepsilon_{\imath t}^{*2})$

Expresada de esta manera, la ecuación puede verse como una *parametrización* alternativa de la $\imath$-ésima ecuación del siguiente MRLM:

$$\textbf{(3)} \quad \mathbf{y}_t = B\mathbf{x}_t' + \mathbf{u}_t \qquad Cov(\mathbf{u}_t) = \Omega \quad \theta \equiv (B,\Omega)$$

ya que $(\Gamma_{\imath}^{\circ\prime},\ \Delta_{\imath}^{\circ\prime})$ y $E(\varepsilon_{\imath t}^{*2})$ son funciones de θ, como se deriva a continuación:

Si en el MRLM se separa $y_{\imath t}$ del resto, la distribución condicional se puede expresar como:

$$\left[\begin{bmatrix} y_{\imath t} \\ y_{(\imath)t} \end{bmatrix} \Big/ \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t \right] \sim \left[\begin{bmatrix} \beta_{\imath}\mathbf{x}_t' \\ B_{(\imath)}\mathbf{x}_t' \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix} \right]$$

donde, nuevamente, el subíndice $(\imath)$ indica que son todas las variables excluída la $\imath$-ésima.

Así, se observa que:

$$\Gamma_{\imath} = \Omega_{22}^{-1}\omega_{21} \qquad \text{y} \qquad \Delta_{\imath} = \beta_{\imath} - B_{(\imath)}\Omega_{22}^{-1}\omega_{21}$$

De esta forma, si se descompone la distribución condicional de $\mathbf{y}_t$ de acuerdo a:

$$D(\mathbf{y}_t/\mathbf{X}_t;\ \theta) = D(y_{\imath t}/\mathbf{y}_{(\imath)t},\mathbf{X}_t;\ \eta_{\imath})\cdot D(\mathbf{y}_{(\imath)t}/\mathbf{X}_t;\ \eta_{(\imath)})$$

La ecuación **(1)** es el MGE que resulta de considerar como la distribución relevante a $D(y_{\imath t}/\mathbf{y}_{(\imath)t},\mathbf{X}_t;\ \eta_{\imath})$ y, por lo tanto, cada ecuación del MRLES es una parametrización $(\eta_{\imath} = (\Gamma_{\imath}^{\circ},\ \Delta_{\imath}^{\circ}, v_{\imath\imath})\ ;\ \eta_{(\imath)} = (B_{(\imath)},\Omega_{22})\ )$ alternativa a θ.

Sin embargo, si bien lo anterior es válido para cada una de las ecuaciones del sistema, al considerar las n conjuntamente, el número de parámetros resultante (el producto cruz de η_1) es superior al que es posible determinar a partir de θ. Es decir, el modelo de ecuaciones simultáneas **(1)** es una *sobre-parametrización* del MRLM **(3)** : en **(1)** existen $[n(n-1)+nxk+n(n+1)/2]$ parámetros a identificar a partir de $[nxk+n(n+1)/2]$ parámetros en **(3)**, es decir, hay $n(n-1)$ parámetros en $(\eta_1, \eta_{(1)})$ que no quedan determinados a partir de θ, a menos que exista información adicional.

Los sistemas recursivos son un ejemplo típico de lo anterior: como Γ es una matriz triangular inferior, existen precisamente $n(n-1)$ restricciones de exclusión (se sabe, a priori, que hay $n(n-1)$ parámetros en Γ iguales a cero). En este caso es posible realizar la descomposición :

$$D(\mathbf{Y}_t/\mathbf{X}_t;\ \theta) = \prod_{i=1}^{n} D(Y_{it}/Y_{1t},\ldots,Y_{i-1},Y_{i+1},\ldots,Y_T,\ \mathbf{X}_t;\ \eta_i)$$

Para ilustrar la relación entre los distintos conjuntos de parámetros que intervienen en el MRLES véase que :

Si ξ es el conjunto de parámetros *teóricos* de interés, entonces existe una relación entre éstos y los *estructurales* η :

$$\xi = L(\eta) \quad \text{con} \quad \eta = (\Gamma,\Delta,V)$$

Además, $\eta = (\eta_1, \eta_2)$, con η_1 un subconjunto de $[nxk+n(n+1)/2]$ parámetros estructurales, identificados a partir de θ :

$$\eta_1 = G(\theta,\eta_2)$$

Si se tiene información adicional sobre los restantes $n(n-1)$ parámetros en η_2, entonces el sistema está identificado, en otro caso se dice que η_2 *no está identificado*.

Por último, si se pre-multiplica **(1)** por $(\Gamma')^{-1}$ se obtiene :

$$\mathbf{y}_t + (\Gamma')^{-1}\Delta'\mathbf{x}'_t + (\Gamma')^{-1}\varepsilon_t = \mathbf{0} \qquad Cov(\varepsilon_t) = V$$

Al compararlo con **(3)**, se observa que :

$$B + (\Gamma')^{-1}\Delta = \mathbf{0} \qquad \text{y} \qquad \Gamma'\Omega\Gamma = V$$

Así, si existen $n(n-1)$ restricciones adicionales, el sistema de ecuaciones más arriba posee una solución única, por lo que los parámetros están identificados.

Los supuestos subyacentes al MRLES se plantean como sigue :

(i) Supuestos relativos al MGE : $\mathbf{y}_t = B\mathbf{x}'_t + \mathbf{u}_t \qquad t\in\mathbb{T}$

1.- $\mu_t = E(\mathbf{y}_t/\mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t)$ es el componente sistemático, vector de $n\text{x}1$

$\mathbf{u}_t = \mathbf{y}_t - E(\mathbf{y}_t/\mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t)$ es el componente no sistemático

2i.- $\theta = (B,\Omega)$ son los parámetros *estadísticos* de interés :

$$B = \Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{21} \qquad \Omega = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{21} \qquad \theta \in \Theta \equiv \mathbb{R}^{nk}\text{x}\ \mathbb{C}^{n}$$

2ii.- $\xi = L(\eta)$ son los parámetros *teóricos* de interés, siendo

$\eta = (\Gamma,\ \Delta,\ V)$ los parámetros *estructurales*, donde :

$$\Gamma = H_1(\theta); \quad \Delta = H_2(\theta); \quad V = H_3(\theta)$$

3.- Los parámetros estructurales de interés y, por lo tanto los teóricos, están identificados: $\xi = L(\eta)$; $\eta = H(\theta)$

4.- $\mathbf{X}_t$ es débilmente exógena con respecto a θ y ξ.

5.- *Rango(***x***)* $= k<T$ para todo valor observable de **X**.

(*ii*) Supuestos relativos al *Modelo de Probabilidad*:

$$\Phi = \left\{ D(\mathbf{y}_t/\mathbf{X}_t;\theta) = \frac{|\Omega|^{-1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left[-\tfrac{1}{2}(\mathbf{y}_t-B\mathbf{x}'_t)'\Omega^{-1}(\mathbf{y}_t-B\mathbf{x}'_t)\right]; \quad \theta \in \mathbb{R}^{nk}_{\times}\, \mathbb{C}^n;\ t \in \mathbb{T} \right\}$$

6.- (6*i*) $D(\mathbf{y}_t/\mathbf{X}_t)$ es normal multivariada

(6*ii*) $E(\mathbf{y}_t/\mathbf{X}_t= \mathbf{x}_t) = B\mathbf{x}'_t$ lineal en $\mathbf{x}_t$

(6*iii*) $Cov(\mathbf{y}_t/\mathbf{X}_t= \mathbf{x}_t) = \Omega$ homoscedástica

7.- $\theta \equiv (B,\Omega)$ es invariante en el tiempo

(*iii*) Supuestos relativos al *Modelo Muestral*:

8.- $\left\{y_1,\ldots,y_T\right\}$ es una muestra independiente tomada de $D(\mathbf{y}_t/\mathbf{X}_t;\theta)$ para $t = 1,\ldots,T$, respectivamente.

Como se deduce de la presentación del modelo, es la necesidad de imponer restricciones que identifiquen el modelo y no la existencia de variables endógenas entre los regresores, lo que diferencia a este tipo de modelos del MRLM y hace necesario el uso de métodos de estimación distintos, que incorporen la información adicional incluída.

4.- Conclusión

En este documento se intenta sintetizar algunos de los planteamientos realizados por la London School of Economics y formalizados extensamente por A. Spanos, con el propósito de motivar la discusión y, deseablemente, la incorporación de los mismos en el análisis aplicado.

Considerar la Econometría como una forma más de análisis económico y no como la cuantificación de relaciones teóricas, así como explicitar claramente los distintos componentes de un modelo econométrico, resulta fundamental para el adecuado estudio de los fenómenos económicos. Es en este espíritu que se presentan en el trabajo los modelos de uso más generalizado, poniendo énfasis en el origen real de sus diferencias, desde el punto de vista de los modelos probabilístico y/o muestral que los conforman, así como de los supuestos relativos al mecanismo generador estadístico que sintetiza la información proveniente no sólo de la Teoría Económica, sino también de los datos disponibles y el mecanismo probabilístico que les dio origen.

Finalmente, en el marco del enfoque propuesto, se interpreta el comportamiento sistemático de los residuos en términos de la especificación incorrecta del modelo como una aproximación adecuada del proceso generador de información real. Por ello, se deriva formalmente como lo anterior es consecuencia de la inadecuada especificación de los momentos de la distribución condicional de la variable dependiente al conjunto de información, de manera de motivar el extenso diagnóstico de los modelos estimados antes de utilizarlos para sustentar hipótesis, simular políticas o predecir futuras evoluciones.

BIBLIOGRAFIA

Engle,R., Hendry,D., Richard,J.F. *Exogeneity.* Econometrica, 51, Mar.,1983.

Geweke,J. *Inference and Casuality in Economic Time Series Models.* Handbook of Econometrics, Vol.II, ed. Z. Griliches & M. Intrilligator, North-Holland, Amsterdam, 1984.

Hendry,D.F., Richard,J.F. *On the Formulation of Empirical Models in Dynamic Econometrics.* Journal of Econometrics, 1982.

Hendry,D.F., Richard,J.F. *The Econometric Analysis of Economic Time Series.* International Statistical Review, 1983.

Leamer,E. *Let's Take the Con out of Econometrics.* American Economic Review, 1983.

McAleer,M., Pagan,A., Volker,P. *What will Take the Con out of Econometrics?.* American Economic Review, 1985.

Mizon, G.E. *The Encompassing Approach in Econometrics.* Econometrics and Quantitatuve Economics, ed. D.F.Hendry & K. F. F.Wallis, Basil Blaackwell, Oxford, 1984.

Pagan,A. , Hall,A. *Diagnostic Tests as Residual Analysis.* Australian National University, Working Paper # 087, Abr., 1983.

Pagan,A. *Model Evaluation by Variable Addition.* Econometrics & Quantitative Economics, Bassil Blackwell, 1984.

Pesaran,M.H. *On the General Problem of Model Selection.* The Review of Economic Studies, 1974.

Ramsey, J.B. *Classical Model Selection through Specification Error Tests.* Frontiers of Econometrics, Ed. Zarembka, N.York, 1974.

Sabau,H. *La Econometría Estructural : Una Nota Metodológica.* Documentos de Investigación #11, C.I.D.E., 1988.

Spanos,A. *Statistical Foundations of Econometric Modelling.* Cambridge Univ. Press, 1986.

Spanos,A. *Towards a Unifying Methodological Framework for Econometric Modelling.* Modelling Economic Series. Readiongs in Econometric Methodology, Ed. C.W.J. Granger, Clarendon Press, Oxford, 1990.

Zellner,A. *An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias.* Journal of the American Statistical Association, 57, 1962.