Ancho de Banda Efectivo para Flujos Markovianos

Paola Bermolen

Agosto 2003

Índice

1. Introducción

En este trabajo vamos a estudiar la definición y propiedades de una magnitud llamada *ancho de banda efectivo* utilizada en el análisis local de redes y colas de espera. Si consideramos un sistema multiplexor donde varios flujos de datos comparten una única salida, es de interés conocer cuántos recursos requiere cada flujo del sistema. Pensemos en el sistema como un servidor que puede procesar el trabajo que recibe de varias fuentes distintas a una cierta tasa constante c y además puede almacenar en un *buffer* hasta una cierta cantidad b de unidades de trabajo. El trabajo que llega cuando el *buffer* está completo se descarta y por lo tanto nunca es procesado. Conocer entonces, los recursos que necesita cada conexión tiene aplicaciones tales como, realizar control de admisión de conexiones (CAC) y satisfacer condiciones de calidad de servicio (QoS). Así es como una nueva conexión puede ser aceptada si hay suficientes recursos disponibles y el precio de la conexión puede ser de alguna forma proporcional a estos recursos. Hay dos límites claros para estos requerimientos: por un lado se podría reservar la tasa máxima de transmisión para cada conexión (lo que da lugar a un multiplexor determinístico), si bien no hay posibilidad de "*buffer overflow*"(no queda trabajo sin procesar), la utilización del enlace es muy pobre. Por otro lado, se podría reservar la tasa media de transmisión para cada conexión, que permite utilizar en media el 100 % del enlace, pero es inevitable que exista "*buffer overflow*". Entonces, dada una cierta calidad de servicio requerida (probabilidad de pérdida de trabajo, retardo en el tiempo de procesamiento,etc) la cantidad de recursos que deberá reservarse para cada conexión, está en algún lugar entre la tasa media y la tasa máxima de dicha conexión. Esta cantidad se conoce generalmente como *ancho de banda efectivo*(EB por sus siglas en inglés) y es entonces una medida del uso de los recursos.

Comenzaremos entonces, en la sección 2, definiendo formalmente la función ancho de banda efectivo para flujos de entrada que suponemos son procesos estocásticos con incrementos estacionarios y demostraremos la afirmación del párrafo anterior sobre las cotas inferior y superior de esta función. Luego en la sección 3 probaremos algunas propiedades fundamentales del EB. En la sección 4 calculamos el EB para diferentes flujos de entrada: flujos con velocidad aleatoria, flujos modelados por Procesos de Poisson, Fuentes Periódicas, Procesos de Poisson Generalizados y Fuentes Gaussianas. Estas secciones se basan en el trabajo de Kelly [4]. En la sección 5 obtenemos una estimación para la probabilidad de pérdida, es decir que el tamaño de la cola supere el tamaño del *buffer*, cuando el trabajo que se recibe es suma de procesos estocásticos independientes con igual distribución [7]. En la sección 6, demostraremos en que sentido la función ancho de banda efectivo es única. En la sección 7 repasamos algunos conceptos de Cadenas de Markov en tiempo continuo para luego definir flujo Markoviano y calcular el correspondiente ancho de banda efectivo (fórmula de Kesidis-Walrand-Chang [5]). Luego en la sección 8 probamos un teorema que proporciona una estimación gaussiana asintótica para el ancho de banda efectivo a partir de las trayectorias de tráfico basado en el teorema de Lebedev-Lukashuk. En las secciones 9 y 10 encontramos un estimador consistente para la varianza obtenida en la sección anterior y calculamos el correspondiente Intervalo de Confianza. Estas secciones se basan en el trabajo "Effective bandwidth estimation and testing for Markov sources"de Pechiar-Perera-Simon [6]. Por último en la sección 11, simulamos un flujo Markoviano modulado por una cadena de Markov con dos estados (Proceso On-Off) y utilizamos las estimaciones vistas en las secciones anteriores para graficar el ancho de banda efectivo y la varianza como funciones de los parámetros s y t.

2. Definición

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad, consideraremos en él un proceso estocástico, es decir una función $X : \Omega \times \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $X(\omega, t) = X_t(\omega)$ es una variable aleatoria $\forall t \geq 0$.Para cada $\omega \in \Omega$ a la función $X(\omega, \cdot) : \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$ se le llamará *trayectoria* del proceso.

Un proceso estocástico se dice de *incrementos estacionarios* si el proceso $\{X_t - X_s\}_{t \geq 0}$ es un proceso estacionario $\forall s \geq 0$. Diremos también que un proceso estocástico es un *proceso de incrementos independientes* si $\forall t_1, \ldots, t_k$ tales que $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k$, $k \in \mathbb{N}$, se cumple que las variables aleatorias $\left\{X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\right\}$ son independientes $\forall i \in \{1 \cdots k\}$.

En este trabajo X_t representa la cantidad de trabajo que llega a un *switch* desde una fuente en el intervalo $[0, t]$. Al asumir que es un proceso de incrementos estacionarios estamos suponiendo que la distribución de la cantidad de trabajo que llega en un intervalo sólo depende de la longitud del mismo. Decimos entonces que las fuentes que cumplen esta propiedad son *fuentes estacionarias.*

Definición 2.1 *Se define la función* ***ancho de banda efectivo*** *de una fuente estacionaria como:*

$$\alpha(s, t) = \frac{1}{st} \log \mathbf{E} e^{s X_t} \quad 0 < s, t < \infty \tag{2.1}$$

donde X_t es el trabajo que produce la fuente en $[0, t]$, y s y t son parámetros de escala.

Luego veremos las propiedades de esta función, pero una propiedad intuitiva que debe cumplir esta función es la siguiente:

Observación 2.2 *Sea $X_t = Ct$, es decir, el trabajo acumulado desde una fuente que envía datos a velocidad constante C. Se tiene entonces que:*

$$\alpha(s, t) = \frac{1}{st} \log \mathbf{E} e^{sCt} = \frac{1}{st} \log e^{sCt} = \frac{sCt}{st} = C$$

Entonces el ancho de banda efectivo requerido por una fuente que envía datos a velocidad constante C, es efectivamente C.

Probaremos ahora otra importante propiedad enunciada en la introducción.

Proposición 2.3 *Para cada $t > 0$ se tiene que:*

$$\frac{\mathbf{E} X_t}{t} \leq \alpha(s, t) \leq \frac{\bar{X}_t}{t} \quad \forall s > 0 \tag{2.2}$$

siendo $\bar{X}_t$ el supremo esencial de la variable X_t, es decir:

$$\bar{X}_t = \text{ínf}\{x : \mathbf{P}(X_t > x) = 0\}$$

Demostración:
La función $\phi(x) = e^{sx}$ es una función convexa para cada $s > 0$, entonces por la desigualdad de Jensen, se tiene que:

$$\mathbf{E} e^{s X_t} = \mathbf{E} \phi(X_t) \geq \phi(\mathbf{E} X_t) = e^{s \mathbf{E} X_t}$$

por lo que:

$$\alpha(s, t) = \frac{1}{st} \log \mathbf{E} e^{s X_t} \geq \frac{1}{st} \log e^{s \mathbf{E} X_t} = \frac{1}{st} s \mathbf{E} X_t = \frac{\mathbf{E} X_t}{t}$$

Para probar la otra desigualdad, observemos que por la definición de $\bar{X}_t$ se cumple que:

$$X_t \leq \bar{X}_t \text{ c.s.} \tag{2.3}$$

ya que

$$\mathbf{P}\left(X_t > \bar{X}_t\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{X_t > \bar{X}_t + \frac{1}{n}\right\}\right) = \lim_n \mathbf{P}\left(X_t > \bar{X}_t + \frac{1}{n}\right) = 0$$

pues $\mathbf{P}\left(X_t > \bar{X}_t + \frac{1}{n}\right) = 0 \; \forall n$. De (2.3) se deduce que:

$$\mathbf{E}e^{sX_t} \leq \mathbf{E}e^{s\bar{X}_t} = e^{s\bar{X}_t}$$

Y por lo tanto:

$$\alpha(s,t) \leq \frac{1}{st}\log e^{s\bar{X}_t} = \frac{\bar{X}_t}{t}$$

■

3. Propiedades

A continuación vamos a probar algunas propiedades generales de la función $\alpha(s,t)$.

Proposición 3.1 *Si* $X_t = \sum\limits_{j=1}^{n} {X_t}^{(j)}$ *donde las variables* $\left\{{X_t}^{(j)}\right\}_{i,j=1,\cdots,n}$ *son independientes, entonces se cumple que:*

$$\alpha(s,t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(s,t)$$

siendo $\alpha(s,t)$ *y* $\alpha_j(s,t)$ *los anchos de banda efectivos de* X_t *y* $X_t^{(j)}$ *respectivamente*

Demostración:

$$\mathbf{E}e^{sX_t} = \mathbf{E}e^{s\left(\sum\limits_{j=1}^{n} {X_t}^{(j)}\right)} = \mathbf{E}\prod_{j=1}^{n} e^{s{X_t}^{(j)}} = \prod_{j=1}^{n}\mathbf{E}e^{s{X_t}^{(j)}}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\alpha(s,t) &= \frac{1}{st}\log \mathbf{E}e^{sX_t} = \frac{1}{st}\log\left(\prod_{j=1}^{n}\mathbf{E}e^{s{X_t}^{(j)}}\right) \\
&= \frac{1}{st}\sum_{j=1}^{n}\log \mathbf{E}e^{s{X_t}^{(j)}} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{st}\log \mathbf{E}e^{s{X_t}^{(j)}} = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j(s,t)
\end{aligned}$$

■

Proposición 3.2 *Para cada t fijo,* $\alpha(s,t)$ *es creciente con s.*

Demostración:
Sean s_1 y s_2 con $0 < s_1 < s_2$, hay que probar que $\alpha(s_1,t) \leq \alpha(s_2,t)$, o lo que es equivalente $\alpha(s_2,t) - \alpha(s_1,t) \geq 0$

$$\begin{aligned}
\alpha(s_2,t) - \alpha(s_1,t) &= \frac{1}{s_2 t}\log \mathbf{E}e^{s_2X_t} - \frac{1}{s_1 t}\log \mathbf{E}e^{s_1X_t} = \\
&= \frac{1}{t}\log\left[\frac{\left(\mathbf{E}e^{s_2X_t}\right)^{\frac{1}{s_2}}}{\left(\mathbf{E}e^{s_1X_t}\right)^{\frac{1}{s_1}}}\right]
\end{aligned}$$

Entonces, para probar que $\alpha(s_2,t)-\alpha(s_1,t)\geq 0$, basta ver que el logaritmo anterior es positivo, es decir:

$$\frac{\left(\mathbf{E}e^{s_2X_t}\right)^{\frac{1}{s_2}}}{\left(\mathbf{E}e^{s_1X_t}\right)^{\frac{1}{s_1}}}\geq 1$$

Como $s_2>0$, alcanza con probar que:

$$\left(\frac{\left(\mathbf{E}e^{s_2X_t}\right)^{\frac{1}{s_2}}}{\left(\mathbf{E}e^{s_1X_t}\right)^{\frac{1}{s_1}}}\right)^{s_2}=\frac{\mathbf{E}e^{s_2X_t}}{\left(\mathbf{E}e^{s_1X_t}\right)^{\frac{s_2}{s_1}}}\geq 1$$

es decir:

$$\left(\mathbf{E}e^{s_1X_t}\right)^{\frac{s_2}{s_1}}\leq \mathbf{E}e^{s_2X_t}$$

La función $\phi(x)=x^{\frac{s_2}{s_1}}$ es convexa pues $s_2>s_1$, entonces aplicando la desigualdad de Jensen se tiene que:

$$\phi\left(\mathbf{E}e^{s_1X_t}\right)\leq \mathbf{E}\phi\left(e^{s_1X_t}\right)$$

Es decir,

$$\left(\mathbf{E}e^{s_1X_t}\right)^{\frac{s_2}{s_1}}\leq \mathbf{E}\left[\left(e^{s_1X_t}\right)^{\frac{s_2}{s_1}}\right]=\mathbf{E}e^{s_2X_t}$$

Lo cual prueba la proposición.

■

Proposición 3.3 *Si existe un variable aleatoria X tal que $X_t=Xt$, $\forall t>0$ y $\mathbf{P}(X\geq 0)=1$, entonces:*

$$\alpha(s,t)=\alpha(st,1)$$

(esto significa que $\alpha(s,t)$ sólo depende del producto st).

Demostración:

$$\alpha(s,t)=\frac{1}{st}\log\mathbf{E}e^{sX_t}=\frac{1}{st}\log\mathbf{E}e^{stX}=\alpha(st,1)$$

Observar que $X_1=1X=X$.

■

Ahora vamos a probar que el comportamiento de $\alpha(s,t)$ cerca de $s=0$ está determinado principalmente por la esperanza y la varianza de X_t, mientras que el comportamiento cerca de $s=\infty$ está relacionado con la distribución de X_t cerca de $\bar{X}_t$ (es decir cerca de su supremo esencial)

Proposición 3.4 *Si $\alpha(s,t)<\infty$ para algún $s>0$ entonces para cada t:*

$$\alpha(s,t)=\frac{\mathbf{E}X_t}{t}+\frac{s}{2t}\mathbf{Var}X_t+o(s)\quad (s\to 0) \tag{3.1}$$

Si $\alpha(s,t)$ está acotado cuando $s\to\infty$ y $\mathbf{P}\left(X_t=\bar{X}_t\right)>0$ entonces para cada t:

$$\alpha(s,t)=\frac{\bar{X}_t}{t}+\frac{1}{st}\log\mathbf{P}\left(X_t=\bar{X}_t\right)+o\left(\frac{1}{s}\right)\quad (s\to\infty) \tag{3.2}$$

Demostración:
Como probamos que $\alpha(s,t)$ es creciente con s si $\alpha(s_0,t) < \infty$ para algún $s_0 > 0$, entonces $\alpha(s',t) < \infty\ \forall s' < s_0$. Por lo tanto vale que:

$$\mathbf{E}e^{sX_t} = 1 + s\mathbf{E}X_t + \frac{s^2\mathbf{E}X_t^2}{2} + \ldots + \frac{s^n\mathbf{E}X_t^n}{n!} + \ldots$$

en todos los s tales que $\mathbf{E}e^{sX_t} < \infty$. En particular

$$\mathbf{E}e^{sX_t} = 1 + s\mathbf{E}X_t + \frac{s^2\mathbf{E}X_t^2}{2} + o(s^2)$$

Además sabemos que:

$$\log(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \quad \text{si } |u| < 1$$

Entonces para probar 3.1, tomemos s suficientemente pequeño tal que $|\mathbf{E}e^{sX_t} - 1| < 1$ (esto es posible pues $\mathbf{E}e^{sX_t}$ es continua y en $s = 0$ vale 1). En este caso se tiene que:

$$\log \mathbf{E}e^{sX_t} = \log\left[1 + \left(\mathbf{E}e^{sX_t} - 1\right)\right] = \log\left[1 + \left(s\mathbf{E}X_t + \frac{s^2\mathbf{E}X_t^2}{2} + o(s^2)\right)\right]$$

Sea $u = s\mathbf{E}X_t + \dfrac{s^2\mathbf{E}X_t^2}{2} + o(s^2)$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} u^2 &= \left(s\mathbf{E}X_t + \frac{s^2\mathbf{E}X_t^2}{2} + o(s^2)\right)^2 \\ &= s^2(\mathbf{E}X_t)^2 + \frac{s^4}{4}(\mathbf{E}X_t^2)^2 + o(s^2)^2 + s^3\mathbf{E}X_t\mathbf{E}X_t^2 + 2s\left(\mathbf{E}X_t\right)o(s^2) + s^2\left(\mathbf{E}X_t^2\right)o(s^2) \\ &= s^2(\mathbf{E}X_t)^2 + o(s^2) \end{aligned}$$

Además es claro que $o(u^2) = o(s^2)$. Entonces utilizando el desarrollo del logaritmo, resulta que:

$$\begin{aligned} \log \mathbf{E}e^{sX_t} &= s\mathbf{E}X_t + \frac{s^2\mathbf{E}X_t^2}{2} + o(s^2) - \frac{1}{2}\left(s^2(\mathbf{E}X_t)^2 + o(s^2)\right) + o(s^2) \\ &= s\mathbf{E}X_t + \frac{s^2}{2}\left(\mathbf{E}X_t^2 - (\mathbf{E}X_t)^2\right) + 2o(s^2) - \frac{o(s^2)}{2} \\ &= s\mathbf{E}X_t + \frac{s^2}{2}\mathbf{Var}(X_t) + o(s^2) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \alpha(s,t) &= \frac{1}{st}\log \mathbf{E}e^{sX_t} = \frac{1}{st}\left(s\mathbf{E}X_t + \frac{s^2}{2}\mathbf{Var}(X_t) + o(s^2)\right) \\ &= \frac{\mathbf{E}X_t}{t} + \frac{s}{2t}\mathbf{Var}X_t + o(s) \end{aligned}$$

lo que prueba la primera parte de la proposición. Para probar 3.2, hay que probar que:

$$s\left(\alpha\left(s,t\right) - \frac{\bar{X}_t}{t} - \frac{1}{st}\log \mathbf{P}(X_t = \bar{X}_t)\right) \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.3}$$

o equivalentemente

$$s\left(\alpha\left(s,t\right) - \frac{\bar{X}_t}{t}\right) \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{t}\log \mathbf{P}(X_t = \bar{X}_t) \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
s\left(\alpha(s,t)-\frac{\bar{X}_t}{t}\right) &= s\left(\frac{1}{st}\log \mathbf{E}e^{sX_t}-\frac{\bar{X}_t}{t}\right)=\frac{1}{t}\log \mathbf{E}e^{sX_t}-\frac{s\bar{X}_t}{t}\\
&= \frac{1}{t}\log \mathbf{E}e^{sX_t}-\frac{1}{t}\log\left(e^{s\bar{X}_t}\right)\\
&= \frac{1}{t}\log\left[\left(\mathbf{E}e^{sX_t}\right)e^{-s\bar{X}_t}\right]=\frac{1}{t}\log \mathbf{E}\left[e^{sX_t}e^{-s\bar{X}_t}\right]\\
&= \frac{1}{t}\log \mathbf{E}\left[e^{sX_t-s\bar{X}_t}\right]=\frac{1}{t}\log \mathbf{E}\left[e^{s\left(X_t-\bar{X}_t\right)}\right]\\
&= \frac{1}{t}\log \mathbf{E}\left[e^{s\left(X_t-\bar{X}_t\right)}\mathbf{1}_{\left\{X_t\le \bar{X}_t\right\}}\right]
\end{aligned}$$

Dado $\omega\in\Omega$ tenemos tres casos:

$$\begin{aligned}
X_t(\omega) &> \bar{X}_t \Rightarrow e^{s\left(X_t-\bar{X}_t\right)}\mathbf{1}_{\left\{X_t\le \bar{X}_t\right\}}(\omega)=0=\mathbf{1}_{\left\{X_t= \bar{X}_t\right\}}(\omega) \quad \forall s\\
X_t(\omega) &< \bar{X}_t \Rightarrow e^{s\left(X_t-\bar{X}_t\right)}\mathbf{1}_{\left\{X_t\le \bar{X}_t\right\}}(\omega)\underset{s\to\infty}{\longrightarrow}0=\mathbf{1}_{\left\{X_t= \bar{X}_t\right\}}(\omega)\\
X_t(\omega) &= \bar{X}_t \Rightarrow e^{s\left(X_t-\bar{X}_t\right)}\mathbf{1}_{\left\{X_t\le \bar{X}_t\right\}}(\omega)=1=\mathbf{1}_{\left\{X_t= \bar{X}_t\right\}}(\omega) \quad \forall s
\end{aligned}$$

Con lo cual, se tiene que:

$$e^{s\left(X_t-\bar{X}_t\right)}\mathbf{1}_{\left\{X_t\le \bar{X}_t\right\}}\underset{s\to\infty}{\longrightarrow}\mathbf{1}_{\left\{X_t= \bar{X}_t\right\}}$$

Y por convergencia dominada:

$$\mathbf{E}\left[e^{s\left(X_t-\bar{X}_t\right)}\mathbf{1}_{\left\{X_t\le \bar{X}_t\right\}}\right]\underset{s\to\infty}{\longrightarrow}\mathbf{E}\mathbf{1}_{\left\{X_t= \bar{X}_t\right\}}=\mathbf{P}(X_t=\bar{X}_t)$$

Entonces:

$$\frac{1}{t}\log \mathbf{E}\left[e^{s(X_t-\bar{X}_t)}\mathbf{1}_{\left\{X_t\le \bar{X}_t\right\}}\right]\underset{s\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{t}\log \mathbf{P}(X_t=\bar{X}_t)$$

Lo que prueba 3.4 y por lo tanto 3.2

■

Corolario 3.5 *De la proposición anterior se deduce que:*

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0}\alpha(s,t) &= \frac{\mathbf{E}X_t}{t}\overset{def}{=}\alpha(0,t)\\
\lim_{s\to\infty}\alpha(s,t) &= \frac{\bar{X}_t}{t}\overset{def}{=}\alpha(\infty,t)
\end{aligned}$$

Para terminar, vamos a ver que sucede si X_t además de tener incrementos estacionarios, tiene incrementos independientes.

Proposición 3.6 *Si X_t tiene incrementos independientes, entonces $\alpha(s,t)$ no depende de t.*

Demostración:
Se considera primero $m\in\mathbb{N}$ cualquiera; entonces dados s y t se tiene que:

$$\mathbf{E}e^{sX_{mt}} = \mathbf{E}e^{s\left(\sum_{k=1}^{m}X_{kt}-X_{(k-1)t}\right)}=\mathbf{E}\left[\prod_{k=1}^{m}e^{s(X_{kt}-X_{(k-1)t})}\right]=\prod_{k=1}^{m}\mathbf{E}e^{s(X_{kt}-X_{(k-1)t})}$$

Por ser un proceso de incrementos estacionarios, X_t y $X_{kt}-X_{(k-1)t}$ tienen la misma distribución $\forall k=1,\ldots,m$; entonces

$$\mathbf{E}e^{sX_{mt}}=\prod_{k=1}^{m}\mathbf{E}e^{sX_t}=\left(\mathbf{E}e^{sX_t}\right)^m$$

Por lo tanto:

$$\alpha(s,mt)=\frac{1}{smt}\log\mathbf{E}e^{sX_{mt}}=\frac{1}{smt}\log\left(\mathbf{E}e^{sX_t}\right)^m=\frac{1}{st}\log\mathbf{E}e^{sX_t}=\alpha(s,t) \tag{3.5}$$

En particular, para $t=1$:

$$\alpha\left(s,m\right)=\alpha\left(s,1\right)\quad\forall m\in\mathbb{N}$$

Sea ahora $t=\frac{p}{q}$ racional ($p,q\in\mathbb{N}$), entonces usando 3.5 resulta que:

$$\alpha\left(s,\frac{p}{q}\right)=\alpha\left(s,q\frac{p}{q}\right)=\alpha(s,p)=\alpha(s,1)$$

Es decir, $\alpha(s,t)=\alpha(s,1)\ \forall t\in\mathbb{Q}$. Sea ahora $t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; para los procesos con incrementos estacionarios e independientes se prueba que $\mathbf{P}\left(\{\omega: X_t\left(\omega\right) \text{ discontinua en } t\}\right)=0$. Por lo tanto:

$$\mathbf{E}e^{sX_t}=\mathbf{E}\left(e^{sX_t}\mathbf{1}_{\{X_t \text{ cont. en } t\}}\right)=\mathbf{E}\left(\lim_n e^{sX_{t_n}}\mathbf{1}_{\{X_t \text{ cont. en } t\}}\right)$$

donde t_n es una sucesión de racionales que crece hacia t. Como $s>0$, la convergencia es monótona y se puede intercambiar límite con esperanza para obtener:

$$\mathbf{E}e^{sX_t}=\lim_n\mathbf{E}\left(e^{sX_{t_n}}\mathbf{1}_{\{X_t \text{ cont. en } t\}}\right)=\lim_n\mathbf{E}\left(e^{sX_{t_n}}\right)$$

es decir:

$$\alpha\left(s,t\right)=\frac{1}{st}\log\mathbf{E}e^{sX_t}=\lim_n\frac{1}{st_n}\log\mathbf{E}e^{sX_{t_n}}=\lim_n\alpha\left(s,t_n\right)=\alpha\left(s,1\right)$$

ya que los t_n son racionales. Resulta entonces que $\alpha(s,t)=\alpha(s,1)\forall\ t\geq 0$

■

4. Ejemplos

En esta sección vamos a calcular explícitamente el ancho de banda efectivo suponiendo distintas distribuciones de los procesos X_t.

4.1. Flujo de velocidad aleatoria

Se vio en la sección 2, que si $X_t=Ct$ (flujo de velocidad constante), entonces $\alpha(s,t)=C$. Una generalización de este ejemplo es considerar $X_t=Xt$ con X variable aleatoria tal que $\mathbf{P}(X\geq 0)=1$ (vimos también que en este caso $\alpha(s,t)=\alpha(st,1)$). Sea por ejemplo $X\sim\exp(\lambda)$, entonces calculando:

$$\mathbf{E}e^{sX_t}=\mathbf{E}e^{stX}=\int_0^{+\infty}e^{stx}\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\int_0^{+\infty}e^{(st-\lambda)x}dx=\frac{\lambda}{\lambda-st}$$

en la región $s,t\geq 0$ y $st\leq\lambda$; resulta que:

$$\alpha(s,t)=\frac{1}{st}\log\mathbf{E}e^{sX_t}=\frac{1}{st}\log\left(\frac{\lambda}{\lambda-st}\right) \tag{4.1}$$

que efectivamente depende sólo del producto st.

4.2. Proceso de Poisson

Sea X_t un proceso de Poisson, es decir:

$$X_t = \text{máx}\{k : T_1 + \ldots + T_k \leq t\}$$

donde $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *iid* $\sim \exp(\lambda)$. Se sabe además que la distribución de X_t es:

$$\mathbf{P}(X_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \quad k \in \mathbb{N}$$

El modelo corresponde a la llegada de una unidad de trabajo al final de cada una de las exponenciales T_n. Calculando:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}e^{sX_t} &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{sk}\mathbf{P}(X_t = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{sk}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \\
&= e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(e^s\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t}e^{e^s\lambda t} = e^{\lambda t(e^s-1)}
\end{aligned}$$

se tiene que:

$$\alpha(s,t) = \frac{1}{st}\log\mathbf{E}e^{sX_t} = \frac{1}{st}\log e^{\lambda t(e^s-1)} = \frac{1}{st}\left(\lambda t\left(e^s-1\right)\right) = \lambda\frac{(e^s-1)}{s} \tag{4.2}$$

Podemos generalizar el modelo a la llegada de b unidades de trabajo al final de cada exponencial; en este caso se tendría $Y_t = bX_t$ con X_t como antes. En este caso:

$$\mathbf{E}e^{sY_t} = \mathbf{E}e^{sbX_t} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{sbk}\mathbf{P}(X_t = k) = e^{\lambda t\left(e^{sb}-1\right)}$$

Entonces:

$$\alpha(s,t) = \frac{1}{st}\log\mathbf{E}e^{sY_t} = \lambda\frac{\left(e^{sb}-1\right)}{s} \tag{4.3}$$

Si la cantidad de trabajo en cada arribo también es aleatoria, se obtiene un *proceso de Poisson compuesto*. En este caso se tiene una sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *iid* con distribución exponencial de parámetro λ y una sucesión $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también *iid* con distribución F e independiente de las $\{T_n\}$. En este caso el proceso de entrada es:

$$Y_t = \sum_{k=1}^{X_t} W_k$$

siendo X_t el número de llegadas antes de t. Este es un proceso de incrementos estacionarios e independientes, por lo que el ancho de banda efectivo no depende de t. Calculando:

$$e^{sY_t} = e^{s\sum\limits_{k=1}^{X_t} W_k} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{s\sum\limits_{k=1}^{n} W_k}\mathbf{1}_{\{X_t=n\}} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N} e^{s\sum\limits_{k=1}^{n} W_k}\mathbf{1}_{\{X_t=n\}}$$

donde la última convergencia es monótona y por lo tanto:

$$\mathbf{E}e^{sY_t} = \mathbf{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{sY_t}\mathbf{1}_{\{X_t=n\}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}\left(e^{s\sum\limits_{k=1}^{n} W_k}\mathbf{1}_{\{X_t=n\}}\right)$$

Por la independencia de W_n y X_t, se tiene que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\left(e^{s\sum_{k=1}^{n} W_k} \mathbf{1}_{\{X_t=n\}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\left(e^{s\sum_{k=1}^{n} W_k}\right) \mathbf{P}(X_t = n)$$

Donde:

$$\mathbf{E}\left(e^{s\sum_{k=1}^{n} W_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E}e^{sW_k} = \left(\mathbf{E}e^{sW_1}\right)^n \quad \text{y}$$

$$\mathbf{P}(X_t = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Resulta entonces que:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}e^{sY_t} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\left(e^{s\sum_{k=1}^{n} W_k} \mathbf{1}_{\{X_t=n\}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathbf{E}e^{sW_1}\right)^n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathbf{E}e^{sW_1}\right)^n \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t\left(\mathbf{E}e^{sW_1}\right)} = e^{\lambda t\left(\mathbf{E}e^{sW_1}-1\right)} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \alpha(s,t) &= \frac{1}{st}\log \mathbf{E}e^{sY_t} = \frac{1}{st}\log e^{\lambda t\left(\mathbf{E}e^{sW_1}-1\right)} \\ &= \frac{1}{st}\lambda t\left(\mathbf{E}e^{sW_1}-1\right) = \frac{\lambda}{s}\left(\mathbf{E}e^{sW_1}-1\right) \end{aligned}$$

Es decir:

$$\alpha(s,t) = \frac{\lambda}{s}\left(\mathbf{E}e^{sW_1}-1\right) \tag{4.4}$$

Observar que los casos anteriores, son casos particulares de lo anterior tomando $W_n = 1$ o $W_n = b \ \forall n$. Además en el caso particular de que $W_k \sim \exp(\mu)$, usando el cálculo realizado en 4.1 se tiene que:

$$\alpha(s,t) = \frac{\lambda}{\mu - s} \tag{4.5}$$

4.3. Fuentes periódicas

Una fuente periódica es una fuente que envía b unidades de trabajo cada d unidades de tiempo. Se define el proceso como:

$$X_t = b \max\{n \geq 1 : Ud + (n-1)d \leq t\} \tag{4.6}$$

donde la variable U tiene distribución uniforme en $[0,1]$. El tiempo T_n de la n-ésima llegada está dado por:

$$T_n = Ud + (n-1)d$$

que tiene distribución uniforme en el intervalo $[(n-1)d, nd]$. En particular T_1 tiene distribución uniforme en $[0,1]$. Calculemos ahora la distribución de X_t:

$$\mathbf{P}(X_t = kb) = \mathbf{P}(\max\{n \geq 1 : Ud + (n-1)d \leq t\} = k)$$

Donde,

$$\max\{n \geq 1 : Ud + (n-1)d \leq t\} = k \quad sii \quad Ud+(k-1)d \leq t y Ud+kd > t \quad sii \quad Ud+kd \in (t, t+d]$$

Entonces,

$$\mathbf{P}(X_t = kb) = \mathbf{P}(Ud + kd \in (t, t+d]) = \frac{long\left((t, t+d] \cap [kd, (k+1)d]\right)}{d}$$

pues $Ud + kd$ tiene distribución uniforme en $[kd, (k+1)d]$. Por lo tanto,

$$\mathbf{P}(X_t = kb) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < \frac{t}{d} - 1 \\ -\frac{t}{d} + (k+1) & \text{si } k \in (\frac{t}{d} - 1, \frac{t}{d}) \quad \text{si } k = \left[\frac{t}{d}\right] \\ \frac{t}{d} - (k-1) & \text{si } k \in (\frac{t}{d}, \frac{t}{d} + 1) \quad \text{si } k = \left[\frac{t}{d}\right] + 1 \\ 0 & \text{si } k > \frac{t}{d} + 1 \end{cases}$$

Es decir, que X_t toma casi seguramente los valores $\left[\frac{t}{d}\right] b$ o $\left(\left[\frac{t}{d}\right] + 1\right) b$ con las siguientes probabilidades:

$$\mathbf{P}\left(X_t = \left[\frac{t}{d}\right] b\right) = -\frac{t}{d} + (\left[\frac{t}{d}\right] + 1) = 1 - \left(\frac{t}{d} - \left[\frac{t}{d}\right]\right)$$

$$\mathbf{P}\left(X_t = \left(\left[\frac{t}{d}\right] + 1\right) b\right) = \frac{t}{d} - \left(\left[\frac{t}{d}\right] + 1\right) - 1 = \frac{t}{d} - \left[\frac{t}{d}\right]$$

Entonces;

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}e^{sX_t} &= e^{s\left[\frac{t}{d}\right]b}\mathbf{P}\left(X_t = \left[\frac{t}{d}\right] b\right) + e^{s\left(\left[\frac{t}{d}\right]+1\right)b}\mathbf{P}\left(X_t = (\left[\frac{t}{d}\right] + 1)b\right) \\
&= e^{s\left[\frac{t}{d}\right]b}\left(1 - \left(\frac{t}{d} - \left[\frac{t}{d}\right]\right)\right) + e^{s\left(\left[\frac{t}{d}\right]+1\right)b}\left(\frac{t}{d} - \left[\frac{t}{d}\right]\right) \\
&= e^{s\left[\frac{t}{d}\right]b}\left[\left(1 - \left(\frac{t}{d} - \left[\frac{t}{d}\right]\right)\right) + e^{sb}\left(\frac{t}{d} - \left[\frac{t}{d}\right]\right)\right] \\
&= e^{s\left[\frac{t}{d}\right]b}\left[\left(\frac{t}{d} - \left[\frac{t}{d}\right]\right)(e^{sb} - 1) + 1\right]
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\log \mathbf{E}e^{sX_t} &= \log\left(e^{s\left[\frac{t}{d}\right]b}\left[\left(\frac{t}{d} - \left[\frac{t}{d}\right]\right)(e^{sb} - 1) + 1\right]\right) \\
&= s\left[\frac{t}{d}\right] b + \log\left(1 + (e^{sb} - 1)\left(\frac{t}{d} - \left[\frac{t}{d}\right]\right)\right)
\end{aligned}$$

De donde

$$\alpha(s,t) = \left[\frac{t}{d}\right]\frac{b}{t} + \frac{1}{st}\log\left(1 + (e^{sb} - 1)\left(\frac{t}{d} - \left[\frac{t}{d}\right]\right)\right) \tag{4.7}$$

Además se cumple que

$$\lim_{t \to 0} \alpha(s,t) = \frac{e^{sb} - 1}{sd}$$

4.4. Proceso de conteo generalizado

Sea $\{\Delta T_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias tales que $\mathbf{P}(\Delta T_n > 0) = 1 \; \forall n$. Definimos las variables $T_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta T_k$ y $T_0 = 0$. Se tiene entonces que $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \ldots$ con probabilidad 1. Las variables T_n para $n \geq 1$ representan los tiempos de llegada de trabajo. Definimos el *proceso de conteo* como:

$$N_t = \max\{k : T_k \leq t\}$$

es decir, la "cantidad de llegadas hasta el tiempo t" donde los tiempos entre llegadas están dados por las variables $\{\Delta T_n\}$. Observemos que este proceso tiene, con probabilidad 1, trayectorias crecientes, constantes a tramos y saltos de alto 1. Consideremos también una sucesión $\{W_n\}_{n\geq 1}$ de variables aleatorias *iid* que representan los trabajos recibidos en cada T_n. Supondremos además que las variables $\{W_n\}$ son independientes de las $\{\Delta T_n\}$. Por lo tanto, las variables $\{W_n\}$ son independientes del proceso N_t que es función de las $\{\Delta T_n\}$. La cantidad de trabajo acumulado hasta t es:

$$X_t = \sum_{k=0}^{N_t} W_k$$

con la convención $W_0 = 0$.

Observación 4.1 *Si elegimos* ΔT_n iid $\sim \exp(\lambda)$*, entonces* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta T_k \sim \Gamma(n, \lambda)$ *(distribución de Erlang) y* N_t *es el proceso de Poisson compuesto visto en la sección 4.2. Si en cambio elegimos* $\Delta T_1 = Ud$ *con* d *fijo y* $U \sim U[0,1]$*, y tomamos* $\Delta T_n = d \ \forall n \geq 2$*, entonces tenemos el proceso de llegadas correspondiente a la fuente periódica visto en la sección 4.3.*

Calculemos ahora el ancho de banda efectivo. En primer lugar:

$$e^{sX_t} = e^{s\sum_{k=0}^{N_t} W_k} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{s\sum_{k=0}^{n} W_k} \mathbf{1}_{\{N_t = n\}} = \lim_N \sum_{n=0}^{N} e^{s\sum_{k=0}^{n} W_k} \mathbf{1}_{\{N_t = n\}}$$

donde la última convergencia es monótona. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}e^{sX_t} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}e^{s\sum_{k=0}^{n} W_k} \mathbf{1}_{\{N_t = n\}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}e^{s\sum_{k=0}^{n} W_k} \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{N_t = n\}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}e^{s\sum_{k=0}^{n} W_k} \mathbf{P}(N_t = n) \end{aligned}$$

donde hemos usado la independencia de las W_k y N_t. Se tiene también que:

$$\mathbf{E}\left(e^{s\sum_{k=0}^{n} W_k}\right) = \mathbf{E}\left(\prod_{k=0}^{n} e^{sW_k}\right) = \prod_{k=0}^{n} \mathbf{E}e^{sW_k}$$

por la independencia de las W_k. Ahora $e^{sW_0} = 1$ casi seguramente, por lo que $\mathbf{E}e^{sW_0} = 1$. Las restantes variables son *iid* por lo que:

$$\mathbf{E}\left(e^{s\sum_{k=0}^{n} W_k}\right) = \left(\mathbf{E}e^{sW}\right)^n$$

donde W representa una variable W_k arbitraria. El ancho de banda efectivo resulta entonces:

$$\alpha(s,t) = \frac{1}{st} \log \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(N_t = n) \left(\mathbf{E}e^{sW}\right)^n$$

que puede escribirse como:

$$\alpha(s,t) = \frac{1}{st}\log\left(g_t\left(\mathbf{E}e^{sW}\right)\right) \tag{4.8}$$

siendo g_t la denominada *función generatriz de probabilidades* de N_t definida por:

$$g_t(x) = \mathbf{E}\left[x^{N_t}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \mathbf{P}(N_t = n)$$

Observación 4.2 *Si N_t es un proceso de Poisson de parámetro λ, entonces*

$$g_t(x) = e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\lambda t)^n}{n!} = e^{\lambda t(x-1)}$$

por lo que sustituyendo resulta:

$$\alpha(s,t) = \frac{\lambda}{s}\left(\mathbf{E}e^{sW} - 1\right)$$

y recuperamos el resultado visto en la sección 4.2. Si en cambio N_t es el de una fuente periódica (tomando $d = 1$ para simplificar), entonces $g_t(x)$ queda:

$$g_t(x) = x^{[t]}\left(1 - (t - [t])\right) + x^{[t]+1}\left(t - [t]\right)$$

Si además los trabajos son constantes, $W_k = b\ \forall k \geq 1$, entonces $\mathbf{E}e^{sW} = e^{sb}$ por lo que el ancho de banda queda:

$$\begin{aligned}\alpha(s,t) &= \frac{1}{st}\log\left(e^{sb[t]}\left(1 - (t - [t])\right) + e^{sb([t]+1)}\left(t - [t]\right)\right) = \\ &= \frac{b}{t}[t] + \frac{1}{st}\log\left(1 + (t - [t])\left(e^{sb} - 1\right)\right)\end{aligned}$$

recuperando también el resultado visto en la sección 4.3.

Observación 4.3 *Lo destacable de la fórmula 4.8 es que separa claramente cómo afecta el proceso de conteo y cómo afectan las variables de trabajo al ancho de banda efectivo. Por ejemplo, si en la fuente periódica consideramos trabajos aleatorios, sólo hay que cambiar e^{sb} por $\mathbf{E}e^{sW}$ en el argumento de g_t.*

4.5. Fuente gaussiana

Sea $X_t = \lambda t + \sigma W_t$ donde W_t es un proceso de Wiener. W_t es un proceso de incrementos estacionarios e independientes tal que $W_t \sim N(0,t)$.
Se tiene entonces que $X_t \sim N(\lambda t, \sigma^2 t)$ y por lo tanto:

$$\mathbf{E}e^{sX_t} = \mathbf{E}e^{s(\lambda t + \sigma W_t)} = e^{s\lambda t}\mathbf{E}e^{s\sigma W_t}$$

Ahora bien, como $W_t \sim N(0,t) \Rightarrow \frac{W_t}{\sqrt{t}} = Z_t \sim N(0,1)$ se tiene que:

$$\mathbf{E}e^{sX_t} = e^{s\lambda t}\mathbf{E}e^{s\sigma\sqrt{t}Z_t}$$

Con lo cual resulta que:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}e^{sX_t} &= \frac{e^{s\lambda t}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s\sigma\sqrt{t}x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{e^{s\lambda t}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2s\sigma\sqrt{t}x)}dx \\ &= e^{s\lambda t + \frac{1}{2}s^2\sigma^2 t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x - s\sigma\sqrt{t})^2}dx = e^{s\lambda t + \frac{1}{2}s^2\sigma^2 t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \\ &= e^{s\lambda t + \frac{1}{2}s^2\sigma^2 t}\end{aligned}$$

Entonces

$$\alpha(s,t) = \frac{1}{st}\log \mathbf{E}e^{sX_t} = \frac{1}{st}\log e^{s\lambda t + \frac{1}{2}s^2\sigma^2 t} = \frac{1}{st}\left(s\lambda t + \frac{1}{2}s^2\sigma^2 t\right)$$

Por lo tanto:

$$\alpha(s,t) = \lambda + \frac{\sigma^2}{2}s \tag{4.9}$$

El ancho de banda efectivo no depende de t porque como vimos, el proceso es de incrementos independientes. Además es lineal en s y verifica el desarrollo visto en 3.1.

5. Probabilidad de Pérdida

En la introducción afirmamos que, dada una cierta calidad de servicio requerida (probabilidad de pérdida, retardo en el tiempo de procesamiento etc.) la cantidad de recursos que deberán reservarse para cada conexión está en algún lugar entre la tasa media y la tasa máxima de dicha conexión. Probamos en la sección anterior que la función que definimos como ancho de banda efectivo, efectivamente está en algún lugar entre la tasa media y la tasa máxima de dicha conexión. En esta sección vamos a estudiar la relación entre la probabilidad de pérdida y el ancho de banda efectivo en el caso particular de que el trabajo total que recibe el sistema es suma de procesos independientes e idénticamente distribuidos. Para esto vamos a utilizar elementos de la Teoría de Grandes Desviaciones.

Consideremos entonces un sistema multiplexor como el descrito en la introducción donde el trabajo llega desde muchas fuentes que suponemos independientes pero similares. Más formalmente, sea $X_t^{(j)}$ una sucesión de procesos estocásticos independientes, con distribución igual a la de un cierto proceso $\{\mathbf{X_t}\}$ (como siempre el proceso $\mathbf{X}_t$ es un proceso de incrementos estacionarios, con $\mathbf{X}_0 = 0$, que representa el trabajo acumulado que se recibe desde cada fuente). Entonces, el trabajo total que recibe el sistema es:

$$X_t = \sum_{j=1}^{n} X_t^{(j)} \quad t \geq 0 \tag{5.1}$$

Y la cantidad de trabajo del sistema con n fuentes en estado estacionario se puede expresar como:

$$W_t^{(n)} = X_t - Ct = \sum_{j=1}^{n}\left(X_t^{(j)} - ct\right) \tag{5.2}$$

donde c es la capacidad por fuente del servidor y C es la capacidad total. Considerando además que el tamaño de la cola es:

$$Q_n = \sup_{t\geq 0} W_t^{(n)}$$

buscaremos una estimación para $\mathbf{P}(Q_n > B) = \mathbf{P}(Q_n > nb)$ donde b es el tamaño de *buffer* disponible por fuente y B es el tamaño total del *buffer*. Esta cantidad da una idea del valor de la probabilidad de que el sistema supere su capacidad de almacenamiento y por lo tanto haya pérdida de datos.

5.1. Grandes Desviaciones

Vamos a utilizar, sin demostrar, el siguiente teorema que proporciona un principio de grandes desviaciones para variables aleatorias *iid*.

Teorema 5.1 (Cramér) *Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ el promedio de dichas variables. Sea μ_n la medida inducida en $\mathbb{R}$ por la variable aleatoria $\bar{X}_n$, es decir $\mu_n(B) = \mathbf{P}(\bar{X}_n \in B)$. Se cumple entonces que la familia $\{\mu_n\}$ satisface el siguiente principio de grandes desviaciones:*

$$-\inf_{x\in\Gamma^0} \Lambda^*(x) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{n} \log \mu_n(\Gamma) \leq \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n} \log \mu_n(\Gamma) \leq -\inf_{x\in\bar{\Gamma}} \Lambda^*(x) \tag{5.3}$$

donde Γ es un boreliano en $\mathbb{R}$, $\Lambda^*(x) = \sup_{s\in\mathbb{R}}\{sx - \Lambda(s)\}$ y $\Lambda(s) = \log \mathbf{E}e^{sX_j}$ es la función generatriz de momentos logarítmica común a las X_j y se denomina función de velocidad.

Aplicando este resultado a las variables $W_t^{(n)}$ definidas antes, se obtiene la siguiente proposición:

Proposición 5.2 *Sea $W_t^{(n)}$ definida como en 5.2 con t fijo. La sucesión $\frac{1}{n}W_t^{(n)}$ verifica un principio de grandes desviaciones con función de velocidad $\Lambda_t^*(x) = \sup_{s\geq 0}\left\{s(x+ct) - \log \mathbf{E}e^{s\mathbf{X_t}}\right\}$. En particular, si $b + ct > \mathbf{EX_t}$ se cumple que:*

$$-\Lambda_t^*(b^+) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(W_t^{(n)} > nb) \leq \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(W_t^{(n)} > nb) \leq -\Lambda_t^*(b) \tag{5.4}$$

Demostración:
La demostración consiste en aplicar el teorema de Cramér e identificar los términos que aparecen en la ecuación 5.3. Sabemos que $W_t^n = \sum_{j=1}^{n} Y_t^{(j)}$ donde $Y_t^{(j)} = \left(X_t^{(j)} - ct\right)$ es una sucesión de v.a. *iid*, pues las variables $X_t^{(j)}$ son copias independientes de la variable $\mathbf{X_t}$. Entonces aplicando el teorema de Cramér a las variables $Y_t^{(n)}$ (con t fijo) y observando que $\bar{Y}_t^n = \frac{1}{n}W_t^n$, se tiene que:

$$-\inf_{x\in\Gamma^0} \Lambda^*(x) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(\frac{1}{n}W_t^n \in \Gamma) \leq \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(\frac{1}{n}W_t^n \in \Gamma) \leq -\inf_{x\in\bar{\Gamma}} \Lambda^*(x) \tag{5.5}$$

Se puede probar además que si $\Lambda(s) = \log \mathbf{E}e^{sY_t} < \infty$ para algún $s > 0$ entonces $\mathbf{E}Y_t < \infty$ y $\forall x \geq \mathbf{E}Y_t$, $\Lambda^*(x)$ se escribe como $\Lambda^*(x) = \sup_{s\geq 0}\{sx - \Lambda(s)\}$ y es no decreciente en $x > \mathbf{E}Y_t$. Entonces tomando $\Gamma = (b, +\infty)$ con $b > \mathbf{E}Y_t = \mathbf{EX_t} - ct$, se tiene que:

$$\inf_{x\in\bar{\Gamma}} \Lambda_t^*(x) = \inf_{x\geq b} \Lambda_t^*(x) = \Lambda_t^*(b) \tag{5.6}$$

$$\inf_{x\in\Gamma^\circ} \Lambda_t^*(x) = \inf_{x> b} \Lambda_t^*(x) = \Lambda_t^*\left(b^+\right) \tag{5.7}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Lambda_t^*(x) &= \sup_{s\geq 0}\{sx - \Lambda(s)\} = \sup_{s\geq 0}\left\{sx - \log \mathbf{E}e^{sY_t}\right\} = \sup_{s\geq 0}\left\{sx - \log \mathbf{E}e^{s(\mathbf{X_t}-ct)}\right\} \\
&= \sup_{s\geq 0}\left\{sx - sct \log \mathbf{E}e^{s\mathbf{X_t}}\right\} = \sup_{s\geq 0}\left\{s(x+ct) - \log \mathbf{E}e^{s\mathbf{X_t}}\right\}
\end{aligned}$$

Sustituyendo 5.6 y 5.7 en 5.5 y observando que $\mathbf{P}(\frac{1}{n}W_t^n \in \Gamma) = \mathbf{P}(W_t^n > nb)$ se obtiene el resultado enunciado.

■

Corolario 5.3 *En las hipótesis de la proposición anterior, si $\Lambda_t^*(x)$ es continua en b, se tiene que:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(W_t^{(n)} > nb) = -\Lambda_t^*(b) = -\sup_{s>0} \left\{ s(b+ct) - \log \mathbf{E} e^{sX_t} \right\}$$

5.2. Estimación de la probabilidad de pérdida

Veamos entonces la relación entre la probabilidad de pérdida y el ancho de banda efectivo.

Teorema 5.4 *Sea $W_t^{(n)}$ definido como en 5.2 y sea $Q_n = \sup_{t\geq 0} W_t^{(n)}$ el tamaño de la cola en estado estacionario del sistema. Supongamos que:*

1. $\exists s_0 > 0 : \alpha(s_0, t) \leq c' < c \;\forall t \geq t_0$
2. $\lim_{\epsilon\to 0} \sup \log \mathbf{E} e^{sX_{t,\epsilon}^n} = 0 \;\forall s > 0$ *donde* $X_{t,\epsilon}^n = \sup_{0\leq t\leq \epsilon} X_t^n$

Entonces, se cumple que:

$$-I(b^+) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(Q_n > nb) \leq \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(Q_n > nb) \leq -I(b) \tag{5.8}$$

donde

$$I(x) = \inf_{t\geq 0} \sup_{s\geq 0} \left\{ s\,(x+ct) - \log \mathbf{E} e^{s\mathbf{X_t}} \right\}$$

Demostración:
Vamos a probar primero la desigualdad de la izquierda de la ecuación 5.8. Observemos que,

$$\mathbf{P}(Q_n > nb) = \mathbf{P}(\sup_{t\geq 0} W_t^{(n)} > nb) \geq \mathbf{P}(W_\tau^{(n)} > nb) \quad \forall \tau \geq 0$$

Entonces tomado supremo en τ se tiene que,

$$\mathbf{P}(Q_n > nb) \geq \sup_{\tau\geq 0} \mathbf{P}(W_\tau^{(n)} > nb)$$

Y entonces,

$$\frac{1}{n} \log \mathbf{P}(Q_n > nb) \geq \frac{1}{n} \log \left[\sup_{\tau\geq 0} \left\{ \mathbf{P}(W_\tau^{(n)} > nb) \right\} \right]$$

Además tomando límite inferior se conserva la desigualdad, entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(Q_n > nb) \;&\geq\; \lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{n} \log \left[\sup_{\tau\geq 0} \left\{ \mathbf{P}(W_\tau^{(n)} > nb) \right\} \right] \\
&=\; \lim_{n\to\infty} \inf \sup_{\tau\geq 0} \left[\frac{1}{n} \log \left\{ \mathbf{P}(W_\tau^{(n)} > nb) \right\} \right] \\
&\geq\; \sup_{\tau\geq 0} \left[\lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{n} \log \left\{ \mathbf{P}(W_\tau^{(n)} > nb) \right\} \right]
\end{aligned}$$

Entonces usando la primera desigualdad de la ecuación 5.4, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(Q_n > nb) &\geq \sup_{\tau\geq 0} -\Lambda_\tau^*(b^+) = -\inf_{\tau\geq 0} \Lambda_\tau^*(b^+) \\
&= -\inf_{\tau\geq 0} \sup_{s\geq 0} \left\{ s\left(b^+ + ct\right) - \log \mathbf{E} e^{sX_t} \right\} = -I(b^+)
\end{aligned}$$

Para probar la desigualdad que falta, vamos a suponer que las variables $W_t^{(n)}$ están indexadas en $\mathbb{N}$ (tiempo discreto); entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Q_n > nb) &= \mathbf{P}(\sup_{t\in\mathbb{N}} W_t^{(n)} > nb) \leq \mathbf{P}\left(\bigcup_{t\in\mathbb{N}} \left\{W_t^{(n)} > nb\right\}\right) \leq \sum_{t\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(W_t^{(n)} > nb) \\
&= \sum_{t<t_0} \mathbf{P}(W_t^{(n)} > nb) + \sum_{t\geq t_0} \mathbf{P}(W_t^{(n)} > nb) \\
&= t_0 \max_{t<t_0} \mathbf{P}(W_t^{(n)} > nb) + \sum_{t\geq t_0} \mathbf{P}(W_t^{(n)} > nb)
\end{aligned}$$

Entonces tomando logaritmo y dividiendo entre n se obtiene,

$$\frac{1}{n} \log \{\mathbf{P}(Q_n > nb)\} \leq \frac{1}{n} \log \left\{ t_0 \max_{t<t_0} \mathbf{P}(W_t^{(n)} > nb) + \sum_{t\geq t_0} \mathbf{P}(W_t^{(n)} > nb) \right\}$$

Por otro lado, usando que $x + y \leq 2 \max\{x, y\}$ con $x, y \geq 0$ resulta que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \log(x+y) &\leq \frac{\log(2)}{n} + \frac{1}{n} \log[\max\{x, y\}] \\
&= \frac{\log(2)}{n} + \max\left\{\frac{1}{n}\log(x), \frac{1}{n}\log(y)\right\}
\end{aligned}$$

Y aplicando esto a la ecuación 5.2 con $x = t_0 \max_{t<t_0} \mathbf{P}(W_t^{(n)} > nb)$ e $y = \sum_{t\geq t_0} \mathbf{P}(W_t^{(n)} > nb)$ se tiene que:

$$\frac{1}{n} \log \{\mathbf{P}(Q_n > nb)\} \leq \frac{\log(2)}{n} + \max\left\{\frac{1}{n}\log(x), \frac{1}{n}\log(y)\right\}$$

Y entonces,

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \{\mathbf{P}(Q_n > nb)\} &\leq \limsup_{n\to\infty} \max\left\{\frac{1}{n}\log(x), \frac{1}{n}\log(y)\right\} \\
&= \max\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(x), \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(y)\right\} \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

Para calcular $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(x)$ donde $x = t_0 \max_{t>0} \mathbf{P}(W_t^{(n)} > nb)$ observemos que:

$$\mathbf{P}(W_t^{(n)} > nb) = \mathbf{E}\mathbf{1}_{\left\{W_t^{(n)} > nb\right\}} \leq \mathbf{E} e^{s(W_t^n - nb)} \quad \forall s > 0 \qquad (5.10)$$

donde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}e^{s(W_t^n - nb)} &= \mathbf{E}e^{s\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\left(X_t^{(j)}-ct\right)-nb\right)} = \mathbf{E}e^{s\left(\sum\limits_{j=1}^{n}X_t^{(j)}-nct-nb\right)} \\
&= e^{-ncts-nbs}\mathbf{E}e^{s\sum\limits_{j=1}^{n}X_t^{(j)}} = e^{-ns(b+ct)}\left(\mathbf{E}e^{s\mathbf{X_t}}\right)^n \\
&= e^{-ns(b+ct)}e^{n\Lambda_t(s)} = e^{-ns(b+ct)+n\Lambda_t(s)}
\end{aligned}$$

Sustituyendo esto en la ecuación 5.10 resulta que:

$$\mathbf{P}(W_t^{(n)} > nb) \leq e^{-ns(b+ct)+n\Lambda_t(s)} \quad \forall s > 0 \tag{5.11}$$

En particular,

$$\mathbf{P}(W_t^{(n)} > nb) \leq \inf_{s\geq 0}\left\{e^{-ns(b+ct)+n\Lambda_t(s)}\right\}$$

Entonces,

$$t_0 \max_{t<t_0} \mathbf{P}(W_t^{(n)} > nb) \leq t_0 \max_{t<t_0}\left[\inf_{s\geq 0}\left\{e^{-ns(b+ct)+n\Lambda_t(s)}\right\}\right]$$

Y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\log\left\{t_0 \max_{t<t_0}\mathbf{P}(W_t^{(n)} > nb)\right\} &\leq \frac{\log(t_0)}{n} + \frac{1}{n}\log\left\{\max_{t<t_0}\left[\inf_{s\geq 0}\left\{e^{-ns(b+ct)+n\Lambda_t(s)}\right\}\right]\right\} \\
&= \frac{\log(t_0)}{n} + \max_{t<t_0}\left[\inf_{s\geq 0}\frac{1}{n}\log\left\{e^{-ns(b+ct)+n\Lambda_t(s)}\right\}\right] \\
&= \frac{\log(t_0)}{n} + \max_{t<t_0}\left[\inf_{s\geq 0} -s(b+ct)+\Lambda_t(s)\right]
\end{aligned}$$

Finalmente tomando límite superior resulta que:

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\log\left\{t_0\max_{t<t_0}\mathbf{P}(W_t^{(n)} > nb)\right\} \leq \max_{t<t_0}\left[\inf_{s\geq 0} -s(b+ct)+\Lambda_t(s)\right] \tag{5.12}$$

Para calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\inf\frac{1}{n}\log(y)$ donde $y = \sum\limits_{t\geq 0}\mathbf{P}(W_t^{(n)} > nb)$ utilizamos la acotación dada por 5.11 obteniendo:

$$\sum_{t\geq t_0}\mathbf{P}(W_t^{(n)} > nb) \leq \sum_{t\geq t_0} e^{-ns(b+ct)+n\Lambda_t(s)} = e^{-nbs}\sum_{t\geq t_0}e^{-n(cts-\Lambda_t(s))} \quad \forall s > 0$$

Además sabemos que por hipótesis existe $s_0 > 0$ tal que $\alpha\,(s_0,t) - c = \frac{1}{s_0 t}\Lambda_t(s_0) - c \leq c' - c < 0$ $\forall t$ suficientemente grande. Entonces $\Lambda_t(s_0) - s_0 ct < -\delta t$ con $\delta > 0$. Utilizando esta cota en la ecuación anterior se obtiene que:

$$\sum_{t\geq t_0}\mathbf{P}(W_t^{(n)} > nb) \leq e^{-nbs_0}\sum_{t\geq t_0}e^{-n\delta t} = \frac{e^{-nbs_0-n\delta t_0}}{1-e^{-n\delta}}$$

si t_0 es suficientemente grande. Ahora, tomando logaritmo y dividiendo entre n, se tiene que:

$$\frac{1}{n}\log\left(\sum_{t\geq t_0}\mathbf{P}(W_t^{(n)} > nb)\right) \leq \frac{1}{n}\log\left(\frac{e^{-nbs_0-n\delta t_0}}{1-e^{-n\delta}}\right) = -bs_0 - \delta t_0 - \frac{1}{n}\log(1-e^{-n\delta})$$

Finalmente tomando límite superior, resulta que con t_0 suf. grande:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sup \frac{1}{n}\log\left(\sum_{t\geq t_0}\mathbf{P}(W_t^{(n)} > nb)\right) &\leq \lim_{n\to\infty}\sup\left\{-bs_0 - \delta t_0 - \frac{1}{n}\log(1-e^{-n\delta})\right\}\\ &\leq -bs_0 - \delta t_0 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Entonces, sustituyendo 5.12 y 5.13 en 5.9, resulta que:

$$\lim_{n\to\infty}\sup \frac{1}{n}\log\{\mathbf{P}(Q_n > nb)\} \leq \max\left\{\max_{t<t_0}\left[\inf_{s\geq 0} -s(b+ct) + \Lambda_t(s)\right], -bs_0 - \delta t_0\right\}$$

Tomando límite con $t_0 \to \infty$, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty}\sup \frac{1}{n}\log\{\mathbf{P}(Q_n > nb)\} \leq \sup_{t\geq 0}\inf_{s\geq 0}\{\Lambda_t(s) - s(b+ct)\} = -I(b)$$

que es la cota superior buscada. Nos queda probar la desigualdad de la derecha en el caso de tiempo continuo, para esto consideramos el siguiente proceso indexado en $\mathbb{N}$:

$$\hat{W}_k^n = \sup_{k\epsilon\leq t\leq (k+1)\epsilon} W_t^{(n)}$$

Por definición,

$$Q_n = \sup_{t\geq 0} W_t^{(n)} = \sup_{k\in\mathbb{N}}\left\{\sup_{k\epsilon\leq t\leq (k+1)\epsilon} W_t^{(n)}\right\} = \sup_{k\in\mathbb{N}}\hat{W}_k^n$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Q_n > nb) &= \mathbf{P}(\sup_{k\in\mathbb{N}}\hat{W}_k^n > nb) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbf{P}(\hat{W}_k^n > nb)\\ &\leq k_0\max_{k<k_0}\mathbf{P}(\hat{W}_k^n > nb) + \sum_{k\geq k_0}\mathbf{P}(\hat{W}_k^n > nb)\end{aligned}$$

Para acotar el primer sumando vamos a utilizar argumentos similares a los que usamos en el caso discreto, más la desigualdad de Hölder. Entonces, como antes tenemos que:

$$\mathbf{P}(\hat{W}_k^n > nb) = \mathbf{E}\mathbf{1}_{\{\hat{W}_k^n > nb\}} \leq \mathbf{E}e^{s\left(\hat{W}_k^n - nb\right)} = e^{-nbs}\mathbf{E}e^{s\hat{W}_k^n} \quad \forall s > 0$$

Entonces,

$$\mathbf{P}(\hat{W}_k^n > nb) \leq \inf_{s>0}\left\{e^{-nbs}\mathbf{E}e^{s\hat{W}_k^n}\right\}$$

Y por lo tanto:

$$k_0\max_{k<k_0}\mathbf{P}(\hat{W}_k^n > nb) \leq k_0\max_{k<k_0}\inf_{s>0}\left\{e^{-nbs}\mathbf{E}e^{s\hat{W}_k^n}\right\}$$

De donde,

$$\frac{1}{n}\log\left(k_0\max_{k<k_0}\mathbf{P}(\hat{W}_k^n > nb)\right) \leq \frac{1}{n}\log(k_0) + \max_{k<k_0}\inf_{s>0}\left\{-bs + \frac{1}{n}\log\mathbf{E}e^{s\hat{W}_k^n}\right\}$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\sup \frac{1}{n}\log\left(k_0 \max_{k<k_0}\mathbf{P}(\hat{W}_k^n > nb)\right) \leq \lim_{n\to\infty}\sup\left[\max_{k<k_0}\inf_{s>0}\left\{-bs+\frac{1}{n}\log \mathbf{E}e^{s\hat{W}_k^n}\right\}\right] \quad (5.14)$$

Por otro lado, aplicando la desigualdad de Hölder se obtiene que:

$$\log \mathbf{E}e^{s\hat{W}_k^n} \leq \alpha \log \mathbf{E}e^{\frac{s}{\alpha}W_{k\epsilon}^n} + (1-\alpha)\log \mathbf{E}e^{\frac{s}{1-\alpha}W_k^{n,\epsilon}} \quad \forall \quad 0<\alpha<1 \quad (5.15)$$

donde

$$W_k^{n,\epsilon} = \sup_{k\epsilon \leq t \leq (k+1)\epsilon}\{W_t^n - W_{k\epsilon}^n\}$$

Entonces, sustituyendo 5.15 en 5.14 y recordando que W_t^n es un proceso de incrementos estacionarios resulta que:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\log\left(k_0\max_{k<k_0}\mathbf{P}(\hat{W}_k^n>nb)\right) &\leq \max_{k<k_0}\inf_{s>0}\left\{-bs+\alpha\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\log\mathbf{E}e^{\frac{s}{\alpha}W_{k\epsilon}^n}\right.\\ &+ \left.(1-\alpha)\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\log\mathbf{E}e^{\frac{s}{1-\alpha}\sup_{0\leq t\leq\epsilon}W_t^n}\right\}\end{aligned}$$

Además por definición, $W_{k\epsilon}^n = \sum_{j=1}^{n} X_{k\epsilon}^{(j)} - ck\epsilon$, entonces:

$$\mathbf{E}e^{\frac{s}{\alpha}W_{k\epsilon}^n} = \mathbf{E}e^{\frac{s}{\alpha}\sum_{j=1}^{n}X_{k\epsilon}^{(j)}-ck\epsilon} = e^{-\frac{s}{\alpha}nck\epsilon}\left(\mathbf{E}e^{\frac{s}{\alpha}\mathbf{X}_{k\epsilon}}\right)^n$$

De donde,

$$\frac{1}{n}\log\mathbf{E}e^{\frac{s}{\alpha}W_{k\epsilon}^n} = \frac{1}{n}\log\left\{e^{-\frac{s}{\alpha}nck\epsilon}\left(\mathbf{E}e^{\frac{s}{\alpha}\mathbf{X}_{\mathbf{k}\epsilon}}\right)^n\right\} = -\frac{s}{\alpha}ck\epsilon + \log\mathbf{E}e^{\frac{s}{\alpha}\mathbf{X}_{\mathbf{k}\epsilon}}$$

Y por lo tanto:

$$\alpha\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\log\mathbf{E}e^{\frac{s}{\alpha}W_{k\epsilon}^n} = -sk\epsilon + \alpha\log\mathbf{E}e^{\frac{s}{\alpha}W_{k\epsilon}^n}$$

Entonces, sustituyendo en la expresión obtenida anteriormente se tiene que:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\log\left(k_0\max_{k<k_0}\mathbf{P}(\hat{W}_k^n>nb)\right) &\leq \max_{k<k_0}\inf_{s>0}\left\{-s(b+ck\epsilon)+\alpha\log\mathbf{E}e^{\frac{s}{\alpha}W_{k\epsilon}^n}\right.\\ &+ \left.(1-\alpha)\frac{1}{n}\log\mathbf{E}e^{\frac{s}{1-\alpha}\sup_{0\leq t\leq\epsilon}W_t^n}\right\}\end{aligned}$$

Sea $(I) = \frac{1}{n}\log\left(k_0\max_{k<k_0}\mathbf{P}(\hat{W}_k^n>nb)\right)$, entonces tomando límite con $k_0\to\infty$, resulta que $\forall\epsilon>0$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sup(I) &\leq \sup_{k>0}\inf_{s>0}\left\{-s(b+ck\epsilon)+\alpha\log\mathbf{E}e^{\frac{s}{\alpha}X_{k\epsilon}}+(1-\alpha)\frac{1}{n}\log\mathbf{E}e^{\frac{s}{1-\alpha}\sup_{0\leq t\leq\epsilon}W_t^n}\right\}\\ &\leq \sup_{t'>0}\inf_{s>0}\left\{-s(b+ct')+\alpha\log\mathbf{E}e^{\frac{s}{\alpha}X_{t'}}+(1-\alpha)\frac{1}{n}\log\mathbf{E}e^{\frac{s}{1-\alpha}\sup_{0\leq t\leq\epsilon}W_t^n}\right\}\end{aligned}$$

Utilizando la segunda hipótesis, se puede probar que:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sup \frac{1}{n}\log \mathbf{E}e^{\frac{s}{1-\alpha}\sup\limits_{0\le t\le\epsilon} W_t^n} = 0$$

Entonces, tomando límite con $\epsilon \to 0$ en la ecuación anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sup(I) &\le \sup_{t'>0}\inf_{s>0}\left\{-s(b+ct')+\alpha\log\mathbf{E}e^{\frac{s}{\alpha}X_{t'}}\right\}\\
&= \alpha\sup_{t'>0}\inf_{s>0}\left\{-\frac{s}{\alpha}(b+ct')+\log\mathbf{E}e^{\frac{s}{\alpha}X_{t'}}\right\}\\
&= \alpha\sup_{t'>0}\inf_{s'>0}\left\{-s'(b+ct')+\log\mathbf{E}e^{s'X_{t'}}\right\}
\end{aligned}$$

Por último, tomando límite con $\alpha \to 1$ se obtiene como en el caso discreto que:

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\log\left(k_0\max_{k<k_0}\mathbf{P}(\hat{W}_k^n > nb)\right) \le \sup_{t'>0}\inf_{s'>0}\left\{s'(b+ct')+\log\mathbf{E}e^{s'X_{t'}}\right\}$$

Falta calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\log\sum\limits_{k\ge k_o}\mathbf{P}(\hat{W}_k^n > nb)$, por 5.14 y 5.15 sabemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\hat{W}_k^n > nb) &\le e^{-nbs}\mathbf{E}e^{s\hat{W}_k^n} \quad \forall s>0\\
&\le e^{-nbs}\left(\mathbf{E}e^{\frac{s}{\alpha}W_{k\epsilon}^n} > nb\right)^{\alpha}\left(\mathbf{E}e^{\frac{s}{1-\alpha}W_k^{n,\epsilon}}\right)^{(1-\alpha)} \quad \forall \quad 0<\alpha<1 \quad \forall s>0
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\mathbf{E}e^{\frac{s}{\alpha}W_{k\epsilon}^n} = \mathbf{E}e^{\frac{s}{\alpha}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}X_{k\epsilon}^j - nck\epsilon\right)} = e^{-\frac{s}{\alpha}(nck\epsilon)}\left(\mathbf{E}e^{\frac{s}{\alpha}X_{k\epsilon}}\right)^n = e^{-\frac{s}{\alpha}(nck\epsilon)}e^{n\Lambda_{k\epsilon}(\frac{s}{\alpha})}$$

Entonces,

$$\left(\mathbf{E}e^{\frac{s}{\alpha}W_{k\epsilon}^n}\right)^{\alpha} = e^{-nsck\epsilon}e^{n\alpha\Lambda_{k\epsilon}(\frac{s}{\alpha})} = e^{n\alpha\left(\Lambda_{k\epsilon}(\frac{s}{\alpha})-\frac{sck\epsilon}{\alpha}\right)}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{P}(\hat{W}_k^n > nb) \le e^{-nbs}e^{n\alpha\left(\Lambda_{k\epsilon}(\frac{s}{\alpha})-\frac{sck\epsilon}{\alpha}\right)}\left(\mathbf{E}e^{\frac{s}{1-\alpha}W_k^{n,\epsilon}}\right)^{(1-\alpha)} \quad \forall 0<\alpha<1 \forall s>0 \tag{5.16}$$

Por hipótesis sabemos, que existe $s_0 > 0$ tal que; $\alpha(s_0,t) = \frac{1}{s_0 t}\Lambda_t(s_0) \le c' \le c$ con $c>0$ $\forall t$ suficientemente grande. Entonces $\Lambda_t(s_0) - s_0ct < -\delta t$ con $\delta > 0$ $\forall t$ suficientemente grande. Además, evaluando 5.16 en $s = \alpha s_0$, se tiene que:

$$\mathbf{P}(\hat{W}_k^n > nb) \le e^{-nbs_0\alpha}e^{n\alpha(\Lambda_{k\epsilon}(s_0)-s_0ck\epsilon)}\left(\mathbf{E}e^{\frac{s_0\alpha}{1-\alpha}W_k^{n,\epsilon}}\right)^{(1-\alpha)} \quad \forall \quad 0<\alpha<1$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq k_0} \mathbf{P}(\hat{W}_k^n > nb) &\leq e^{-nbs_0\alpha}\left(\mathbf{E}e^{\frac{s_0\alpha}{1-\alpha}W_k^{n,\epsilon}}\right)^{(1-\alpha)} \sum_{k\geq k_0} e^{n\alpha(\Lambda_{k\epsilon}(s_0)-s_0ck\epsilon)} \\
&= e^{-nbs_0\alpha}\left(\mathbf{E}e^{\frac{s_0\alpha}{1-\alpha}W_k^{n,\epsilon}}\right)^{(1-\alpha)} \sum_{k'\geq k_0'} e^{n\alpha\left(\Lambda_{k'}(s_0)-s_0ck'\right)} \\
&\leq e^{-nbs_0\alpha}\left(\mathbf{E}e^{\frac{s_0\alpha}{1-\alpha}W_k^{n,\epsilon}}\right)^{(1-\alpha)} \sum_{k'\geq k_0'} e^{n\alpha(-\delta k')} \\
&= e^{-nbs_0\alpha}\left(\mathbf{E}e^{\frac{s_0\alpha}{1-\alpha}W_k^{n,\epsilon}}\right)^{(1-\alpha)} \frac{e^{-n\alpha\delta k_0'}}{1-e^{-n\alpha\delta}} \\
&= \left(\mathbf{E}e^{\frac{s_0\alpha}{1-\alpha}W_k^{n,\epsilon}}\right)^{(1-\alpha)} \frac{e^{-nbs_0\alpha}e^{-n\alpha\delta k_0'}}{1-e^{-n\alpha\delta}}
\end{aligned}$$

Tomando logaritmo, se tiene que,

$$\frac{1}{n}\log\sum_{k\geq k_0}\mathbf{P}(\hat{W}_k^n) \leq \frac{1}{n}\log\left(\mathbf{E}e^{\frac{s_0\alpha}{1-\alpha}W_k^{n,\epsilon}}\right)^{(1-\alpha)} + \frac{1}{n}\left(-nbs_0\alpha - n\alpha\delta k_0'\right) - \frac{1}{n}\log\left(1-e^{-n\alpha\delta}\right)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sup \frac{1}{n}\log\sum_{k\geq k_0}\mathbf{P}(\hat{W}_k^n) &\leq -bs_0\alpha - \alpha\delta k_0' + \lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\log\left(\mathbf{E}e^{\frac{s_0\alpha}{1-\alpha}W_k^{n,\epsilon}}\right)^{(1-\alpha)} \\
&- \lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\log\left(1-e^{-n\alpha\delta}\right) \\
&\leq -bs_0\alpha - \alpha\delta k_0' + \lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\log\left(\mathbf{E}e^{\frac{s_0\alpha}{1-\alpha}W_k^{n,\epsilon}}\right)^{(1-\alpha)}
\end{aligned}$$

Tomando primero límite con $\epsilon \to 0$ y luego límite con $\alpha \to 1$ resulta que,

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\log\sum_{k\geq k_0}\mathbf{P}(\hat{W}_k^n) \leq -bs_0\alpha - \alpha\delta k_0' \leq -bs_0 - \delta k_0'$$

Volviendo entonces a la acotación inicial tenemos que;

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\log\mathbf{P}(Q_n > nb) \leq \max\left\{\sup_{t'>0}\inf_{s'>0}\left\{s'(b+ct') + \log\mathbf{E}e^{s'X_{t'}}\right\}, -bs_0\alpha - \alpha\delta k_0'\right\}$$

Y finalmente, como hicimos en el caso discreto, tomando límite con $k_0 \to \infty$, se obtiene el resultado deseado:

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\log\mathbf{P}(Q_n > nb) \leq \sup_{t'>0}\inf_{s'>0}\left\{s'(b+ct') + \log\mathbf{E}e^{s'X_{t'}}\right\}$$

■

6. Unicidad

Si buscamos otra medida del uso de los recursos necesarios para el procesamiento de datos en un sistema como el que venimos manejando que sea de la misma forma que el EB, es decir $f^{-1}(\mathbf{E}(f(X)))$, que cumpla además alguna forma simple de agregación de flujos independientes (en el caso del EB vimos que esta forma es la suma); nos encontramos que bajo hipótesis generales de la función f,a menos de una transformación afín, esta debe ser la función exponencial.

Proposición 6.1 *Sea X una variable aleatoria acotada, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa y estrictamente creciente. Se define $C_f(X) = f^{-1}(\mathbf{E}f(X))$. Si f es una función de clase C^2 y existe $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable con $A(x, y) = A(y, x)$ $\forall x, y$ que cumple que:*

$$C_f(X + Y) = A(C_f(X), C_f(Y))$$

$\forall X, Y$ v.a. acotadas e independientes, entonces a menos de un transformación afín, $f(x) = x$ o $f(x) = e^{ax}$ para algún $a > 0$. Además $A(x, y) = x + y$

Observación 6.2 *Si $f(x) = ag(x) + b = y$ entonces $f^{-1}(y) = g^{-1}\left(\frac{y-b}{a}\right)$. Sea X una v.a acotada, entonces:*

$$C_f(X) = f^{-1}(\mathbf{E}f(X)) = f^{-1}(\mathbf{E}(ag(X) + b)) = f^{-1}(a\mathbf{E}g(X) + b) = g^{-1}(\mathbf{E}g(X)) = C_g(X)$$

Demostración:
Dado $h > 0$, sea $C(h) = C_f(X + hY) = f^{-1}(\mathbf{E}f(X + hY))$, entonces:

$$\begin{aligned} \dot{C}(h) &= (f^{-1})'(\mathbf{E}f(X + hY))\mathbf{E}(f'(X + hY)Y) && (6.1) \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(\mathbf{E}f(X + hY))])}\mathbf{E}(f'(X + hY)Y) && (6.2) \\ &= \frac{1}{f'(C_f(X + hY))}\mathbf{E}(f'(X + hY)Y) && (6.3) \end{aligned}$$

Evaluando en $h = 0$, se tiene que:

$$\dot{C}(0) = \frac{\mathbf{E}(f'(X)Y)}{f'(C_f)(X)} = \frac{\mathbf{E}f'(X)\mathbf{E}Y}{f'(C_f(X))} \tag{6.4}$$

Por otro lado, $C(h) = C_f(X + hY) = A(C_f(X), C_f(hY))$, entonces

$$\dot{C}(h) = \frac{\partial A}{\partial y}(C_f(X), C_f(hY))\frac{\partial}{\partial h}C_f(hY)$$

Sustituyendo $X = 0$ en 6.1, se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial h}C_f(hY) = \frac{\mathbf{E}(f'(hY)Y)}{f'(C_f(hY))}$$

Evaluando en $h = 0$, se obtiene:

$$\dot{C}(0) = \frac{\partial A}{\partial y}(C_f(X), C_f(0))\frac{\mathbf{E}(f'(0)Y)}{f'(C_f(0))} = \frac{\partial A}{\partial y}(C_f(X), 0)\mathbf{E}(y) \tag{6.5}$$

Entonces, $\forall$ X, Y v.a acotadas e independientes se cumple que:

$$\frac{\mathbf{E}f'(X)\mathbf{E}Y}{f'(C_f(X))} = \frac{\partial A}{\partial y}(C_f(X), 0)\mathbf{E}(y)$$

de donde
$$\frac{\mathbf{E}f'(X)}{f'(C_f(X))} = \frac{\partial A}{\partial y}(C_f(X),0)$$
$\forall$ X v.a. acotada. Dado $x>0$ y $0 \leq p \leq 1$, sea X v.a. tal que $\mathbf{P}(X=0)=p$ y $\mathbf{P}(X=x)=1-p$, entonces:
$$\mathbf{E}f'(X) = f'(0)p + f'(x)(1-p)$$
y
$$C_f(X) = f^{-1}(f(0)p + f(x)(1-p))$$
Se define
$$H(p) = \frac{\mathbf{E}f'(X)}{C_f(X)} = \frac{f'(0)p + f'(x)(1-p)}{f'(f^{-1}(f(0)p + f(x)(1-p)))}$$
De 6.4 y 6.5, se tiene que $H(p) = \frac{\partial A}{\partial y}(C_f(X),0) = \frac{\partial A}{\partial y}(f^{-1}(f(0)p+f(x)(1-p)),0)$ $\forall x,p$. Por lo tanto:
$$f'(0)p + f'(x)(1-p) = f'(f^{-1}(f(0)p + f(x)(1-p)))\frac{\partial A}{\partial y}(f^{-1}(f(0)p + f(x)(1-p)),0)$$
Derivando con respecto a p, se obtiene que:
$$\begin{aligned} f'(0) - f'(x) &= f''(f^{-1}(f(0)p + f(x)(1-p)))a(p)\frac{\partial A}{\partial y}(f^{-1}(f(0)p + f(x)(1-p)),0) \\ &+ f'(f^{-1}(f(0)p + f(x)(1-p)))\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}(f^{-1}(f(0)p + f(x)(1-p)),0)a(p) \end{aligned}$$
con $a(p) = (f^{-1})'(f(0)p + f(x)(1-p)) = \dfrac{f(0)-f(x)}{f'(f^{-1}(f(0)p + f(x)(1-p)))}$

Evaluando en $p=1$, se tiene que:
$$\begin{aligned} f'(0) - f'(x) &= f''(f^{-1}(f(0))\frac{(f(0)-f(x))}{f'(f^{-1}(f(0)))}\frac{\partial A}{\partial y}(f^{-1}(f(0),0) \\ &+ f'(f^{-1}(f(0))\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}(f^{-1}(f(0)),0)\frac{(f(0)-f(x))}{f'(f^{-1}(f(0))} \\ &= f''(0)\frac{(f(0)-f(x))}{f'(0)}\frac{\partial A}{\partial y}(0,0) + f'(0)\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}(0,0)\frac{(f(0)-f(x))}{f'(0)} \\ &= \left(\frac{f''(0)}{f'(0)}\frac{\partial A}{\partial y}(0,0) + \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}(0,0)\right)(f(0)-f(x)) = C(f(0)-f(x)) \end{aligned}$$
Por lo tanto:
$$f'(x) = Cf(x) + D$$
con $D = (f'(0) - Cf(0))$ de donde, $f(x) = Dx + b$ si $C = 0$ o $f(x) = b + ce^{ax}$ si $C \neq 0$. En ambos casos resulta que $A(x,y) = x + y$.

■

Observación 6.3 *Si además f es estrictamente convexa, entonces a menos de una transformación afín, $f(x) = e^{ax}$ para algún $a > 0$; obteniéndose en este caso la función ancho de banda efectivo.*

7. Flujos Markovianos

En esta sección definiremos Flujo Markoviano y calcularemos su ancho de banda efectivo. Para esto será necesario repasar previamente algunos conceptos de Cadenas de Markov en tiempo continuo.

7.1. Cadenas de Markov

Una cadena de Markov en tiempo continuo es un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\geq 0}$ en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que toma valores en un espacio numerable E (espacio de estados) tal que

$$\mathbf{P}(X_{t+s} = j | X_t = i, X_{t_1} = j_1, \cdots, X_{t_k} = j_k) = \mathbf{P}(X_{t+s} = j | X_t = i) \stackrel{def}{=} P_{ij}(t,s) \tag{7.1}$$

$\forall\ t, s \in \mathbb{R}, \forall\ 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots < t$ y $\forall j_1, \cdots, j_k, i, j \in E$. Esta propiedad se llama *propiedad de Markov*. Si además $P_{ij}(t,s)$ no depende de t, es decir

$$\mathbf{P}(X_{t+s} = j | X_t = i) = \mathbf{P}(X_s = j | X_0 = i)$$

la cadena se llama *homogénea*. En este trabajo se tratará siempre con cadenas homogéneas y se denotará $P_{ij}(t)$ a la probabilidad de transición del estado i al estado j en tiempo t. Se denomina *matriz de transición* de la cadena a

$$P(t) = (P_{ij}(t))_{ij \in E}$$

Y a la familia $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ se le denomina *semigrupo de transición* con la convención $P(0) = Id$. Usando la propiedad de Markov se prueba que

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k\in E} P_{ik}(t) P_{kj}(s) \quad \forall\ t, s \geq 0, \forall\ i, j \in E$$

lo que en términos de matrices resulta:

$$P(t+s) = P(t)P(s) \quad \forall\ t, s \geq 0$$

Estas ecuaciones son llamadas *Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov*. La distribución de la cadena en tiempo t es el vector $\mu(t)$ donde la i-ésima coordenada es:

$$\mu_i(t) = P(X_t = i) = \sum_{j\in E} \mu_j(0) P_{ji}(t) = (\mu(0)P(t))_i$$

En términos de matrices se tiene que:

$$\mu(t) = \mu(0)P(t) \tag{7.2}$$

Es decir que la distribución de la cadena $\forall t \geq 0$ sólo depende de la distribución inicial y del semigrupo de transición. Se demuestra también que $\forall\ 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_k$ y $\forall j_0, j_1, \cdots, j_k \in E$ se cumple

$$\mathbf{P}(X_{t_1} = j_1, \cdots, X_{t_k} = j_k) = \sum_{j_0 \in E} \mathbf{P}(X_0 = j_0) \prod_{j=1}^{k} P_{i_{j-1} i_j}(t_j - t_{j-1})$$

Es decir que las distribuciones conjuntas del proceso también dependen únicamente de la distribución inicial y del semigrupo de transición. Si se tiene que $P(t)$ es continua $\forall\ t \geq 0$ (basta con que sea continua en el origen; es decir $P(t) \underset{t\to 0}{\to} Id = P(0))$ se demuestra que existen las derivadas:

$$q_i = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1-p_{ii}(h)}{h} \quad \in [0,+\infty] \quad \forall i$$

$$q_{ij} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} \quad \in [0,+\infty) \quad \forall i,j \;\; i \neq j$$

Se llama *generador infinitesimal* de la cadena a la matriz $Q = ((q_{ij}))_{i,j\in E}$ donde q_{ij} con $i \neq j$ definido como antes se interpreta como la cantidad de transiciones del estado i al estado j por unidad de tiempo y se define $q_{ii} = -q_i$ que se interpreta como la cantidad de transiciones que salen de i por unidad de tiempo. Entonces se tiene que:

$$q_{ij} = \left.\frac{dP_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

En términos de matrices se tiene que Q es la derivada de la función matricial $t \longrightarrow P(t)$ evaluada en cero. Se tiene entonces que

$$P(t) = \exp(Qt) \quad \forall\; t \geq 0 \tag{7.3}$$

Por otro lado se dice que la cadena es *estable* si $q_i < +\infty \quad \forall i$ y se dice que es *conservativa* si $q_i = \sum_{j\in E, j\neq i} q_{ij}$. Las cadenas con espacios de estados finito son estables y conservativas. Una distribución invariante es un vector de probabilidad en E, $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots)$ tal que

$$\pi = P(t)\pi \quad \forall\; t \geq 0 \tag{7.4}$$

Si la distribución inicial es una distribución invariante resulta que.

$$\mu(t) = \mu(0)P(t) = \mu(0)$$

Es decir $P(X_t = j) = P(X_0 = j)\ \forall t \geq 0,\ \forall j \in E$. El vector de probabilidad π para ser invariante debe ser un vector propio fila para todas las matrices del semigrupo de transición. En el caso de matrices finitas se demuestra la siguiente equivalencia:

$$\pi = P(t)\pi \;\; \forall\; t \Leftrightarrow \pi Q = 0 \tag{7.5}$$

Si $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es una cadena de Markov homogénea en tiempo continuo, se define $\{\tau_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión de los tiempos de transición de $\{X_t\}_{t\geq 0}$, donde $\tau_0 = 0$ y $\tau_n = \infty$ si hay menos de n transiciones en $(0,\infty)$. Para cada $n \geq 0$, τ_n es un tiempo de parada con respecto a X_t. Entonces, X_n definido por: $X_n = X_{\tau_n}$ y $X_\infty = \Delta$ (donde Δ es un elemento arbitrario que no pertenece a E) es una cadena de Markov homogénea en tiempo discreto. Entonces,

Definición 7.1 *Una cadena de Markov en tiempo continuo $\{X_t\}_{t\geq 0}$ se dice irreducible si la cadena $\{X_n\}_{n\geq 0}$ definida antes es irreducible.*

Definición 7.2 *Un estado $i \in E$ se dice recurrente para $\{X_t\}_{t\geq 0}$, si es recurrente para $\{X_n\}_{n\geq 0}$. La cadena $\{X_t\}_{t\geq 0}$ se dice recurrente si todos los estados son recurrentes.*

Recordemos que, si $(X_n)_{n\geq 0}$ es una cadena de Markov en tiempo discreto con espacio de estados E, se dice que es recurrente si $\forall\; i \in E$ se cumple que $\mathbf{P}\left(\bigcup_{m=1}^{+\infty} [X_m = i]\,|X_0 = i\right) = 1$ (la probabilidad de retornar a i es uno). Además se dice que es irreducible si $\forall\; i,j \in E$ se cumple que $p^n(i,j) > 0$ para algún $n > 0$, donde $p^n(i,j)$ es la probabilidad de pasar del estado i al estado j en n pasos. En lo que sigue utilizaremos sin demostrar el siguiente teorema:

Teorema 7.3 *Si $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es una cadena de Markov homogénea, irreducible y recurrente entonces existe una única distribución invariante π y se cumple además que:*

$$\lim_{t\to+\infty} P(X_t = x_j) = \pi_j$$

para toda distribución inicial $\mu(0)$ en E.

Vamos a definir ahora el proceso para el cual calcularemos el ancho de banda efectivo. Sea Y_t una cadena de Markov en tiempo continuo homogénea (CMH), irreducible y con espacio de estados finito $E = \{h_1, \cdots, h_m\}$ con $h_i \in \mathbb{R}\ \forall\, i = 1, \cdots, m$ y $0 \leq h_1 < \cdots < h_m$. Se define flujo markoviano modulado por Y_t al proceso

$$X_t = \int_0^t Y_s ds \tag{7.6}$$

Entonces por el teorema anterior sabemos que existe una única distribución invariante π. Tomando como distribución inicial de la cadena la distribución invariante, Y_s resulta un proceso estacionario y por lo tanto X_t es un proceso de incrementos estacionarios. X_t representa el trabajo acumulado en $[0, t]$ recibido desde una fuente que envía datos a velocidad Y_t. Los estados h_j de la cadena representan la velocidad con que se acumula trabajo. Dichas velocidades son constantes y cambian aleatoriamente, por lo cual el proceso X_t tiene trayectorias lineales a trozos, continuas y con pendientes dadas por los estados h_j. La cadena Y_t se llama cadena modulante.

7.2. Ancho de banda efectivo para un flujo Markoviano

Vamos a calcular ahora el ancho de banda efectivo para un flujo Markoviano. Veremos que este depende del generador infinitesimal de la cadena modulante Y_t, los estados de la misma y la distribución inicial (es decir la distribución invariante). La fórmula se debe a Kesidis, Walrand y Chang [5]. En este trabajo presentamos una demostración alternativa a la de los autores.

Teorema 7.4 *Sea $\{X_t\}_{t\geq 0}$ un flujo markoviano modulado por Y_t CMH irreducible, con generador infinitesimal Q y estados $0 \leq h_1 < \cdots < h_m$.Sea H una matriz diagonal con $H_{ii} = h_i$, π la distribución invariante de la cadena y $\mathbf{1}$ un vector columna con todas las entradas igual a 1.Entonces:*

$$\alpha(s,t) = \frac{1}{st}\log\{\pi \exp[(Q + Hs)t]\,\mathbf{1}\} \tag{7.7}$$

Demostración:
Por definición $\alpha(s,t) = \frac{1}{st}\log \mathbf{E}e^{sX_t}$, entonces basta probar que:

$$\mathbf{E}e^{sX_t} = \pi \exp[(Q + Hs)t]$$

Nuestro proceso es:

$$X_t = \int_0^t Y_s ds = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{t}{n}Y_{\frac{k}{n}t}$$

donde escribimos la integral como el límite de sumas de Riemann. Entonces:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}e^{sX_t} &= \mathbf{E}e^{s\int_0^t Y_s ds} = \mathbf{E}e^{s\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{t}{n}Y_{\frac{k}{n}t}} \\ &= \mathbf{E}\lim_{n\to\infty} e^{s\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{t}{n}Y_{\frac{k}{n}t}}\end{aligned}$$

Por definición de X_t, se tiene que $|X_t| \leq h_m t < \infty$ y por lo tanto $e^{sX_t} \leq e^{sh_m t} < \infty$ con lo cual vale el teorema de convergencia dominada y resulta que:

$$\mathbf{E}e^{sX_t} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}e^{s\frac{t}{n}Y_{\frac{k}{n}t}} \tag{7.8}$$

Además la variable $e^{s\frac{t}{n}Y_{\frac{k}{n}t}}$ es discreta ya que depende de los valores de la cadena en los tiempos $\frac{k}{n}t$ y podemos calcular su esperanza:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}e^{s\frac{t}{n}Y_{\frac{k}{n}t}} &= \left(\sum_{j_1,\cdots,j_n=1}^{m} e^{s\frac{t}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} h_{j_k}}\right) \sum_{j_0=1}^{n} \pi(j_0) \prod_{k=1}^{n} P_{j_{k-1}j_k}\left(\frac{t}{n}\right) \\
&= \left(\sum_{j_1,\cdots,j_n=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} e^{s\frac{t}{n}h_{j_k}}\right) \sum_{j_0=1}^{n} \pi(j_0) \prod_{k=1}^{n} P_{j_{k-1}j_k}\left(\frac{t}{n}\right) \\
&= \sum_{j_0,j_1,\cdots,j_n=1}^{m} \pi(j_0) \prod_{k=1}^{n} e^{s\frac{t}{n}h_{j_k}} P_{j_{k-1}j_k}\left(\frac{t}{n}\right) \\
&= \sum_{j_0=1}^{m} \pi(j_0) \sum_{j_n=1}^{m} \left(\sum_{j_1,\cdots,j_{n-1}=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} e^{s\frac{t}{n}h_{j_k}} P_{j_{k-1}j_k}\left(\frac{t}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

Definiendo la matriz auxiliar

$$A_{ij}(t) = e^{sth_j} P_{ij}(t) \quad \forall i,j = 1\cdots m$$

se puede reescribir la ecuación anterior como:

$$\mathbf{E}e^{s\frac{t}{n}Y_{\frac{k}{n}t}} = \sum_{j_0=1}^{m} \pi(j_0) \sum_{j_n=1}^{m} \left(\sum_{j_1,\cdots,j_{n-1}=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} A_{j_{k-1}j_k}\left(\frac{t}{n}\right)\right)$$

donde además

$$\sum_{j_1,\cdots,j_{n-1}=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} A_{j_{k-1}j_k}\left(\frac{t}{n}\right) = \left[A\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n_{j_0j_n}$$

que es la entrada j_0j_n de la matriz A^n. Entonces resulta que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}e^{s\frac{t}{n}Y_{\frac{k}{n}t}} &= \sum_{j_0=1}^{m} \pi(j_0) \sum_{j_n=1}^{m} \left[A\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n_{j_0j_n} = \sum_{j_0=1}^{m} \pi(j_0) \left[A\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n_{j_0} \mathbf{1} \\
&= \pi \left[A\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \mathbf{1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto sustituyendo en 7.8 se tiene que:

$$\mathbf{E}e^{sX_t} = \lim_{n\to\infty} \pi \left[A\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \mathbf{1} = \pi \left(\lim_{n\to\infty} \left[A\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n\right) \mathbf{1}$$

Sólo resta probar que:

$$\lim_{n\to\infty} \left[A\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = \exp\left[(Q + Hs)t\right]$$

Por definición:

$$A\left(\frac{t}{n}\right) = P\left(\frac{t}{n}\right)\begin{pmatrix} e^{s\frac{t}{n}h_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{s\frac{t}{n}h_m} \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} P\left(\frac{t}{n}\right) C_n \tag{7.9}$$

Se admiten además los siguientes desarrollos:

$$P\left(\frac{t}{n}\right) = P(0) + P'(0)\frac{t}{n} + \mathbf{o}\left(\frac{1}{n}\right) = Id + Q\left(\frac{t}{n}\right) + \mathbf{o}\left(\frac{1}{n}\right) \tag{7.10}$$

$$C_n = Id + Hs\left(\frac{t}{n}\right) + \mathbf{o}\left(\frac{1}{n}\right) \tag{7.11}$$

Donde $\mathbf{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ representa una matriz cuadrada tal que $n||\mathbf{o}\left(\frac{1}{n}\right)|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$; entonces sustituyendo los desarrollos 7.10 y 7.11 en 7.9 resulta que:

$$\begin{aligned} A\left(\frac{t}{n}\right) &= P\left(\frac{t}{n}\right)C_n = \left(Id + Q\left(\frac{t}{n}\right) + \mathbf{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(Id + Hs\left(\frac{t}{n}\right) + \mathbf{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= Id + (Q + Hs)\frac{t}{n} + \mathbf{o}\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Y por lo tanto:

$$\left[A\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = \left[Id + (Q+Hs)\left(\frac{t}{n}\right) + \mathbf{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n$$

Por lo cual hay que probar que:

$$\left[Id + (Q+Hs)\left(\frac{t}{n}\right) + \mathbf{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\left[(Q+Hs)t\right]$$

que es una generalización del caso real:

$$\left(1 + \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^x$$

Demostraremos entonces que para cualquier matriz cuadrada B, se cumple que:

$$\left[Id + \frac{B}{n} + \mathbf{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(B)$$

Para esto se considera $B_n = \left[Id + \frac{B}{n} + \mathbf{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n$ y probaremos que:

$$\left|\left|B_n - \sum_{k=0}^{n}\frac{B^k}{k!}\right|\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Escribiendo

$$B_n = \left(Id + \frac{B}{n}\right)^n + B'_n$$

se tiene que:

$$\begin{aligned}\left\|B_n - \sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!}\right\| &= \left\|\left(Id + \frac{B}{n}\right)^n + B'_n - \sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!}\right\| \\ &\leq \left\|\left(Id + \frac{B}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!}\right\| + ||B'_n||\end{aligned}$$

Probaremos que ambos términos tienden a cero. Como las matrices Id y $\frac{B}{n}$ conmutan se puede utilizar la fórmula del binomio de Newton para obtener:

$$\begin{aligned}\left\|\left(Id + \frac{B}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!}\right\| &= \left\|\left(\sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_k^n \frac{B^k}{n^k}\right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!}\right\| \\ &= \left\|\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathcal{C}_k^n}{n^k} - \frac{1}{k!}\right) B^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{\mathcal{C}_k^n}{n^k} - \frac{1}{k!}\right| ||B||^k\end{aligned}$$

Como $\frac{\mathcal{C}_k^n}{n^k} < \frac{1}{k!}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\left\|\left(Id + \frac{B}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!}\right\| &\leq \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\mathcal{C}_k^n}{n^k} - \frac{1}{k!}\right) ||B||^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_k^n \frac{||B||^k}{n^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{||B||^k}{k!} \\ &= \left(1 + \frac{||B||}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{||B||^k}{k!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{||B||} - e^{||B||} = 0\end{aligned}$$

Miremos ahora el segundo término:

$$\begin{aligned}||B'_n|| &= \left\|\left[Id + \frac{B}{n} + \mathbf{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n - \left[Id + \frac{B}{n}\right]^n\right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \mathcal{C}_k^n \left\|Id + \frac{B}{n}\right\|^{n-k} \left\|\mathbf{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right\|^k \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \mathcal{C}_k^n \left(1 + \frac{||B||}{n}\right)^{n-k} \left\|\mathbf{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right\|^k = \left[1 + \frac{||B||}{n} + \left\|\mathbf{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right\|\right]^n - \left(1 + \frac{||B||}{n}\right)^n\end{aligned}$$

Usando el teorema del valor medio:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+\theta h)h \quad \text{con} \quad \theta \in (0,1)$$

se tiene que:

$$||B'_n|| \leq n\left(1 + \frac{||B||}{n} + \theta\left\|\mathbf{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right\|\right)^{n-1} \left\|\mathbf{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Lo que demuestra que:

$$\left[Id + \frac{B_n}{n} + \mathbf{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(B)$$

Y por lo tanto tomando $B = (Q + Hs)t$ queda probado que:

$$\left(Id + (Q+Hs)\left(\frac{t}{n}\right) + \mathbf{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\left[(Q+Hs)t\right]$$

Y esto prueba el teorema.

■

Observación 7.5 *Es importante resaltar que en el cálculo anterior, en ningún momento utilizamos que la distribución inicial fuera la invariante. Esta hipótesis sólo es necesaria para que el proceso X_t sea de incrementos estacionarios y por lo tanto tenga sentido calcular el ancho de banda efectivo.*

8. Estimación gaussiana asintótica para $\alpha(s,t)$

Sea $\{X_t\}_{t\geq 0}$ un flujo Markoviano, modulado por Y_t cadena de Markov como antes. En esta sección vamos a hallar un estimador consistente del ancho de banda efectivo para X_t a partir de trayectorias de tráfico (*traffic traces*). El siguiente teorema (sin demostración) da una estimación gaussiana asintótica de Q, en función de las trayectorias de tráfico.

Teorema 8.1 (Lebedev-Lukashuk) *Sea $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ CMH irreducible con espacio de estados finito $S = \{1\cdots k\}$ y generador infinitesimal $Q = (\lambda_{ij})_{i,j=1\cdots k}$ desconocido.*
Sea $D = \{(i,j) \in S\times S/\lambda_{ij} > 0\}$ y el EMV de λ_{ij}, dado por

$$\hat{\lambda}^n_{ij}(x) = \frac{\gamma(i,j,nx)}{\tau(i,nx)} \tag{8.1}$$

donde $\gamma(i,j,h)$ = número de transiciones de la cadena de i a j en el intervalo $[0,h]$ y $\tau(i,h)$ = tiempo que permaneció la cadena en el estado i durante el intervalo $[0,h]$. Entonces, se cumple que:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} |\hat{\lambda}^n_{ij}(u) - \lambda_{ij}| = 0$ *c.s.*
2. $\left(\sqrt{nu}(\hat{\lambda}^n_{ij}(u) - \lambda_{ij})\right)_{i,j\in D} \underset{n\to+\infty}{\overset{w}{\Longrightarrow}} \left(\sqrt{\frac{\lambda_{ij}}{\pi(i)}}W_{ij}(u)\right)_{i,j\in D}$ *como proceso estocástico en $u \in [0,1]$, donde $W = \{W_{ij}\}_{ij\in D}$ denota un proceso de Wiener standard.*

Corolario 8.2 *Tomando $u = 1$ se tiene que la sucesión de v.a. $\left(\hat{\lambda}^n_{ij}\right)_{ij\in D}$ cumple que:*

$$\left(\hat{\lambda}^n_{ij} - \lambda_{ij}\right)_{i,j\in D} \underset{n\to+\infty}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N(\vec{0},\Sigma) \tag{8.2}$$

donde $\Sigma = \dfrac{\lambda_{ij}}{\pi(i)}\mathbf{I}_{k(k-1)} \in \mathcal{M}_{k(k-1)\times k(k-1)}$

Demostración:
Del teorema 8.1, se deduce que

$$\left(\hat{\lambda}^n_{ij} - \lambda_{ij}\right)_{i,j\in D} \underset{n\to+\infty}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N(\vec{0},\Sigma) \tag{8.3}$$

donde Σ es la matriz de covarianzas de $(W_{ij})_{ij\in D}$ que son procesos de Wienner estandar independientes. Por lo tanto:

$$\mathbf{Cov}(W_{ij}(u), W_{kl}(u)) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ y } j = l \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y entonces $\Sigma = \dfrac{\lambda_{ij}}{\pi(i)}\mathbf{I}_{k(k-1)}$

■

Observación 8.3 *De aquí en más trabajaremos con $u = 1$.*

A partir de los EMV de λ_{ij}, vamos a construir un estimador consistente de $\alpha(s,t)$. Se define

$$\Lambda = (\lambda_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq k}$$

vector de elementos no diagonales de Q. $\Lambda \in \mathbb{R}^{k(k-1)}$ y se define $Q : (\mathbb{R}^{+})^{k(k-1)} \longrightarrow \mathcal{M}_{k \times k}$ tal que $Q(\Lambda) = Q$ donde:

$$Q_{ij} = \begin{cases} \lambda_{ij} & \text{si } i \neq j \\ \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{j=k} \lambda_{ij} = -\lambda_{ii} & \text{si } i = j \end{cases}$$

La función reconstruye Q a partir de los elementos no diagonales (pues la cadena es conservativa). Sea $\hat{Q} \in \mathcal{M}_{k \times k}$ tal que $\hat{Q}_{ij} = \lambda_{ij}$ si $j < k$ y $\hat{Q}_{ik} = 1$ (Q, Λ y $\hat{Q}$ contienen exactamente la misma información). Vamos a pensar cualquier parámetro que dependa de Q, como función de Λ. Se tiene que si π es la distribución invariante, entonces $\pi Q = 0$, además $< \pi, \mathbf{1} >= 1$ (por ser vector de probabilidad). Esta información se puede resumir en la siguiente ecuación: $\pi \hat{Q} = e_k$, es decir que π depende de Q y por lo tanto consideramos $\pi = \pi(\Lambda)$. Definiendo:

$$B : \mathbb{R}^{k(k-1)} \longrightarrow \mathcal{M}_{k \times k} \quad \text{tal que} \quad B(\Lambda) = \exp[(Q(\Lambda) + Hs)t] \tag{8.4}$$

$$g : \mathbb{R}^{k(k-1)} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad g(\Lambda) = \pi(\Lambda) B(\Lambda) \mathbf{1} \tag{8.5}$$

$$\psi : \mathbb{R}^{k(k-1)} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \psi(\Lambda) = \frac{1}{st} \log(g(\Lambda)) \tag{8.6}$$

resulta que:

$$\alpha(s,t) = \psi(\Lambda) \tag{8.7}$$

El siguiente teorema probado en [6] da una estimación gaussiana asintótica de $\alpha(s,t)$.

Teorema 8.4 *Sea X_t flujo Markoviano modulado por Y_t como antes. Se considera para s, t fijos, $\alpha(s,t)$ como en 7.4, ψ como en 8.6 y $\hat{\lambda}_{ij}^{n}$ como en 8.1. Entonces tomando:*

$$\Lambda_n = \left(\hat{\lambda}_{ij}^{n}\right)_{1 \leq i \neq j \leq k}$$

y

$$\alpha^n(s,t) = \psi(\Lambda_n)$$

resulta que:

1. $\sqrt{n}(\alpha^n(s,t) - \alpha(s,t)) \underset{n \to +\infty}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N(0, \sigma^2)$ *con* $\sigma^2 = \nabla\psi(\Lambda) \Sigma \nabla\psi(\Lambda)^t$ *donde* Σ *es la matriz de covarianza vista en el corolario 8.2.*

2.
$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{(i,j) \in D} \frac{\lambda_{ij}}{\pi(i)} \frac{\partial \psi(\Lambda)^2}{\partial \lambda_{ij}} \\ &= \frac{1}{(st\pi(\Lambda)B(\Lambda)\mathbf{1})^2} \sum_{i,j \in D} \frac{\lambda_{ij}}{\pi(i)} \left[\frac{\partial \pi(\Lambda)}{\partial \lambda_{ij}} B(\Lambda)\mathbf{1} + \pi(\Lambda) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{l-1} A(\Lambda) \right]^2 \end{aligned}$$

$$\textit{donde } A(\Lambda) = \frac{t^{l-1}}{l!}(Q(\Lambda)+Hs)^r V^{ij}(Q(\Lambda)+Hs)^{l-r-1} \textit{ siendo } V^{ij} \in \mathcal{M}_{k\times k}(\mathbb{R}) \textit{ tal que}$$

$$(V^{ij})_{lm} = \begin{cases} 1 & si\ i = l\ y\ j = m \neq i \\ -1 & si\ l = i = m \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Para la demostración de este teorema, se necesitan 2 lemas previos.

Lema 8.5 *Sea $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de v.a en $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de números positivos que tiende a infinito y $z \in \mathbb{R}^d$ tal que:*

$$a_n(Z_n - z) \underset{n\to+\infty}{\Rightarrow^w} N(\vec{0},\Sigma)$$

con Σ matriz de covarianza. Sea $G : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en un entorno de Z, entonces se tiene que:

$$a_n(G(Z_n) - G(z)) \underset{n\to+\infty}{\Rightarrow^w} N(\vec{0},\nabla G(z)\Sigma\nabla G(z)^t)$$

Demostración:
Por el teorema de representación de Skorohod (demostraremos a continuación la versión en $\mathbb{R}$) sabemos que existe $(Z_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de variables aleatorias tal que Z_n^* tiene la misma distribución de Z_n y cumple que:

$$a_n(Z_n^* - z) \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} Z^* \quad \text{donde } Z^* \sim N(\vec{0},\Sigma) \tag{8.8}$$

Sea $G : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en un entorno de z entonces, aplicando la fórmula del desarrollo Taylor, se tiene que:

$$a_n(G(Z_n^*) - G(z)) = a_n\nabla G(z)(Z_n^* - z) + a_n(Z_n^* - z)^t H_{\xi_n^*}(Z_n^* - z) \quad \text{con } \xi_n^* \text{ entre } Z_n^* \text{ y } z$$

Entonces usando 8.8 resulta que:

$$a_n\nabla G(z)(Z_n^* - z) = \nabla G(z)a_n(Z_n^* - z) \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} \nabla G(z)Z^*$$

Además:

$$a_n(Z_n^* - z)^t H_{\xi_n^*}(Z_n^* - z) = \frac{1}{a_n}[a_n(Z_n^* - z)]^t H_{\xi_n^*} a_n(Z_n^* - z)$$

donde:

$$[a_n(Z_n^* - z)]^t H_{\xi_n^*} a_n(Z_n^* - z) \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} (Z^*)^t H_z Z^*$$

y

$$\frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Entonces:

$$a_n(Z_n^* - z)^t H_{\xi_n^*}(Z_n^* - z) \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} 0$$

Y por lo tanto:

$$a_n(G(Z_n^*) - G(z)) \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} \nabla G(z)Z^*$$

Además $Z^* \sim N(\vec{0}, \Sigma)$, entonces $\nabla G(z) Z^* \sim N(\vec{0}, \nabla G(z)\Sigma\nabla G(z)^t)$ y resulta que:

$$a_n(G(Z_n^*) - G(z)) \underset{n\to+\infty}{\Rightarrow^w} N(\vec{0}, \nabla G(z)\Sigma\nabla G(z)^t)$$

Para probar el resultado enunciado, basta observar que Z_n^* tiene la misma distribución que Z_n $\forall n$; pues entonces se obtiene que:

$$a_n(G(Z_n) - G(z)) \underset{n\to+\infty}{\Rightarrow^w} N(\vec{0}, \nabla G(z)\Sigma\nabla G(z)^t)$$

$\blacksquare$

Teorema 8.6 (Representación de Skorohod) *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de variables aleatorias reales, tal que X_n tiene función de distribución F_n. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión creciente de reales positivos, tal que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Sean $\mu \in \mathbb{R}$ y X variable aleatoria real con función de distribución F continua tales que*

$$a_n(X_n - \mu) \underset{n\to+\infty}{\Rightarrow^w} X$$

Entonces, existen X_n^* y X^* variables aleatorias tales que $X_n^* \sim F_n \forall n$, $X^* \sim F$ y

$$a_n(X_n^* - \mu) \underset{n\to+\infty}{\overset{c.s.}{\longrightarrow}} X^*$$

Demostración:
Sea $U \sim \mathcal{U}[0,1]$, se define entonces $X_n^* = F_n^{-1}(U)$ donde F_n^{-1} es la inversa generalizada de F_n, es decir: $F_n(t) = inf\{s : F_n(s) \geq t\}$. Entonces $X_n^* \sim F_n$. Análogamente se define $X^* = F^{-1}(U)$, entonces $X^* \sim F$. Hay que probar que:

$$a_n(X_n^* - \mu) \underset{n\to+\infty}{\overset{c.s.}{\longrightarrow}} X^*$$

Por hipótesis,

$$a_n(X_n - \mu) \underset{n\to+\infty}{\Rightarrow^w} X$$

Es decir:

$$F_{a_n(X_n-\mu)}(s) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F(s) \quad \forall s \text{ pues } F \text{ es continua}$$

Además la convergencia es uniforme, es decir:

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} |F_{a_n(X_n-\mu)}(s) - F(s)| = C_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Entonces, se tiene que:

$$F(s) - C_n \leq F_{a_n(X_n-\mu)}(s) \leq F(s) + C_n \quad \forall s$$

Por otro lado:

$$F_{a_n(X_n-\mu)}(s) = \mathbf{P}(a_n(X_n - \mu) \leq s) = \mathbf{P}\left(X_n \leq \mu + \frac{s}{a_n}\right) = F_n\left(\mu + \frac{s}{a_n}\right)$$

Consideremos ahora $t \in [0,1]$ entonces,

$$\{s : F(s) - C_n \geq t\} \subseteq \left\{s : F_n(\mu + \frac{s}{a_n}) \geq t\right\} \subseteq \{s : F(s) + C_n \geq t\}$$

Y por lo tanto,

$$\{s : F(s) \geq t + C_n\} \subseteq \left\{s : F_n(\mu + \frac{s}{a_n}) \geq t\right\} \subseteq \{s : F(s) \geq t - C_n\}$$

Entonces;

$$\left\{\mu + \frac{s}{a_n} : F(s) \geq t + C_n\right\} \subseteq \{s : F_n(s) \geq t\} \subseteq \left\{\mu + \frac{s}{a_n} : F(s) \geq t - C_n\right\}$$

Tomando ínfimo en s, resulta que:

$$\inf_s \left\{\mu + \frac{s}{a_n} : F(s) \geq t + C_n\right\} \geq \inf_s \{s : F_n(s) \geq t\} \geq \inf_s \left\{\mu + \frac{s}{a_n} : F(s) \geq t - C_n\right\}$$

Es decir,

$$\mu + \frac{1}{a_n} F^{-1}(t + C_n) \geq F_n^{-1}(t) \geq \mu + \frac{1}{a_n} F^{-1}(t - C_n)$$

Entonces,

$$F^{-1}(t + C_n) \geq a_n(F_n^{-1}(t) - \mu) \geq F^{-1}(t - C_n)$$

Sabemos que F es continua y creciente, que $t + C_n \downarrow t$ y que $t - C_n \uparrow t$, entonces

$$F^{-1}(t + C_n) \downarrow F(t) \qquad \text{y} \quad F^{-1}(t - C_n) \uparrow F(t)$$

Por lo tanto:

$$a_n(F_n^{-1}(t) - \mu) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F^{-1}(t)$$

salvo que F sea constante en un intervalo de la forma $(F^{-1}(t), F^{-1}(t) + \delta_t)$ con $\delta_t > 0$. En este caso consideramos el conjunto $\mathcal{C} = \{t :\ \text{F es constante en } (F^{-1}(t), F^{-1}(t) + \delta_t)\}$. Sabemos además que si $t, t' \in \mathcal{C}$ y $t \neq t'$, entonces:

$$(F^{-1}(t), F^{-1}(t) + \delta_t) \cap (F^{-1}(t'), F^{-1}(t') + \delta_{t'}) = \emptyset$$

Pues en caso contrario, existe $T \in \left(F^{-1}(t), F^{-1}(t) + \delta_t\right) \cap \left(F^{-1}(t'), F^{-1}(t') + \delta_{t'}\right)$ y por lo tanto

$$t = F(F^{-1}(t) = F(F^{-1}(T) = F(F^{-1}(t') = t'$$

y esto es absurdo. Entonces $\mathcal{C}$ es unión de intervalos no vacíos y disjuntos, por lo tanto $\mathcal{C}$ es numerable, con lo cual $\mathbf{P}(U \in \mathcal{C}) = 0$. Entonces, probamos que $\forall t \in \mathcal{C}^c$

$$a_n(F_n^{-1}(t) - \mu) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F^{-1}(t)$$

Es decir:

$$\mathbf{P}(\{t : a_n(F_n^{-1}(t) - \mu) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F^{-1}(t)\}) = 1$$

Y esto significa que:

$$a_n(X_n^* - \mu) \underset{n\to+\infty}{\overset{c.s.}{\longrightarrow}} X^*$$

$\blacksquare$

Lema 8.7 *Considerando ψ como en 8.6, g como en 8.5 y B como en 8.4, se tiene que:*

1. $\dfrac{\partial\psi(\Lambda)}{\partial\lambda_{ij}} = \dfrac{1}{stg(\Lambda)}\dfrac{\partial g(\Lambda)}{\partial\lambda_{ij}}$

2. $\dfrac{\partial g(\Lambda)}{\partial\lambda_{ij}} = \dfrac{\partial\pi(\Lambda)}{\partial\lambda_{ij}}B(\Lambda)\mathbf{1} + \pi(\Lambda)\left(\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}(Q(\Lambda)+Hs)^r V^{ij}(Q(\Lambda)+Hs)^{l-1-r}\right)\mathbf{1}$

Demostración:

1. Definimos $\psi(\Lambda) = \dfrac{1}{st}\log(g(\Lambda))$, entonces:

$$\frac{\partial\psi(\Lambda)}{\partial\lambda_{ij}} = \frac{1}{stg(\Lambda)}\frac{\partial g(\Lambda)}{\partial\lambda_{ij}}$$

2. Por definición $g(\Lambda) = \pi(\Lambda)B(\Lambda)\mathbf{1} : \mathbb{R}^{k(k-1)} \longrightarrow \mathbb{R}$

   Entonces:

$$\frac{\partial g(\Lambda)}{\partial\lambda_{ij}} = \frac{\partial\pi(\Lambda)}{\partial\lambda_{ij}}(B(\Lambda)\mathbf{1}) + \pi(\Lambda)\frac{\partial(B(\Lambda)\mathbf{1})}{\partial\lambda_{ij}}$$

$$B(\Lambda)\mathbf{1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}+b_{12}+\ldots+b_{1k} \\ b_{21}+b_{22}+\ldots+b_{2k} \\ \vdots \\ b_{k1}+b_{k2}+\ldots+b_{kk}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(B(\Lambda)\mathbf{1})}{\partial\lambda_{ij}} &= \left(\frac{\partial(b_{11}+b_{12}+\ldots+b_{1k})}{\partial\lambda_{ij}},\ldots,\frac{\partial(b_{k1}+b_{k2}+\ldots+b_{kk})}{\partial\lambda_{ij}}\right)\\ &= \frac{\partial B(\Lambda)}{\partial\lambda_{ij}}\mathbf{1}\end{aligned}$$

   Entonces:

$$\frac{\partial g(\Lambda)}{\partial\lambda_{ij}} = \frac{\partial\pi(\Lambda)}{\partial\lambda_{ij}}B(\Lambda)\mathbf{1} + \pi(\Lambda)\frac{\partial B(\Lambda)}{\partial\lambda_{ij}}\mathbf{1} \tag{8.9}$$

   Por otro lado, $B(\Lambda) = \exp[(Q(\Lambda)+Hs)t] : \mathbb{R}^{k(k-1)} \longrightarrow \mathcal{M}_{k\times k}$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial B(\Lambda)}{\partial\lambda_{ij}} &= DB(\Lambda)e_{ij} = D\exp[(Q(\Lambda)+Hs)t]D[(Q(\Lambda)+Hs)t]e_{ij}\\ &= D\exp[(Q(\Lambda)+Hs)t]\left(\frac{\partial Q(\Lambda)}{\partial\lambda_{ij}}\right)\end{aligned}$$

   Usando que $D_B\exp(A) = \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{A^rBA^{l-1-r}}{l!}$, resulta que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial B(\Lambda)}{\partial\lambda_{ij}} &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{1}{l!}[(Q(\Lambda)+Hs)t]^r\frac{\partial Q(\Lambda)}{\partial\lambda_{ij}}[(Q(\Lambda)+Hs)t]^{l-1-r}\\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}(Q(\Lambda)+Hs)^rV^{ij}(Q(\Lambda)+Hs)^{l-1-r} \qquad (8.10)\end{aligned}$$

con $V^{ij} = \dfrac{\partial Q(\Lambda)}{\partial \lambda_{ij}}$ donde

$$(V^{ij})_{lm} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = l \text{ y } j = m \neq i \\ -1 & \text{si } l = i = m \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definiendo

$$A(\Lambda) = \frac{t^{l-1}}{l!}(Q(\Lambda) + Hs)^r V^{ij} (Q(\Lambda) + Hs)^{l-1-r}$$

y sustituyendo 8.10 en 8.9 se obtiene el resultado buscado:

$$\frac{\partial g(\Lambda)}{\partial \lambda_{ij}} = \frac{\partial \pi(\Lambda)}{\partial \lambda_{ij}} B(\Lambda)\mathbf{1} + \pi(\Lambda)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{l-1} A(\Lambda)\right)\mathbf{1}$$

■

Observación 8.8 *De la proposición anterior se deduce que,*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(\Lambda)}{\partial \lambda_{ij}} &= \frac{1}{stg(\Lambda)}\frac{\partial g(\Lambda)}{\partial \lambda_{ij}} \\ &= \frac{1}{st\pi(\Lambda)B(\Lambda)\mathbf{1}}\left(\frac{\partial \pi(\Lambda)}{\partial \lambda_{ij}} B(\Lambda)\mathbf{1} + \pi(\Lambda)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{l-1} A(\Lambda)\right)\mathbf{1}\right) \end{aligned}$$

Ahora sí vamos a demostrar el teorema 8.4

Demostración:

1. Hay que probar que:

   $$\sqrt{nu}\,(\alpha^n(s,t) - \alpha(s,t)) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow^w} N(\vec{0}, \sigma^2)$$

   donde $\sigma^2 = \nabla\psi(\Lambda)\Sigma\nabla\psi(\Lambda)^t$

   Por Corolario 8.2:

   $$\sqrt{n}\left(\hat{\lambda}^n_{ij} - \lambda_{ij}\right) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow^w} N(\vec{0}, \Sigma)$$

   con $\Sigma = \frac{\lambda_{ij}}{\pi(i)}\mathbb{I}_{k(k-1)}$. Por definición $\Lambda^n = (\hat{\lambda}^n_{ij})_{1\leq i\neq j\leq k}$, entonces se tiene que:

   $$\sqrt{n}\,(\Lambda_n - \Lambda) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow^w} N(\vec{0}, \Sigma)$$

   Aplicando Lema 8.5 con $G = \psi$ se obtiene que:

   $$\sqrt{n}\,(\alpha^n(s,t) - \alpha(s,t)) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow^w} N(\vec{0}, \nabla\psi(\Lambda)\Sigma\nabla\psi(\Lambda)^t)$$

   Entonces:

   $$\sqrt{n}\,(\alpha^n(s,t) - \alpha(s,t)) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow^w} N(\vec{0}, \sigma^2)$$

   con

   $$\sigma^2 = \nabla\psi(\Lambda)\Sigma\nabla\psi(\Lambda)^t$$

2. Como se tiene $\Sigma = \frac{\lambda_{ij}}{\pi(i)}\mathbf{I}_{k(k-1)}$

$$\begin{aligned}
\nabla\psi(\Lambda)\Sigma(u)\nabla\psi(\Lambda)^t &= \frac{\partial\psi(\Lambda)^2}{\partial\lambda_{11}}\frac{\lambda_{11}}{\pi(1)} + \ldots + \frac{\partial\psi(\Lambda)^2}{\partial\lambda_{1(k-1)}}\frac{\lambda_{1(k-1)}}{\pi(1)} + \ldots \\
&+ \frac{\partial\psi(\Lambda)^2}{\partial\lambda_{k1}}\frac{\lambda_{k1}}{\pi(k)} + \ldots + \frac{\partial\psi(\Lambda)^2}{\partial\lambda_{k(k-1)}}\frac{\lambda_{k(k-1)}}{\pi(k)} \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\partial\psi(\Lambda)}{\partial\lambda_{ij}}^2\frac{\lambda_{ij}}{\pi(i)} = \sum_{1\leq i\neq j\leq k}\frac{\partial\psi(\Lambda)}{\partial\lambda_{ij}}^2\frac{\lambda_{ij}}{\pi(i)}
\end{aligned}$$

Entonces, por lo probado en el Lema 8.7 y la Observación 8.8 resulta que:

$$\sigma^2 = \frac{1}{(st\pi(\Lambda)B(\Lambda)\mathbf{1})^2}\sum_{i,j\in D}\frac{\lambda_{ij}}{\pi(i)}\left[\frac{\partial\pi(\Lambda)}{\partial\lambda_{ij}}B(\Lambda)\mathbf{1} + \pi(\Lambda)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{l-1}A(\Lambda)\right)\mathbf{1}\right]^2$$

lo cual prueba el teorema.

■

9. Estimadores Consistentes

En esta sección vamos a encontrar estimadores consistentes, para cada uno de los parámetros que intervienen en la fórmula de la varianza obtenida en el Teorema 8.4, para finalmente obtener un estimador consistente de la varianza σ^2. Para esto vamos a probar el siguiente lema.

Lema 9.1 *$\hat{Q}$ es invertible con inversa $\hat{Q}^{-1}$ que es diferenciable y cumple*

$$D\hat{Q}^{-1}(\Lambda)(x) = -\hat{Q}^{-1}(\Lambda)DQ(\Lambda)\hat{Q}^{-1}(x)$$

Demostración:
Supongo que $\hat{Q}$ es singular, entonces existe $\hat{u} \in \mathbb{R}^k$ no nulo tal que $\hat{Q}\hat{u} = 0$. Si $\hat{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{k} u_i^k > 0 \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{k-1}\lambda_{ij}u_j + u_k = 0$$

Entonces:

$$\sum_{j=1}^{k-1}\lambda_{ij}u_j = -u_k \quad \text{de donde} \quad \lambda_{ii}u_i + \sum_{j=1,j\neq i}^{k-1}\lambda_{ij}u_j = -u_k \quad \forall\ i = 1, 2\cdots, k-1$$

Por lo tanto:

$$-u_i + \sum_{j=1,j\neq i}^{k-1}\frac{-\lambda_{ij}}{\lambda_{ii}}u_j = \frac{u_k}{\lambda ii} \quad \forall\ i = 1, 2\cdots, k-1$$

Se sabe además que $\lambda_{ii} < 0$, entonces tomando $u_k \leq 0$, se tiene que:

$$-u_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{k-1} -\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ii}} u_j \geq 0 \qquad \forall\ i = 1, 2 \cdots, k-1$$

De hecho también vale para $i = k$, pues

$$-u_k + \sum_{j=1}^{k-1} -\lambda_{ij} u_j = -u_k + \sum_{j=1}^{k-1} -\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ii}} u_j = 0$$

Entonces, resulta que:

$$-u_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{k} -\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ii}} u_j \geq 0 \qquad \forall\ i = 1, 2 \cdots, k$$

Se va probar que si $\hat{u} \in Ker(\hat{Q})$ entonces $\hat{u}_j = u\ \forall j = 1, 2 \cdots, k$. Para esto, se definen:

$$b_i = \max_{j\neq i} u_j \quad , \quad a_i = \min_{j\neq i} u_j \quad y \quad c_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{k} -\left(\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ii}}\right) u_j \quad \text{para} \quad i = 1, 2 \cdots, k$$

Además sabemos por definición de generador infinitesimal que $-\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ii}} \geq 0 \quad \forall j \neq i$ y por ser una cadena conservativa $\sum_{j=i}^{k} \lambda_{ij} = 0$, lo cual implica que $\sum_{j=i, j\neq i}^{k} \lambda_{ij} = -\lambda_{ii}$. Por lo tanto, $\sum_{j=i}^{k} -\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ii}} = 1$. Además por definición de a_i se tiene que:

$$u_j \geq a_i \quad \text{entonces} \quad c_i \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{k} -\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ii}} a_i = a_i \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{k} -\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ii}} \right) = a_i$$

Análogamente,

$$c_i \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{k} -\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ii}} b_i = b_i \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{k} -\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ii}} \right) = b_i$$

Por lo tanto,

$$c_i \in [a_i, b_i]$$

Además si $c_i = a_i$ para $\lambda_{ij} \neq 0$ tiene que ser $u_j = a_i$ entonces:

$$C_i = \{j \neq i : \lambda_{ij} \neq 0\} = \{j \neq i : u_j = a_i\}$$

Análogamente, si $c_i = b_i$ para $\lambda_{ij} \neq 0$ tiene que ser $u_j = b_i$ entonces:

$$C_i = \{j \neq i : \lambda_{ij} \neq 0\} = \{j \neq i : u_j = b_i\}$$

Por otro lado se tiene que:

$$-u_i + b_i \geq -u_i + c_i \geq 0 \quad \text{entonces} \quad u_i \leq b_i \quad \forall\ i = 1, 2 \cdots, k$$

Y como $b_i = \max_{j\neq i} u_j$, resulta que $b_i = \max_{j} u_j$ y entonces $u_i = u_{j(i)}$ para algún $j(i) \neq i$.

Sea $u = \max_{1\leq j\leq k} u_j$, entonces existen $i \geq 2$ e $i_1, i_2, \cdots, i_r$ tal que

$$u_{i_1} = u_{i_2} = \cdots = u_{i_r} = u$$

lo cual implica que $b_{i_1} = b_{i_2} = \cdots = b_{i_r}$ y por lo tanto $u_{i_q} = b_{i_q}$ con $q = 1, \cdots, r$. Para $q = 1, \cdots, r$ sea $C_{iq} = \{j \neq i_q : u_j = u\} = \{i_1, i_2, \cdots, i_r\}/\{i_q\}$, se probó que:

$$\{j \neq i_q : \lambda_{i_q j} \neq 0\} = \{j \neq i_q : u_j = b_{i_q}\} = \{j \neq i_q : u_j = u\}$$

Entonces, se tiene que:

$$\{j \neq i_q : \lambda_{i_q j} \neq 0\} = \{i_1, i_2, \cdots, i_r\}/\{i_q\}$$

Y por lo tanto:

$$\lambda_{i_q j} = 0 \quad \text{si} \quad j \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_r\}/\{i_q\}$$

Por otro lado, $C = \{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$ es un conjunto cerrado de estados y la cadena es irreducible, entonces $C = \{1, 2, \cdots, k\}$ y por lo tanto $u_j = u \ \forall j = 1, 2 \cdots, k$. Se tiene además que $u \neq 0$ (pues $u_j = u \quad \forall\ i = 1, 2 \cdots, k$ y $\hat{u} \neq \overrightarrow{0}$) y $\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{ij} u_j = -u_k$, entonces $\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{ij} u = -u$, de donde $u \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{ij} = -u$, lo cual implica que $-\lambda_{ik} u = -u \ \forall\ i = 1, 2 \cdots, k$ y por lo tanto $\lambda_{ik} = 1 \ \forall i$. En particular $\lambda_{kk} = 1$ y esto es absurdo pues $\lambda_{kk} < 0$. Entonces probamos que $\hat{Q}$ es no singular.

Vamos a probar ahora la segunda parte del lema. Sabemos que:

$$\hat{Q}(\Lambda)\hat{Q}^{-1}(\Lambda) = I_{k\times k}$$

Entonces,

$$D(\hat{Q}(\Lambda)\hat{Q}^{-1}(\Lambda)) = O \quad \text{matriz nula}$$

Por lo tanto:

$$D\hat{Q}(\Lambda)\hat{Q}^{-1}(\Lambda) + \hat{Q}(\Lambda)D\hat{Q}^{-1}(\Lambda) = O$$

Entonces:

$$D\hat{Q}^{-1}(\Lambda) = -\hat{Q}^{-1}(\Lambda)D\hat{Q}(\Lambda)\hat{Q}^{-1}(\Lambda)$$

pues vale la regla del producto y se probó que $\hat{Q}$ es no singular

■

Proposición 9.2 *Sea como antes* $\Lambda^n = (\hat{\lambda}^n_{ij})_{1\leq i\neq j\leq k}$, *entonces:*

1. $p_n = e_k \hat{Q}^{-1}(\Lambda_n)$ *es un estimador consistente de* $\pi(\Lambda)$
2. $dp^{ij}_n = -e_k \hat{Q}^{-1}(\Lambda_n) \dfrac{\partial \hat{Q}(\Lambda)}{\partial \Lambda_{ij}} \hat{Q}^{-1}(\Lambda_n(u))$ *es un estimador consistente de* $\dfrac{\partial \pi(\Lambda)}{\partial \lambda_{ij}}$
3. $B_n = \sum_{l=0}^{m_n} \dfrac{t^l (Q(\Lambda_n)) + Hs)^l}{l!}$ *es un estimador consistente de* $B = \exp[(Q(\Lambda) + Hs)t]$
4. $S_n = stp_n B_n \mathbf{1}$ *es un estimador consistente de* $S = st\pi(\Lambda)B(\Lambda)\mathbf{1}$

Demostración:

1. Vimos que $\pi\hat{Q} = e_k$, entonces por el lema anterior $\pi = e_k\hat{Q}^{-1}$. Como,
$$\Lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} \Lambda$$
y $\hat{Q}(\Lambda)$ es una función continua, entonces:
$$\hat{Q}(\Lambda_n) \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} \hat{Q}(\Lambda)$$
Por otro lado invertir también es una función continua, entonces para n suficientemente grande $\hat{Q}(\Lambda_n)$ es invertible, y se cumple que
$$\hat{Q}^{-1}(\Lambda_n) \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} \hat{Q}^{-1}(\Lambda)$$
Por lo tanto $p_n = e_k\hat{Q}^{-1}(\Lambda_n)$ es un estimador consistente de $\pi(\Lambda)$.

2. Sabemos que, $\pi(\Lambda) = e_k\hat{Q}^{-1}$, entonces
$$\frac{\partial\pi(\Lambda)}{\partial\lambda_{ij}} = e_k\frac{\partial\hat{Q}^{-1}(\Lambda)}{\partial\lambda_{ij}}$$
En el Lema 9.1 se probó que:
$$D\hat{Q}^{-1}(\Lambda) = -\hat{Q}^{-1}(\Lambda)D\hat{Q}(\Lambda)\hat{Q}^{-1}(\Lambda)$$
Entonces:
$$\frac{\partial\hat{Q}^{-1}(\Lambda)}{\partial\lambda_{ij}} = -\hat{Q}^{-1}(\Lambda)\frac{\partial\hat{Q}(\Lambda)}{\partial\lambda_{ij}}\hat{Q}^{-1}(\Lambda)$$
Además sabemos que $\hat{Q}^{-1}(\Lambda_n)$es un estimador consistente de$\hat{Q}^{-1}(\Lambda)$. Entonces:
$$dp_n^{ij} = -e_k\hat{Q}^{-1}(\Lambda_n)\frac{\partial\hat{Q}(\Lambda)}{\partial\lambda_{ij}}\hat{Q}^{-1}(\Lambda_n(u)) \quad \text{es un estimador consistente de} \quad \frac{\partial\pi(\Lambda)}{\partial\lambda_{ij}}$$

3. Hay que probar que
$$B_n = \sum_{l=0}^{m_n}\frac{t^l}{l!}(Q(\Lambda_n)+Hs)^l \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} B(\Lambda) = \exp[(Q(\Lambda)+Hs)t] = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^l}{l!}(Q(\Lambda)+Hs)^l$$
$$\begin{aligned} B_n - B &= \sum_{l=0}^{m_n}\frac{t^l}{l!}(Q(\Lambda_n)+Hs)^l - \sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^l}{l!}(Q(\Lambda_n)+Hs)^l \\ &\leq \sum_{l=0}^{m_n}\frac{t^l}{l!}[(Q(\Lambda_n)+Hs)^l - (Q(\Lambda)+Hs)^l] + \sum_{l=m_n+1}^{\infty}\frac{t^l}{l!}(Q(\Lambda)+Hs)^l \end{aligned}$$
El segundo término $\sum_{l=m_n+1}^{\infty}\frac{t^l}{l!}(Q(\Lambda)+Hs)^l$ es la cola de una serie convergente y por lo tanto tiende a cero cuando n tiende a infinito.
Para estudiar el primer término se define $f : \mathcal{M}_{k\times k} \to \mathcal{M}_{k\times k}$ tal que $f(M) = M^l$, entonces:
$$Df_A(B) = \sum_{i=0}^{l-1}A^iBA^{l-i-1}$$

Por lo tanto se tiene que:

$$
\begin{aligned}
f(Q(\Lambda_n)+Hs)-f(Q(\Lambda)+Hs) &= D_{\bar{Q}_n} f(Q(\Lambda_n)-Q(\Lambda)) \\
&= \sum_{i=0}^{l-1} \bar{Q}_n^i (Q(\Lambda_n)-Q(\Lambda))\bar{Q}_n^{l-i-1}
\end{aligned}
$$

con $\bar{Q}_n$ entre $Q(\Lambda_n$ y $Q(\Lambda)$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
||\sum_{l=0}^{m_n}\frac{t^l}{l!}((Q(\Lambda_n)+Hs)^l-(Q(\Lambda)+Hs)^l)|| &= ||\sum_{l=0}^{m_n}\frac{t^l}{l!}\sum_{i=0}^{l-1}\bar{Q}_n^i(Q(\Lambda_n)-Q(\Lambda))\bar{Q}_n^{l-i-1}|| \\
&\leq \sum_{l=0}^{m_n}\frac{t^l}{l!}\sum_{i=0}^{l-1}||\bar{Q}_n||^i||Q(\Lambda_n)-Q(\Lambda)||||\bar{Q}_n||^{l-i-1} \\
&= \sum_{l=0}^{m_n}\frac{t^l}{l!}\sum_{i=0}^{l-1}||\bar{Q}_n||^{l-1}||Q(\Lambda_n)-Q(\Lambda)|| \\
&= \sum_{l=0}^{m_n}\frac{t^l}{l!}l||\bar{Q}_n||^{l-1}||Q(\Lambda_n)-Q(\Lambda)|| \\
&= ||Q(\Lambda_n)-Q(\Lambda)||t\sum_{l=0}^{m_n}\frac{t^{l-1}}{(l-1)!}||\bar{Q}_n||^{l-1}
\end{aligned}
$$

Con el mismo argumento que antes (serie convergente), se prueba que $\sum_{l=0}^{m_n}\frac{t^{l-1}}{(l-1)!}||\bar{Q}_n||^{l-1}$ está acotada y como $||Q(\Lambda_n)-Q(\Lambda)||$ tiende a cero con n, resulta que:

$$
B_n - B = \sum_{l=0}^{m_n}\frac{t^l}{l!}(Q(\Lambda_n)+Hs)^l - \sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^l}{l!}(Q(\Lambda_n)+Hs)^l
$$

tiende a cero cuando n tiende a infinito, que es lo que se quería probar.

4. Esto se deduce directamente de las partes 1 y 3 ; pues se demostró que p_n es un estimador consistente de $\pi(\Lambda)$ y B_n es un estimador consistente de $B(\Lambda)$.

■

10. Intervalo de Confianza

En esta sección, vamos a estimar la varianza obtenida en el teorema 8.4 y calcular el Intervalo de confianza correspondiente.

10.1. Estimación de la Varianza

Teorema 10.1 *Sean $\hat{\lambda}^n_{ij}$ EMV de λ_{ij}, S_n, p_n, dp_n y B_n los estimadores vistos en la proposición 9.2 y m_n una sucesión de reales positivos tal que $m_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$; entonces*

$$\sigma^2_n = \frac{1}{S^2_n}\sum_{i,j\in D}\frac{\hat{\lambda}^n_{ij}}{p_n(i)}\left[dp^{ij}_n B_n \mathbf{1} + p_n \sum_{l=0}^{m_n}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}(Q(\Lambda_n)+Hs)^r V^{ij}(Q(\Lambda_n)+Hs)^{l-r-1}\right]^2$$

es un estimador consistente de σ^2.

Demostración:
Basta ver que:

$$\sum_{l=0}^{m_n}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}(Q(\Lambda_n)+Hs)^r V^{ij}(Q(\Lambda_n)+Hs)^{l-r-1}$$

converge casi seguramente a

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}(Q(\Lambda)+Hs)^r V^{ij}(Q(\Lambda)+Hs)^{l-r-1}$$

Definiendo:

$$T(l,r)(\Lambda) = (Q(\Lambda)+Hs)^r V^{ij}(Q(\Lambda)+Hs)^{l-r-1}$$
$$T(l,r)(\Lambda_n) = (Q(\Lambda_n)+Hs)^r V^{ij}(Q(\Lambda_n)+Hs)^{l-r-1}$$

resulta suficiente probar que:

$$\sum_{l=0}^{m_n}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}T(l,r)(\Lambda_n) \underset{n\to\infty}{\overset{c.s.}{\longrightarrow}} \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}T(l,r)(\Lambda)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{m_n}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}T(l,r)(\Lambda_n) - \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}T(l,r)(\Lambda) &= \sum_{l=0}^{m_n}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}(T(l,r)(\Lambda_n) - T(l,r)(\Lambda)) - \\ &\sum_{l=m_n+1}^{\infty}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}T(l,r)(\Lambda)\end{aligned}$$

Hay que probar que esta diferencia tiende a cero casi seguramente con n. Miremos el segundo término;

$$\begin{aligned}
||\sum_{l=m_n+1}^{\infty}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}T(l,r)(\Lambda)|| &\leq \sum_{l=m_n+1}^{\infty}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}||T(l,r)(\Lambda)|| \\
&\leq \sum_{l=m_n+1}^{\infty}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}||(Q(\Lambda)+Hs)^r V^{ij}(Q(\Lambda)+Hs)^{l-r-1}|| \\
&\leq \sum_{l=m_n+1}^{\infty}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}||(Q(\Lambda)+Hs)||^r||V^{ij}||||(Q(\Lambda)+Hs)||^{l-r-1} \\
&= ||V^{ij}||\sum_{l=m_n+1}^{\infty}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}||(Q(\Lambda)+Hs)||^{l-1} \\
&= ||V^{ij}||\sum_{l=m_n+1}^{\infty}l\frac{t^{l-1}}{l!}||(Q(\Lambda)+Hs)||^{l-1} \\
&= ||V^{ij}||\sum_{l=m_n+1}^{\infty}\frac{t^{l-1}}{(l-1)!}||(Q(\Lambda)+Hs)||^{l-1}
\end{aligned}$$

Además $\sum_{l=m_n+1}^{\infty}\frac{t^{l-1}}{(l-1)!}||(Q(\Lambda)+Hs)||^{l-1}$ es la cola de una serie convergente a $e^{t||Q(\Lambda)+Hs||}$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{l=m_n+1}^{\infty}\frac{t^{l-1}}{(l-1)!}||(Q(\Lambda)+Hs)||^{l-1}=0$$

y por lo tanto:

$$\sum_{l=m_n+1}^{\infty}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}T(l,r)(\Lambda)\xrightarrow[n\to\infty]{c.s.}0$$

Falta ver entonces que,

$$\sum_{l=0}^{m_n}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}(T(l,r)(\Lambda_n)-T(l,r)(\Lambda))\xrightarrow[n\to\infty]{c.s.}0 \tag{10.1}$$

$$||\sum_{l=0}^{m_n}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}(T(l,r)(\Lambda_n)-T(l,r)(\Lambda))||\leq\sum_{l=0}^{m_n}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}||(T(l,r)(\Lambda_n)-T(l,r)(\Lambda))||$$

Se considera

$$T(l,r)(\Lambda_n)-T(l,r)(\Lambda)=D_{\bar{\Lambda}_n}T(l,r)(\Lambda_n-\Lambda)$$

donde $D_{\bar{\Lambda}_n}T(l,r)(\Lambda_n-\Lambda)$ es el diferencial de la función $T(l,r)(\Lambda)$ en el punto $\bar{\Lambda}_n$ (entre Λ y Λ_n) aplicado a $\Lambda_n-\Lambda$. Por otro lado:

$$\begin{aligned}
T(l,r)(\Lambda) &= (Q(\Lambda)+Hs)^r V^{ij}(Q(\Lambda)+Hs)^{l-r-1} \\
&= F(l,r)(\Lambda)V^{ij}G(l,r)(\Lambda)
\end{aligned}$$

con $F(l,r)(\Lambda) = (Q(\Lambda) + Hs)^r$ y $G(l,r)(\Lambda) = (Q(\Lambda) + Hs)^{l-r-1}$. Entonces:

$$D_{\bar{\Lambda}_n}T(l,r)(\Lambda) = D_{\bar{\Lambda}_n}F(l,r)(\Lambda)V^{ij}G(l,r)(\bar{\Lambda}_n) + F(l,r)(\bar{\Lambda}_n)V^{ij}D_{\bar{\Lambda}_n}G(l,r)(\Lambda) \tag{10.2}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} ||D_{\bar{\Lambda}_n}T(l,r)(\Lambda_n - \Lambda)|| &\leq ||D_{\bar{\Lambda}_n}F(l,r)(\Lambda_n - \Lambda)||||V^{ij}||||G(l,r)(\bar{\Lambda}_n)|| \\ &+ ||F(l,r)(\bar{\Lambda}_n)||||V^{ij}||||D_{\bar{\Lambda}_n}G(l,r)(\Lambda_n - \Lambda)|| \end{aligned} \tag{10.3}$$

Además $F(l,r)(\Lambda) = G_r(A(\Lambda))$ siendo $G_r(B) = B^r$ y $A(\Lambda) = Q(\Lambda) + Hs$. Entonces usando que,

$$D_A G_r(B) = \sum_{j=0}^{r-1} A^i B A^{r-j-i}$$

resulta que:

$$\begin{aligned} D_{\bar{\Lambda}_n}F(l,r)(\Lambda_n - \Lambda) &= \sum_{j=0}^{r-1}(Q(\bar{\Lambda}_n) + Hs)^j D_{\bar{\Lambda}_n}(Q(\Lambda_n - \Lambda) + Hs)(Q(\bar{\Lambda}_n) + Hs)^{r-j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{r-1}(Q(\bar{\Lambda}_n) + Hs)^j D_{\bar{\Lambda}_n}Q(\Lambda_n - \Lambda)(Q(\bar{\Lambda}_n) + Hs)^{r-j-1} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} ||D_{\bar{\Lambda}_n}F(l,r)(\Lambda_n - \Lambda)|| &\leq \sum_{j=0}^{r-1}||Q(\bar{\Lambda}_n) + Hs||^j||D_{\bar{\Lambda}_n}Q(\Lambda_n - \Lambda)||||Q(\bar{\Lambda}_n) + Hs||^{r-1} \\ &= r||Q(\bar{\Lambda}_n) + Hs||^{r-1}||D_{\bar{\Lambda}_n}Q(\Lambda_n - \Lambda)|| \\ &= r||Q(\bar{\Lambda}_n) + Hs||^{r-1}||Q(\Lambda_n - \Lambda)|| \end{aligned} \tag{10.4}$$

Análogamente:

$$D_{\bar{\Lambda}_n}G(l,r)(\Lambda_n - \Lambda) = \sum_{j=0}^{l-r-2}(Q(\bar{\Lambda}_n) + Hs)^j D_{\bar{\Lambda}_n}Q(\Lambda_n - \Lambda)(Q(\bar{\Lambda}_n) + Hs)^{l-r-j-2}$$

Y por lo tanto,

$$\begin{aligned} ||D_{\bar{\Lambda}_n}G(l,r)(\Lambda_n - \Lambda)|| &\leq \sum_{j=0}^{l-r-2}||Q(\bar{\Lambda}_n) + Hs||^j||D_{\bar{\Lambda}_n}Q(\Lambda_n - \Lambda)||||(Q(\bar{\Lambda}_n) + Hs||^{l-r-j-2} \\ &= (l-r-1)||(Q(\bar{\Lambda}_n) + Hs||^{l-r-2}||Q(\Lambda_n - \Lambda)|| \end{aligned} \tag{10.5}$$

Sustituyendo 10.4 y 10.5 en 10.3 resulta que:

$$\begin{aligned} ||D_{\bar{\Lambda}_n}T(l,r)(\Lambda_n - \Lambda)|| &\leq r||Q(\bar{\Lambda}_n) + Hs||^{r-1}||Q(\Lambda_n - \Lambda)||||V^{ij}||||G(l,r)(\bar{\Lambda}_n)|| \\ &+ ||F(l,r)(\bar{\Lambda}_n)||||V^{ij}||(l-r-1)||(Q(\bar{\Lambda}_n) + Hs||^{l-r-2}||Q(\Lambda_n - \Lambda)|| \\ &= r||Q(\bar{\Lambda}_n) + Hs||^{r-1}||Q(\Lambda_n - \Lambda)||||V^{ij}||||Q(\bar{\Lambda}_n) + Hs||^{l-r-1} \\ &+ ||Q(\bar{\Lambda}_n) + Hs||^r||V^{ij}||(l-r-1)||(Q(\bar{\Lambda}_n) + Hs||^{l-r-2}||Q(\Lambda_n - \Lambda)|| \\ &= (l-1)||V^{ij}||||Q(\Lambda_n - \Lambda)||||(Q(\bar{\Lambda}_n) + Hs||^{l-2} \end{aligned}$$

Volviendo entonces a 10.1, resulta que:

$$\begin{aligned}
||\sum_{l=0}^{m_n}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}(T(l,r)(\Lambda_n)-T(l,r)(\Lambda))|| &\leq \sum_{l=0}^{m_n}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}||D_{\bar{\Lambda}_n}T(l,r)(\Lambda_n-\Lambda)|| \\
&\leq \sum_{l=0}^{m_n}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}(l-1)||V^{ij}||||Q(\Lambda_n-\Lambda)||||(Q(\bar{\Lambda}_n)+Hs||^{l-2} \\
&= ||V^{ij}||||Q(\Lambda_n-\Lambda)||\sum_{l=0}^{m_n}l(l-1)\frac{t^{l-1}}{l!}||(Q(\bar{\Lambda}_n)+Hs||^{l-2} \\
&= ||V^{ij}||||Q(\Lambda_n-\Lambda)||t\sum_{l=2}^{m_n+2}\frac{t^{l-2}}{(l-2)!}||(Q(\bar{\Lambda}_n)+Hs||^{l-2} \\
&= ||V^{ij}||||Q(\Lambda_n-\Lambda)||t\sum_{l=0}^{m_n}\frac{t^{l}}{l!}||(Q(\bar{\Lambda}_n)+Hs||^{l}
\end{aligned}$$

$\Lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} \Lambda$, y Q es una función continua entonces $||Q(\Lambda_n-\Lambda)|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Por lo tanto para probar que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{l=0}^{m_n}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}(T(l,r)(\Lambda_n)-T(l,r)(\Lambda))=0$$

basta ver que $\sum_{l=0}^{m_n}\frac{t^l}{l!}||Q(\bar{\Lambda}_n)+Hs||^l$ está acotada. Sabemos que $Q(\bar{\Lambda}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} Q(\Lambda)$ y por lo tanto $||Q(\bar{\Lambda}_n)+Hs|| \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} ||Q(\Lambda)+Hs||$. Entonces existe una constante $M>0$ tal que

$$||Q(\bar{\Lambda}_n)+Hs|| \leq M \quad \forall n$$

pues toda sucesión convergente es acotada. Entonces, resulta que:

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{m_n}\frac{t^l}{l!}||Q(\bar{\Lambda}_n)+Hs||^l &\leq \sum_{l=0}^{m_n}\frac{t^l}{l!}M^l=\sum_{l=0}^{m_n}\frac{tM^l}{l!} \\
&\leq \sum_{l=0}^{+\infty}\frac{tM^l}{l!}=e^{tm}=C
\end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{l=0}^{m_n}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}(T(l,r)(\Lambda_n)-T(l,r)(\Lambda))=0$$

Entonces efectivamente se probó que:

$$\sum_{l=0}^{m_n}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}(Q(\Lambda_n)+Hs)^rV^{ij}(Q(\Lambda_n)+Hs)^{l-r-1}$$

converge casi seguramente a

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-1}}{l!}(Q(\Lambda)+Hs)^rV^{ij}(Q(\Lambda)+Hs)^{l-r-1}$$

■

Corolario 10.2 *Tomando $\alpha(s,t)$, $\alpha^n(s,t)$ y σ_n como antes, se tiene que:*

$$\sqrt{n}\left(\frac{\alpha^n(s,t)-\alpha(s,t)}{\sigma_n}\right) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow}^{w} N(0,\sigma^2) \tag{10.6}$$

Demostración:
En el teorema 8.4 se probó que:

$$\sqrt{n}(\alpha^n(s,t)-\alpha(s,t)) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow}^{w} N(0,\sigma^2)$$

Entonces:

$$\sqrt{n}\left(\frac{\alpha^n(s,t)-\alpha(s,t)}{\sigma}\right) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow}^{w} N(0,1)$$

Además se probó que σ_n converge casi seguramente a σ, de donde:

$$\sqrt{n}\left(\frac{\alpha^n(s,t)-\alpha(s,t)}{\sigma_n}\right) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow}^{w} N(0,1)$$

■

10.2. Intervalo de Confianza

Proposición 10.3 *Tomando $\alpha(s,t)$, $\alpha^n(s,t)$ y σ_n como antes y considerando el intervalo:*

$$I_\alpha(n) = \left[\alpha^n(s,t) - \frac{z_\epsilon\sigma_n}{\sqrt{n}}, \alpha^n(s,t) + \frac{z_\epsilon\sigma_n}{\sqrt{n}}\right]$$

donde z_ϵ es tal que $\mathbf{P}(N > z_\epsilon) = \frac{\epsilon}{2}$ con $N \sim N(0,1)$, resulta que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\alpha(s,t) \in I_\alpha(n)) = 1-\epsilon$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\alpha(s,t) \in I_\alpha(n)) &= \mathbf{P}\left(\alpha^n(s,t) - \frac{z_\epsilon\sigma_n}{\sqrt{n}} \leq \alpha(s,t) \leq \alpha^n(s,t) + \frac{z_\epsilon\sigma_n}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma_n}\left|\alpha^n(s,t)-\alpha(s,t)\right| \leq z_\epsilon\right)\end{aligned}$$

Y por el corolario 10.2 :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma_n}\left|\alpha^n(s,t)-\alpha(s,t)\right| \leq z_\epsilon\right) = \mathbf{P}(|N(0,1)| \leq z_\epsilon) = 1-\epsilon$$

Entonces,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\alpha(s,t) \in I_\alpha(n)\right) = 1-\epsilon$$

■

11. Procesos On-Off

Supongamos que nuestro proceso de llegada de trabajo es un flujo Markoviano modulado por una cadena de Markov con dos estados 0 (off) y h (on). Mientras la cadena está en el estado h se produce trabajo a tasa constante h, mientras está en el estado 0 no se produce trabajo.

El generador infinitesimal de la cadena es,

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \\ H &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde λ se interpretaba como la cantidad de transiciones del estado 0 al estado h por unidad de tiempo y μ como la cantidad de transiciones que salen de 0 por unidad de tiempo. La distribución invariante de la cadena es un vector de probabilidad π tal que $\pi Q = \vec{0}$, entonces:

$$\pi = \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}; \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)$$

Tomando como distribución inicial de la cadena la distribución invariante, el ancho de banda efectivo que resulta es:

$$\alpha(s,t) = \frac{1}{st} \log \left\{ \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}; \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right) \exp \left[\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu + hs \end{pmatrix} t \right] \mathbf{1} \right\} \tag{11.1}$$

Para terminar simulamos un flujo Markoviano modulado por un cadena de dos estados, tomando $\lambda = \mu = 0{,}01$, $h = 0{,}01$ y $n = 10000$. Los EMV obtenidos son $\lambda_n = 0{,}01012$ y $\mu_n = 0{,}01034$ y por lo tanto:

$$Q_n = \begin{pmatrix} -0{,}01012 & 0{,}01012 \\ 0{,}01034 & -0{,}01034 \end{pmatrix}$$

Utilizando las estimaciones vistas en las secciones anteriores, calculamos y graficamos $\alpha(s,t)$, $\alpha^n(s,t)$ y $\sigma_n(s,t)$ mediante programas realizados en MATLAB. Las figuras 1 y 2 muestran la importante similitud entre $\alpha^n(s,t)$ y $\alpha(s,t)$.

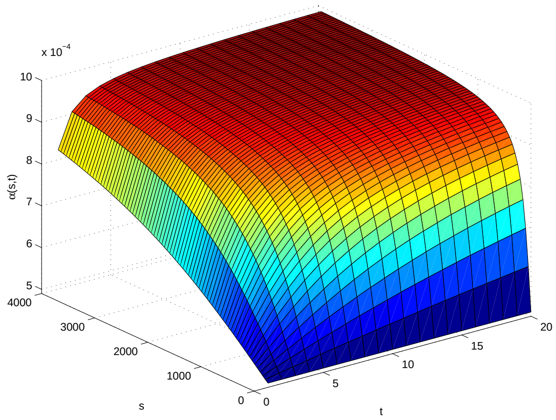

Figura 1: Ancho de banda efectivo para flujos Markovianos.

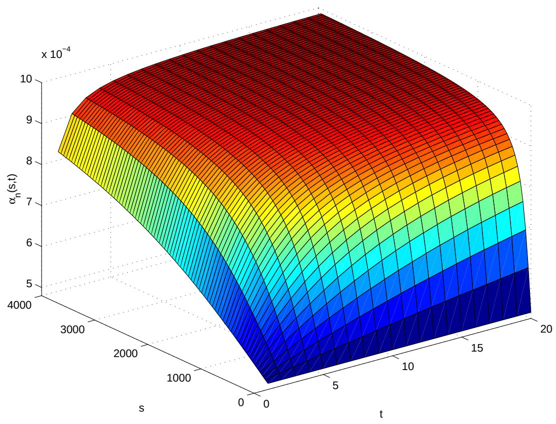

Figura 2: Estimación del ancho de banda efectivo para flujos Markovianos.

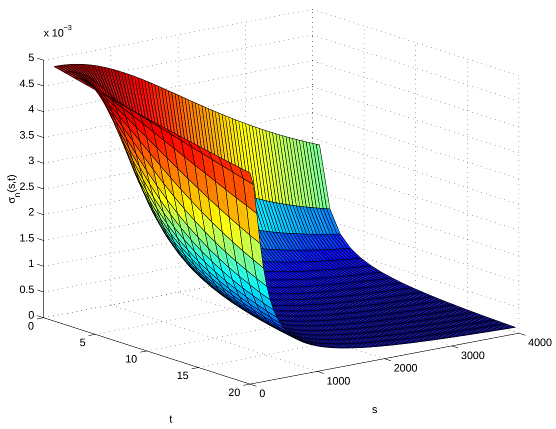

Figura 3: Varianza obtenida del TCL para el EB de un flujo Markoviano.

La figura 3 muestra que la varianza toma valores razonables y además es más pequeña para los valores de s y t donde $\alpha(s,t)$ muestra menor variabilidad. Finalmente, graficamos el ancho de banda efectivo verdadero junto con los extremos del Intervalo de Confianza al nivel $\alpha = 0{,}95$, es decir $I_\alpha(n) = \left[\alpha^n(s,t) - \frac{z_\epsilon \sigma_n}{\sqrt{n}}, \alpha^n(s,t) + \frac{z_\epsilon \sigma_n}{\sqrt{n}}\right]$ con $\epsilon = 0{,}05$ y observamos que efectivamente el valor de $\alpha(s,t)$ pertenece a dicho intervalo.

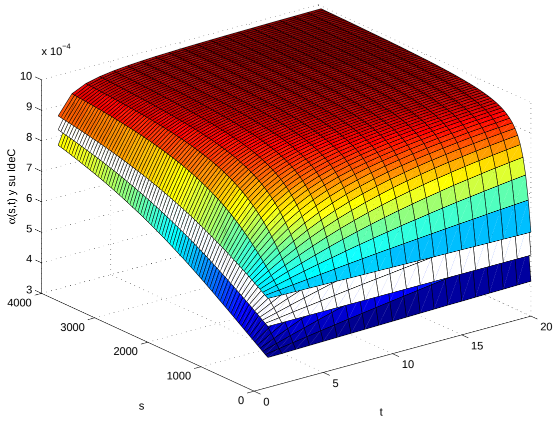

Figura 4: EB y los extremos del Intervalo de Confianza hallado en la sección anterior.

Referencias

[1] P.Billingsley (1979) *Probability and Measure*. New York: Wiley.

[2] P.Bremaud (1999) *Markov Chains*. New York: Springer.

[3] K.L.Chung (1960-67) *Markov Chains with stationary transition probabilities*. Berlin: Springer.

[4] F.P.Kelly (1996) Notes on Effective Bandwiths. *Stoch.Networks: Theory and Applications*, 141-168. Oxford, Oxford University Press.

[5] G.Kesidis, J.Walrand, C.S.Chang (1993) Effective Bandwiths for multiclass Markov fluids and other ATM sources. *IEEE ACM Trans.Networking 1*, **4**, 424-428.

[6] J.Pechiar, G.Perera, M.Simon (2002) Effective Bandwith estimation and testing for Markov sources. *Performance Evaluation*, **945**, 1-19

[7] D.J.Wischik (2000) Sample path large deviation for queues with many inputs. *Annals of Applied Probability*. Por aparecer.