



UNIVERSIDAD  
DE LA REPUBLICA  
URUGUAY



# Estudio y caracterización de inversión temporal acústica a través de medios de scattering múltiple

Yamil Abraham

Programa de Posgrado de Física  
Facultad de Ciencias  
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay  
Noviembre de 2017



UNIVERSIDAD  
DE LA REPUBLICA  
URUGUAY



# Estudio y caracterización de inversión temporal acústica a través de medios de scattering múltiple

Yamil Abraham

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado de Física, Facultad de Ciencias de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en Física.

Director:

Dr. Nicolás Benech

Montevideo – Uruguay

Noviembre de 2017

Abraham, Yamil

Estudio y caracterización de inversión temporal acústica a través de medios de scattering múltiple / Yamil Abraham. - Montevideo: Universidad de la República, Facultad de Ciencias, 2017.

XII, 93 p. 29, 7cm.

Director:

Nicolás Benech

Tesis de Maestría – Universidad de la República, Programa de Física, 2017.

Referencias bibliográficas: p. 75 – 78.

1. Inversión temporal, 2. Scattering múltiple, 3. Focalización de ondas acústicas, 4. Parámetros de transporte. I. Benech, Nicolás, . II. Universidad de la República, Programa de Posgrado de Física. III. Título.

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

---

Dra. Cecilia Cabeza

---

Dr. Wagner C.A. Pereira

---

Dr. Horacio Failache

---

Dr. Ariel Moreno

---

Dr. Nicolás Benech

Montevideo – Uruguay  
Noviembre de 2017

A mi abuela.

# Agradecimientos

A mi familia, por ayudarme en el día a día y por haber hecho posible este trabajo de tesis con su compañía y atención recurrente.

A mis amigos, por el cariño y estar ahí siempre.

A Nicolás, no solo por su papel como orientador de este trabajo, si no también por la disponibilidad y la dedicación mostrada, el tiempo invertido y por su especial atención.

A Gonzalo, por las largas y agotadoras tardes de trabajo incansable y por hacer más ameno el trayecto durante el posgrado.

A Carlos, por la disposición y las posibilidades brindadas.

Finalmente, quiero agradecer a la Comisión Académica de Posgrado por financiar este trabajo.

*It is for this reason that we find  
that co-existence, which could  
neither be in time alone, for time  
has no contiguity, nor in space  
alone, for space has no before,  
after, or now...*

Arthur Schopenhauer

## RESUMEN

Esta tesis aborda procesos de inversión temporal a través de medios de múltiple scattering mediante un análisis experimental y teórico. En particular, nos interesamos por la calidad de la focalización obtenida.

El trabajo comienza mostrando la focalización en medios homogéneos (agua), donde se introducen la focalización sintética y la inversión temporal. Se muestran resultados experimentales y se los compara entre ellos.

Luego se introducen los medios de múltiple scattering utilizando el formalismo de Green. Como modelo de medio de múltiple scattering utilizamos un sistema bidimensional formado por alambres de cobre dispuestos paralelos y en forma aleatoria en una grilla discreta. Estudiando el coeficiente de transmisión coherente, en función de la profundidad  $L$  del medio, se determina el recorrido libre medio elástico  $l_e$  para la densidad de dispersores escogida. Luego se realiza un estudio de la focalización por inversión temporal en términos de la profundidad  $L$  del medio aleatorio. Mostraremos que para valores de  $L \sim l_e$  es posible optimizar la focalización por retorno temporal utilizando una ley de retardos. Este método es la combinación de la focalización sintética y de la inversión temporal, donde en el proceso de inversión se introduce una ley de retardos en las señales.

Finalmente se trabaja con medios difusivos, donde  $L \gg l_e$ . Se determina la constante de difusión a través del cono de retrodifusión coherente y se realiza la inversión temporal en forma dinámica. Este último caso es el que produce mejor calidad de focalización. Se muestra teórica y experimentalmente que el ancho espacial del foco está relacionado a la correlación espacial de los dispersores dentro del medio de múltiple scattering. Como conclusión general del trabajo, se llega a una expresión teórica que muestra la relación entre la correlación espacial de difusores y el ancho focal obtenido por inversión temporal, verificada experimentalmente.

Palabras claves:



Inversión temporal, Scattering múltiple, Focalización de ondas acústicas,  
Parámetros de transporte.

## ABSTRACT

This thesis deals with time-reversal processes through multiple scattering media in an experimental and theoretical approach. In particular, we are interested in the quality of the targeting obtained.

The work begins by showing the focalization on homogeneous media (water), where the synthetic targeting and the time reversal are introduced. Experimental results are shown and compared.

Then, multiple scattering media are introduced by using Green's formalism. In the experiments, a 2D-system was used, conformed by copper rods arranged parallel and in a random way in a discrete grid. By studying the coherent transmission coefficient, based on the depth  $L$  of the medium, the elastic mean free path  $l_e$  is determined for the selected density of diffusers. Then, a study of the focalization by time reversal is made in terms of the depth  $L$  of the random medium. We'll show that for values of  $L \sim l_e$  it is possible to optimize the targeting by time reversal using a delay law. This method is the combination of synthetic targeting and time reversal, where a delay law is introduced in the time-reversed signals before send them back to the medium.

Then, we work with diffusive media where  $L \gg l_e$ . The diffusion constant is determined through the coherent backscattering cone and the time reversal is measured dynamically. As a general conclusion of this work, we arrive at a theoretical expression that shows the relationship between diffusers spatial correlation and the time reversal focusing width, verified experimentally.

Keywords:

Time reversal, Multiple scattering, Acoustic wave focalization, Transport parameters.

# Tabla de contenidos

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Focalización de ondas acústicas en medios homogéneos</b>	<b>5</b>
2.1	Ecuación de ondas . . . . .	5
2.2	Focalización sintética . . . . .	6
2.2.1	Análisis experimental . . . . .	9
2.3	Inversión temporal . . . . .	13
2.3.1	Modelo de sistemas lineales . . . . .	16
2.3.2	Inversión temporal en sistemas lineales . . . . .	17
2.3.3	Experiencias de inversión temporal . . . . .	20
2.4	Discusión de resultados . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Focalización a través de medios inhomogéneos</b>	<b>23</b>
3.1	Medios inhomogéneos aleatorios . . . . .	23
3.1.1	Función de Green . . . . .	23
3.1.2	Formalismo de Green . . . . .	26
3.1.3	Sección eficaz de scattering y teorema óptico . . . . .	29
3.1.4	Promedio en las configuraciones y el operador energía propia . . . . .	31
3.1.5	Medio efectivo y la aproximación de potencial coherente (CPA) . . . . .	32
3.1.6	Recorrido libre medio elástico . . . . .	34
3.2	Medios de múltiple scattering . . . . .	36
3.2.1	Inversión temporal en función de la densidad de scatterers . . . . .	36
3.2.2	Determinación del recorrido libre medio . . . . .	39
3.2.3	Efecto del medio de múltiple scattering en la inversión temporal . . . . .	43
3.2.4	Focalización para medios poco profundos . . . . .	46

3.3	Discusión de resultados . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Medios aleatorios difusivos</b>	<b>51</b>
4.1	Procesos difusivos . . . . .	51
4.1.1	Difusión luego del múltiple scattering . . . . .	51
4.1.2	Ecuación de Bethe-Salpeter . . . . .	53
4.1.3	Identidad de Ward y ecuación de difusión . . . . .	54
4.2	Cono de retrodifusión coherente . . . . .	57
4.2.1	Efecto del backscattering coherente . . . . .	57
4.2.2	Cálculo experimental del cono de retrodifusión coherente	59
4.3	Inversión temporal en medios difusivos . . . . .	62
4.3.1	Carácter autopromediante del retorno temporal . . . . .	64
4.3.2	Inversión temporal dinámica . . . . .	66
4.4	Discusión de resultados . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>72</b>
	<b>Referencias bibliográficas</b>	<b>75</b>
	<b>Apéndices</b>	<b>79</b>
	Apéndice 1 Formalismo de Green para propagación de ondas . . . .	80
1.1	Formalismo de Green . . . . .	80
1.2	Sección eficaz de scattering y teorema óptico . . . . .	83
1.3	Promedio en las configuraciones y el operador energía propia . .	85
1.4	Medio efectivo y la aproximación de potencial coherente (CPA)	86
	Apéndice 2 Modelado de la inversión temporal utilizando la teoría de sistemas lineales . . . . .	88
	Apéndice 3 Ecuación de transporte de Boltzmann . . . . .	90

# Capítulo 1

## Introducción

La introducción de la inversión temporal en acústica, tanto teórica como experimentalmente, fue realizada a principios de la década de los 90 [1, 2, 3]. El proceso de inversión temporal puede explicarse en dos pasos básicos. En el primer paso una serie de sensores registran una onda emitida por una fuente puntual. En el segundo paso, las señales registradas se envían de vuelta al medio pero invertidas en el tiempo. De esta forma, las ondas recorren el camino inverso y focalizan en la posición original de la fuente. Debido a que no requiere conocer previamente los detalles de la estructura (densidad y compresibilidad) del medio, la inversión temporal es la manera óptima de focalizar energía en un medio dado [4, 5, 6].

Desde sus inicios hasta hoy, ha habido numerosas investigaciones tanto aplicadas como básicas sobre este proceso. Algunos ejemplos de aplicaciones encontramos en la medicina [7, 8], los ensayos no destructivos de materiales [9, 10], la acústica submarina [11, 12] y la sismología [13, 14]. Las investigaciones básicas por su parte abarcan aspectos relacionados al límite teórico de la focalización espacial impuesto por la difracción, o la posibilidad de realizar una experiencia de retorno temporal “perfecta”, en el sentido de que luego de la focalización el campo acústico se extinga de manera que la situación sea una “verdadera” inversión temporal de campo nulo para  $t < 0$  [15], entre otros.

El interés por focalizar la energía acústica depende de la aplicación concreta. En los sistemas de imaginería acústica por ejemplo, la localización del objetivo se basa en la focalización espacial del campo. Este es el método empleado en ecografías en medicina, en ensayos no destructivos de materiales y sonares para estudio del fondo marino. Otro interés está dado por la posibil-

idad de destruir o modificar el objetivo mediante la concentración de energía acústica. Este es el caso por ejemplo de las aplicaciones en litotricia, donde se busca romper cálculos renales con el campo acústico [16]. Muchas de estas aplicaciones son posibles porque los medios de propagación tienen cierta homogeneidad espacial y es posible considerar que la velocidad del sonido es uniforme en todo el medio. Esto permite utilizar una “ley de retardos” para sumar en forma coherente ondas emitidas por diferentes transductores en la zona focal.

Si el medio de propagación no es o no se puede considerar homogéneo, la focalización por ley de retardos ya no es útil. Es en estas situaciones donde la inversión temporal acústica muestra su potencial. En sismología se utiliza la inversión temporal para localizar la fuente del evento sísmico [17]. En acústica submarina se utiliza una versión que podríamos denominar la contraria a la anterior. Al no existir fuentes naturales de ondas acústicas como en sismología, se utiliza lo que se denomina una fuente virtual [18]. Un sonar envía una señal exploratoria y recibe los ecos de las inhomogeneidades presentes. Estos ecos se consideran la fuente de ondas. Un proceso de inversión temporal iterativo permite focalizar en aquellas estructuras cuyos ecos contribuyen más a la señal. De esta forma, al concentrar la energía acústica en estas estructuras es posible estudiarlas luego con mayor detalle.

En el Laboratorio de Acústica Ultrasonora (LAU), la inversión temporal acústica ha sido objeto de numerosas investigaciones. G. Montaldo por ejemplo realizó trabajos de inversión temporal utilizando una guía de ondas acústicas [19]. En él mostró cómo es posible obtener campos acústicos no lineales utilizando pocos canales de emisión y una electrónica de ultrasonido estándar (es decir, que no es necesario una electrónica de potencia para generar pulsos acústicos no lineales en frecuencias del orden del MHz). N. Pérez, realizó investigaciones relacionadas a la inversión temporal acústica en cavidades reverberantes [20, 21]. En este trabajo se mostró que un solo canal de emisión permite focalizar la onda en una posición dada de la superficie de la cavidad. Para ello, se aprovecha de las múltiples reflexiones que sufre la onda en las paredes de la cavidad que generan en su interior un campo difuso. N. Benech utilizó estas ideas para focalizar ondas de corte en sólidos blandos [22] (por ejemplo tejidos biológicos blandos, geles, gomas y hasta alimentos como carnes y yogures) con aplicaciones a la elastografía. En estos trabajos se muestra la posibilidad de estimar en forma no invasiva la elasticidad local de sólidos blandos [23, 24].

Del mismo modo, J. Brum, utilizó ondas de superficie en sólidos blandos para estimar la elasticidad en forma no invasiva [25].

En muchas de las aplicaciones mencionadas arriba, están presentes en el medio de propagación estructuras con dimensiones del orden de la longitud de onda. En tejido biológico estas estructuras son fibras musculares, pequeños vasos sanguíneos, agregados de grasa, conjuntos de células, el entramado óseo, etcétera. En sismología son rocas, sedimentos, estructuras laminadas, etcétera. En acústica submarina son burbujas de aire, peces, plantas, etcétera. Estas estructuras en general se distribuyen aleatoriamente en el medio de propagación. Su efecto es dispersar la onda incidente en todas direcciones produciendo una atenuación del campo acústico. En general se las considera estructuras “molestas” pues entorpecen la focalización de la onda acústica y la calidad de la imagen generada. Es común verlas en imágenes ecográficas donde reciben el nombre de speckle acústico. Cuando estas estructuras, que llamaremos en forma genérica como dispersores o scatterers, están presentes en gran número en el medio de propagación producen una dispersión de la onda incidente en todas las direcciones espaciales. Este efecto se conoce como scattering múltiple [26] pues la onda “rebota” en varios de los dispersores antes de alcanzar el receptor.

En el LAU, el efecto del scattering múltiple en tejidos biológicos fue investigado por G. Cortela. En particular, su trabajo mostró el efecto del incremento de la dosis térmica que reciben los tejidos debido al incremento del camino acústico recorrido por la onda de ultrasonido [27, 28].

En este trabajo de tesis nos proponemos combinar la focalización por inversión temporal con los efectos del scattering múltiple. Esta combinación ya fue investigada por otros autores [29, 30, 31]. La temática tuvo cierto auge en la primera década de este siglo. Luego el número de publicaciones al respecto se vieron reducidas. Estos trabajos previos nos motivaron a poner nuestro laboratorio en el estado del arte en la materia y a profundizar la investigación al respecto. De esta forma entenderemos los problemas abiertos que permanecen en esta área (como por ejemplo utilizar la inversión temporal como método para determinar los parámetros de transporte) y dejaremos un camino trazado para futuras investigaciones.

Como modelo para un medio de múltiple scattering elegimos un medio sencillo que denominamos bosque de alambres. Consiste en un conjunto de alambres de cobre idénticos, dispuestos paralelos entre sí pero de forma aleatoria en una grilla 2D. Este medio, que se describirá con detalle más adelante

en la tesis, facilita el modelado teórico que permite relacionar la focalización por inversión temporal con sus características, como profundidad, dimensiones, densidad de los alambres, etcétera. A lo largo de la tesis mostraremos que, en vez de ser una molestia, el medio de múltiple scattering permite mejorar la focalización por inversión temporal. Se investigará sobre el tamaño focal mínimo que permite un medio de múltiple scattering y cuáles son las condiciones para alcanzarlo.

El trabajo de tesis estará organizado de la siguiente manera. En el siguiente capítulo se discutirán métodos de focalización de ondas acústicas en medios homogéneos y no homogéneos. Se introducirá un modelo de inversión temporal basado en la teoría de sistemas lineales invariantes en el tiempo, mostrando la dependencia de la focalización espacio-temporal de este método. Luego se mostrarán experiencias de inversión temporal a través del bosque de alambres y se compararán los resultados con los del medio homogéneo. Más adelante se introducirá el formalismo de Green para medios de scattering múltiple, incluyendo la aproximación de medio diluido que permite definir tanto el medio efectivo así como también el recorrido libre medio elástico. Finalmente se mostrarán resultados experimentales de métodos de focalización por ley de retardos combinados con la inversión temporal de ondas.

En el capítulo 3 se estudia el pasaje a procesos difusivos dentro del medio de múltiple scattering. Ahí se muestra que cuando las dimensiones del bosque extinguen el campo coherente, la intensidad acústica promediada sobre varias realizaciones de desorden obedece una ecuación de difusión. A partir de la observación del llamado cono de retrodifusión coherente [29, 32] mostraremos que el medio aún para grandes espesores es recíproco, condición necesaria para las experiencias de inversión temporal llevadas a cabo en esta tesis. Finalmente mostraremos que la focalización espacial por inversión temporal llega a su valor mínimo, el cual está relacionado a la correlación espacial de los difusores en el medio de múltiple scattering.

En el capítulo 4 se resumirán las conclusiones de esta tesis, combinadas con las perspectivas a futuro en la línea trabajo presentada.



## Capítulo 2

# Focalización de ondas acústicas en medios homogéneos

### 2.1. Ecuación de ondas

Una onda de frecuencia  $\omega$  se relaciona con su periodicidad espacial, o longitud de onda  $\lambda$ , a través de la relación de dispersión. Este concepto se cumple tanto para ondas cuánticas (partículas) como para ondas clásicas (ondas elásticas y/o electromagnéticas). En ondas clásicas, la relación está dada por  $\omega^2 = c^2 k^2$ , donde  $k = 2\pi/\lambda$  es el módulo del vector de onda.

Para medios no dispersivos, sin absorción y sin la presencia de fuentes, la ecuación de ondas linealizada es [33]

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

donde  $c$  es la velocidad de propagación de la onda en el medio. Esta es la ecuación de ondas escalar. En acústica, la función  $\phi$  representa en general la presión  $p$ . En el caso de la ecuación de ondas vectorial, como la propagación de ondas elásticas en sólidos o las ondas electromagnéticas, hay que considerar todas las componentes. En particular, hay situaciones donde las condiciones de borde imponen acoplamiento entre componentes que también deben considerarse. En este trabajo nos limitaremos a la ecuación de ondas escalar, donde los resultados obtenidos abarcan aspectos importantes de la propagación los cuales podrán generalizarse sin inconvenientes.

Utilizando la transformada de Fourier, esta ecuación puede llevarse a la expresión conocida como ecuación de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2) \phi = 0 \quad (2.2)$$

donde tenemos que

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Para medios cuyas propiedades no cambian en el tiempo  $k^2$  depende únicamente de la variable espacial. Por tanto, es posible escribir

$$k^2(\mathbf{r}) = k_0^2 - \sigma(\mathbf{r}) \quad (2.3)$$

Aquí  $k_0$  es el módulo del vector de ondas en un medio homogéneo de referencia. La cantidad  $\sigma$  está relacionada a la perturbación en la propagación de la onda debida a la dependencia espacial de la impedancia acústica. La expresión (2.3) es escogida por conveniencia, como se verá más adelante.

Dado que consideramos el medio como no dispersivo podemos expresar  $c^2 = \frac{c_0^2}{\epsilon(\mathbf{r})}$ . Interpretamos  $\epsilon$  como el factor que decrece la velocidad de propagación debido a la dependencia espacial de la impedancia acústica. Tenemos entonces que  $\epsilon(\mathbf{r}) \geq 1$ , donde la igualdad se cumple para el medio homogéneo. Utilizando la relación para el medio homogéneo

$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \quad (2.4)$$

tenemos que

$$\sigma(\mathbf{r}) = [1 - \epsilon(\mathbf{r})] \frac{\omega^2}{c_0^2}$$

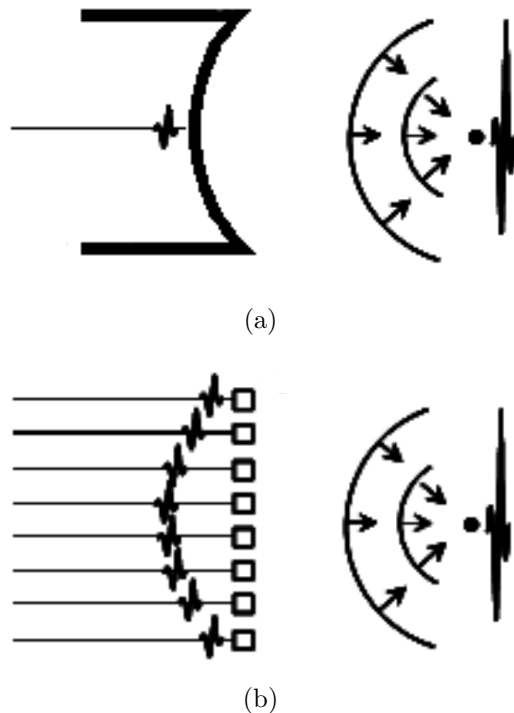
de lo que se desprende que para frecuencias muy bajas (y para valores de  $\epsilon$  finitos) la onda no distingue el medio homogéneo de aquel que presenta dependencia espacial en el vector de ondas.

## 2.2. Focalización sintética

Como se menciona en la introducción de este trabajo, es de especial interés para nosotros lograr concentrar energía acústica en una zona acotada del espacio. Desde las ecografías hasta tratamientos con potencia acústica, estos métodos se basan en la focalización de ondas en la zona objetivo.

Así como en la óptica existen las lentes convergentes (cóncavas), es posible

en la acústica realizar un proceso totalmente análogo. Además del manejo de materiales piezoeléctricos para la emisión/recepción de ondas acústicas, encontramos conjuntos de transductores dispuestos geoméricamente de forma tal que las ondas emitidas por pequeños elementos convergen en una región conocida del espacio (lente acústica). Otra forma de lograr focalizar la energía acústica es utilizar una ley de retardos en un conjunto de transductores para simular una lente. Este procedimiento se conoce como focalización sintética. La misma posee la ventaja frente a una lente acústica debido a que la posición focal se puede controlar electrónicamente variando el retardo introducido a cada elemento del arreglo de transductores. En la acústica es posible acceder a información de la dependencia temporal de una onda. Es por esto que, generando retardos adecuados en las señales, podemos concentrar la energía acústica en una región seleccionada. La figura (2.1) compara la focalización utilizando una lente acústica (a) con la focalización sintética (b).



**Figura 2.1:** (a) Ilustración de focalización utilizando una lente acústica. (b) Focalización sintética.

Consideremos un medio homogéneo, de modo que  $\sigma(\mathbf{r}) = 0$ . Entonces sabemos que

$$k^2(\mathbf{r}) = k_0^2$$

El efecto de la lente acústica o de la focalización sintética consiste en maximizar la intensidad acústica en el foco debido a la suma coherente del campo en ese punto. Para otras posiciones se produce una suma incoherente debida a las diferencias de fase provocadas por la diferencia de camino acústico. Notemos que para lograr la focalización por esta vía son necesarios dos aspectos básicos. El primero es que el medio sea homogéneo. Solo de esta forma una ley de retardos pre-establecida o un lente acústico lograrán sumarse en forma coherente en el foco. El segundo aspecto refiere a que se requiere un control espacial de la emisión acústica, es decir la focalización sintética necesita varios canales de emisión para lograr su objetivo. Un único emisor puntual no focaliza espacialmente la onda. La lente acústica por su parte necesita una gran apertura y una forma geométrica dada. En este último caso además la distancia focal es fija por lo que se pierde control sobre posición de focalización.

Se define el ancho focal espacial  $\Delta l$  como la distancia a la cual la intensidad acústica decae a la mitad de su valor máximo. El valor teórico de este ancho para la focalización sintética está dado por [34]:

$$\Delta l \sim \frac{2\lambda F}{D} \quad (2.5)$$

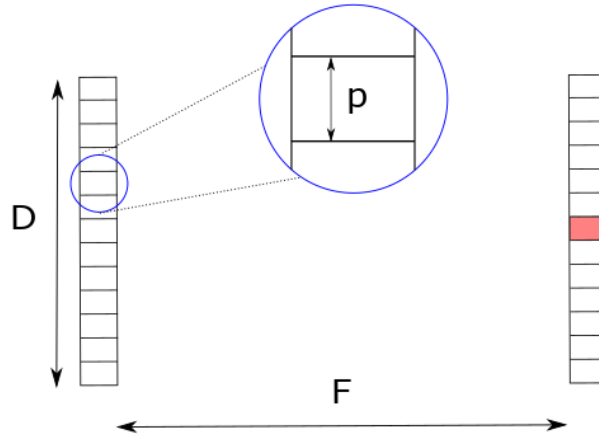
donde  $F$  es la distancia focal y  $D$  la apertura del emisor, como puede verse en la figura (2.2).

De la expresión anterior podemos concluir que, mientras mayor la apertura de la fuente, mejor el foco obtenido. Para  $F$  y  $D$  dados, el ancho focal depende de  $\lambda$ , es decir que en un sistema de imaginería acústica el límite de resolución espacial está dado por la longitud de onda.

Por otra parte, el ancho temporal de la señal en el foco está relacionada con la duración de la señal emitida  $t_0$  y el tamaño finito de cada emisor  $p$ . Debemos considerar además que hay un tiempo de vuelo mínimo y máximo de arribo de la onda al foco debido al tamaño finito del emisor. El ancho temporal de la señal recibida será entonces [34]

$$\Delta t \sim t_0 + \frac{p^2}{4c_0 F} \quad (2.6)$$

donde el segundo sumando surge de la diferencia de caminos acústicos recorri-



**Figura 2.2:** Representación geométrica de las variables que determinan la focalización sintética.

dos para llegar al punto focal debido a la apertura finita de cada emisor. Para emisiones pulsadas este límite se relaciona con la resolución axial del sistema de imaginería (en la dirección  $z$ ). Estos sistemas se basan en localización por tiempo de vuelo, es decir que, a un tiempo dado de arribo de señal, le corresponde un punto espacial localizado a distancia  $ct$  del receptor. Si la señal temporal no es instantánea, un mismo punto del espacio se ve en la imagen como un objeto alargado. Como consecuencia, es deseable que  $\Delta t$  tenga el menor valor posible.

### 2.2.1. Análisis experimental

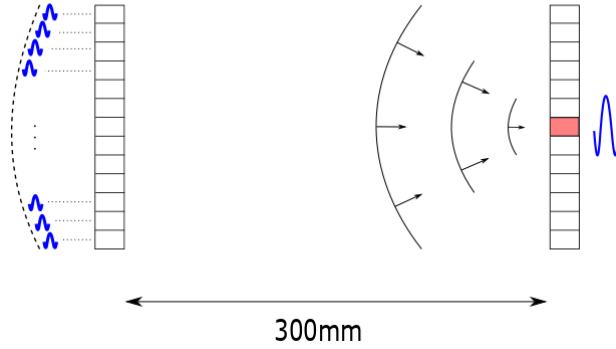
Para realizar las experiencias en esta tesis contamos con dos arreglos lineales de transductores piezoeléctricos (normalmente llamado array lineal) de 32 elementos independientes cada uno. Los arrays son idénticos y tienen una frecuencia central de emisión de  $6MHz$ , con un ancho de banda del 50% (es decir que la respuesta de los transductores abarca desde  $4.5$  hasta  $7.5MHz$ ). La separación entre centros de los elementos, llamado pitch, es de  $0.8mm$  y la apertura es  $D = 25mm$ . La electrónica que permite controlar los arrays es un *Ultrasound Open System* (*Lecoeur Electronique*, Francia). Esta electrónica cuenta con 32 canales de emisión/recepción de señales de ultrasonido. La frecuencia de muestreo es de  $80MHz$  en cada canal. La memoria de emisión por canal es de 2 MB y cada canal puede emitir en forma independiente de los demás. Los amplificadores internos permiten emitir señales de excitación con amplitud variable entre 20 y 200V y frecuencias comprendidas entre 1 y

10MHz. Además es posible ajustar un retardo arbitrario para la emisión de cada canal. La memoria de recepción es de 32 Mb, lo que permite almacenar señales de hasta 128.000 puntos por canal si se utilizan todos a la vez. Incluso pueden realizarse varias secuencias concatenadas, siempre y cuando la cantidad de puntos adquirida no exceda el límite de memoria. La ganancia de cada canal se puede ajustar también en forma independiente. Una vez registradas las señales hay que transferir la memoria del equipo al PC para procesamiento de datos fuera de línea. El equipo posee una interface para comando en MatLab. Por lo tanto es posible programar toda una secuencia de emisión y recepción de señales y de esta forma automatizar las medidas. Contamos además en el laboratorio con un sistema de posicionamiento 2D automatizado (Arrick Robotics, Reino Unido) que también se puede controlar desde MatLab mediante un puerto serial. El mismo puede barrer un área efectiva de  $0.5m^2$  con movimientos lineales en direcciones ortogonales e independientes entre sí. Combinando este sistema con el Open System, es posible realizar un barrido de campo acústico en una experiencia totalmente automatizada.

Como primer objetivo de este trabajo verificamos la focalización sintética. En la figura (2.3) se muestra un esquema del montaje experimental utilizado. El mismo consistió en utilizar agua como medio homogéneo, donde se colocaron ambos arrays con una separación de  $300mm$  entre ellos. Antes de realizar las mediciones, debieron alinearse de modo que las caras queden paralelas entre sí. Para ello se busca, mediante posicionadores angulares manuales, maximizar la señal emitida por uno y recibida por el otro. Teniendo en cuenta que la velocidad de propagación del sonido en el agua es  $c = 1.5mm/\mu s$ , se emitió un frente curvo y se comparó con la emisión de un frente plano. Las señales emitidas en cada canal consisten de 3 ciclos de senoide de frecuencia central 5MHz. Por lo tanto, la duración temporal  $t_0$  de la señal emitida es  $0.6\mu s$ . En la figura (2.4) se muestran las señales emitidas y los resultados obtenidos.

En la figura (2.5) se compara la focalización espacial de ambas emisiones. Vemos que la emisión con ley de retardos concentra la energía acústica en una zona acotada del espacio. En la emisión plana la energía se distribuye uniformemente sobre los receptores. Las diferencias en amplitud pueden ser debidas a que la respuesta acusto-eléctrica (RAE) es ligeramente diferente en cada elemento del arreglo lineal.

Utilizando la relación de dispersión (2.4), tenemos que  $\lambda = 0.3mm$ . De (2.5) obtenemos un ancho focal esperado de



**Figura 2.3:** Esquema de montaje experimental para la focalización sintética.

$$\Delta l_{teo} \sim 6.2mm \quad (2.7)$$

Usando como definición de ancho focal el ancho de la intensidad a mitad de altura, de la figura (2.5) obtenemos que

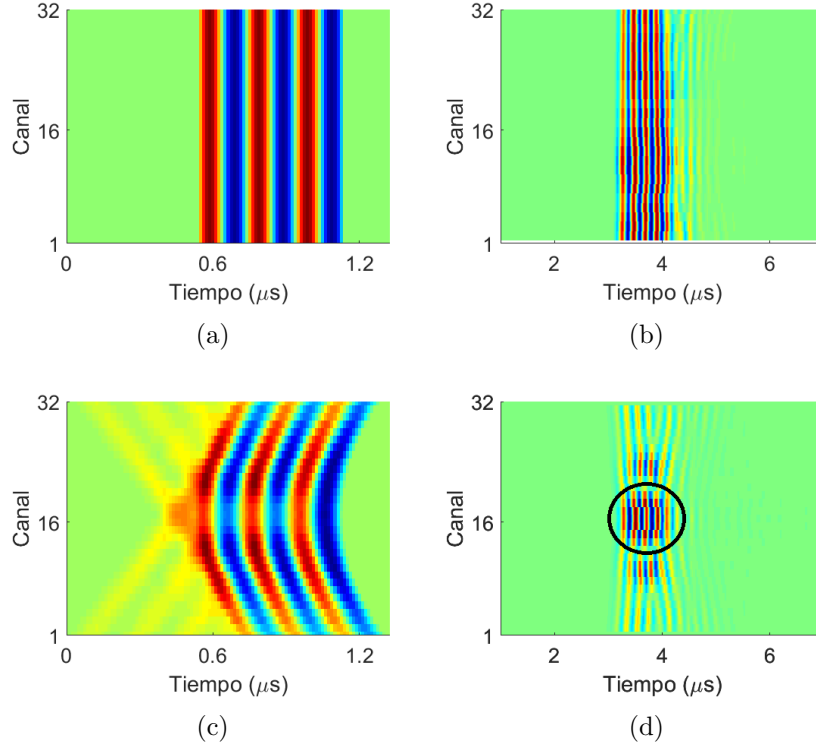
$$\Delta l_{exp} = 6.57mm \quad (2.8)$$

El error relativo porcentual con el valor teórico esperado es de 6%. Esta diferencia se debe a que el cálculo teórico se realiza para una onda monocromática mientras que, en la experiencia, la señal emitida tiene cierto ancho de banda. A esto se agrega que los receptores no son puntuales lo que contribuye al ensanchamiento del foco. Una forma de acercarse más al valor teórico es emitir una mayor cantidad de ciclos para minimizar el ancho de banda de la señal. Sin embargo, el objetivo de esta tesis se basa en la focalización espacio-temporal de la energía acústica, por lo que existe un compromiso entre la focalización espacial y la duración de la señal emitida.

Por otra parte, la duración temporal de la señal emitida es de  $t_0 = 0.6\mu s$ . Como la apertura de los elementos que estamos utilizando es pequeña comparada con la distancia focal el segundo término de la ecuación (2.6) no aporta incrementos de tiempo significativos en nuestra experiencia. Por lo tanto el ancho temporal coincide con el ancho de emisión. Esto conduce a una duración temporal esperada de

$$\Delta t_{teo} \sim 0.6\mu s \quad (2.9)$$

Utilizando la misma convención mencionada para la parte temporal, obten-



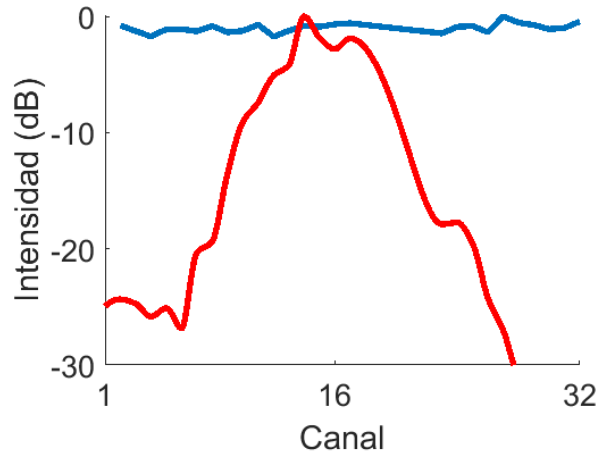
**Figura 2.4:** Emisión y recepción de un frente plano y un frente circular en agua. (a) Frente plano introducido electrónicamente en el emisor. (b) Frente plano medido por el receptor. (c) Frente curvo introducido electrónicamente en el emisor. (d) Frente curvo medido por el receptor.

emos una duración de la señal en el foco de

$$\Delta t_{exp} = 0.75 \mu s \quad (2.10)$$

La diferencia con el cálculo teórico se debe a la respuesta acusto-eléctrica de los transductores que conforman el arreglo lineal. La RAE incluye un efecto que se conoce como “ringing” del transductor [34]. Este efecto consiste en que el elemento piezoeléctrico continúa vibrando aún cuando la señal eléctrica de excitación haya finalizado. El ringing provoca entonces que el ancho temporal de la onda emitida sea mayor al ancho de la señal eléctrica de excitación. El efecto de ringing depende en gran medida de la fabricación de los transductores (en particular de lo que se conoce como el backing para eliminar ondas reflejadas en el interior del transductor [34]). En menor medida depende también de la señal eléctrica utilizada para excitar al transductor. En esta tesis utilizamos ciclos de senoide para excitar eléctricamente a los transductores.





**Figura 2.5:** Dependencia espacial de la intensidad acústica expresada en dB a tiempo fijo para el frente plano (curva azul) y el frente curvo (curva roja).

Existen otras opciones que suavizan la RAE (por ejemplo la derivada segunda de la función gaussiana o la función seno cardinal ‘sinc’). Si bien nuestra electrónica es totalmente programable y podemos excitar con cualquier tipo de señal, éste no es el caso general en la mayoría de los generadores de funciones, por lo que preferimos utilizar una excitación estándar.

### 2.3. Inversión temporal

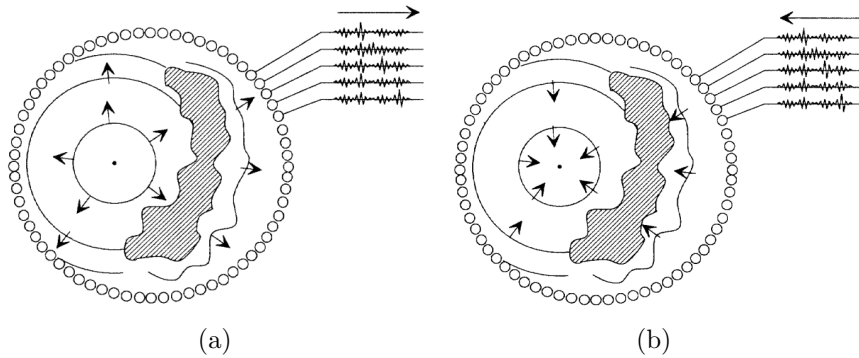
Cuando un medio presenta variaciones locales de la impedancia acústica la propagación de ondas se vuelve compleja. Se produce reflexión y refracción de la onda así como posibles conversiones de modos entre ondas de compresión y ondas de cizalla (en el caso de interfaces fluido-sólido). La onda que ingresa en una zona de inhomogeneidad luego sale de ella con una fase que depende del camino acústico recorrido. En muchos casos de interés, conocer el tamaño, posición, densidad y compresibilidad de las inhomogeneidades presentes es inviable. Es por lo anterior que un método de focalización acústica en un medio de este tipo debe ser independiente del conocimiento de esta información. Veremos a continuación que el método de inversión temporal acústica cumple este requisito.

Si bien el concepto de inversión temporal no es nuevo en física, su investigación en acústica ha tenido un desarrollo importante en los últimos años. La idea detrás de la inversión temporal es la invarianza que presenta la ecuación

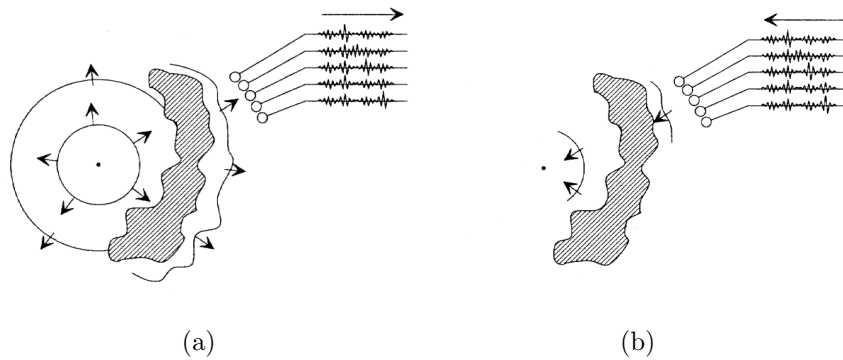
de ondas ante un cambio  $t \rightarrow -t$ , debida a la derivada de segundo orden en el tiempo. Esto significa que si  $\phi(\mathbf{r}, t)$  es solución, entonces  $\phi(\mathbf{r}, -t)$  también lo es. Esto implica que para toda onda divergente, existe una contraparte que converge hacia la fuente que le dio origen. Notemos aquí que las pérdidas por absorción introducen derivadas impares del tiempo en la ecuación de ondas. Como consecuencia la absorción quiebra (o rompe) la simetría por inversión temporal. Por tanto es válido emplear el método de inversión temporal acústica en medios donde las distancias de propagación involucradas son menores que las distancias característica de decaimiento por absorción. El coeficiente de atenuación de ondas en agua es de  $2.2 \times 10^{-3} dB / (cmMHz)$  [35]. Por lo que, a una frecuencia de trabajo de  $5MHz$ , la distancia a recorrer para que la intensidad acústica decaiga  $6dB$  (la mitad del valor inicial) es del orden de  $500cm$ . Este valor está muy por encima de las dimensiones de nuestras experiencias (del orden de 20 veces más).

El uso de transductores piezoeléctricos facilitan el proceso de adquisición y reemisión de ondas acústicas debido al efecto piezoeléctrico directo e inverso. En la figura (2.6) ejemplificamos un proceso de inversión temporal ideal conocido como cavidad de inversión temporal. El proceso consiste en dos pasos. En el primero una fuente puntual emite un pulso breve que se propaga en el volumen de interés, que puede contener zonas con variaciones en la impedancia acústica. Un conjunto de transductores dispuestos en una superficie que encierra al volumen de interés registran la onda acústica en cada punto. Notemos aquí que la señal recibida por cada transductor no es necesariamente un pulso breve pues la onda puede refractarse y reflejarse varias veces en la zona inhomogénea antes de alcanzar los receptores. En general la señal recibida tiene un aspecto de ruido y su duración es mucho mayor al pulso inicial emitido por la fuente puntual. A esta señal le llamaremos coda acústico o simplemente coda en analogía con las señales que se reciben en estaciones sísmicas que llevan ese nombre [36].

El segundo paso consiste en reemitir la señal de coda recibida en cada transductor hacia el volumen de interés pero invertida en el tiempo. A su vez, la fuente puntual que emitió el campo inicial es removida en el proceso de inversión. La teoría de la cavidad de inversión temporal fue desarrollada por D. Cassereau y M. Fink [3]. En ella se muestra que las ondas invertidas temporalmente convergen hacia la posición de la fuente puntual inicial. El campo de inversión temporal se puede escribir como la suma de una onda que converge



**Figura 2.6:** Esquema de una cavidad de inversión temporal. (a) Excitación del sistema con un pulso breve desde una fuente puntual en el interior de la cavidad. (b) Proceso de inversión temporal reemitiendo las señales recibidas. Si bien no se muestra aquí, se asume que todos los transductores participan del proceso. Imágenes extraídas de [1]



**Figura 2.7:** Esquema de la experiencia utilizando un espejo de inversión temporal. (a) Excitación del sistema con un pulso breve desde una fuente puntual. (b) Proceso de inversión temporal reemitiendo las señales recibidas con el EIT.

hacia la fuente y una onda que diverge desde la fuente pero retardada en un tiempo igual a la duración de la señal registrada por los transductores que encierran la cavidad. En este sentido, este proceso de inversión temporal no es perfecto ya que una vez que la onda focaliza en un punto el campo no se extingue sino que aparece una onda divergente que continúa propagándose por la cavidad. Es decir que el proceso de inversión temporal produce la focalización espacial en un instante de tiempo dado y por lo tanto es una focalización espacio-temporal. Si la fuente puntual dista varias longitudes de onda de la zona inhomogénea, se puede mostrar que la focalización espacial toma la forma de la función de Bessel esférica [3], es decir que la intensidad acústica se concentra en una esfera de diámetro del orden de la longitud de onda. El ancho

de la focalización temporal por su lado está relacionado al ancho temporal del pulso inicial como mostraremos más adelante.

La cavidad de inversión temporal descrita es una construcción teórica irrealizable en la práctica. Experimentalmente todo lo que podemos conseguir es registrar el campo en una pequeña porción de la superficie de la cavidad, como se muestra en la figura (2.7). Este arreglo se conoce en la literatura como espejo de inversión temporal (EIT) [37]. Como en un EIT el campo acústico se conoce solo en una porción de la superficie que encierra el volumen, la calidad de la focalización espacial se ve degradada respecto a la cavidad ideal. En particular, la focalización ya no será isotrópica sino que tendrá valores diferentes según la dirección espacial. La forma específica del foco depende de varios factores, entre ellos la geometría del EIT y, como mostraremos más adelante en esta tesis, de las características de la zona inhomogénea. Por su parte, la focalización temporal no se ve afectada por la información parcial que se dispone. En nuestras experiencias el EIT consiste del arreglo lineal de 32 transductores que describimos en la sección anterior para generar la ley de retardos.

### 2.3.1. Modelo de sistemas lineales

Para estudiar la inversión temporal comenzamos introduciendo la definición de sistema lineal.

Se define sistema lineal, causal e invariante en el tiempo a aquel que satisface las siguientes condiciones [21]

- Linealidad. Sean  $e_1(t)$  y  $e_2(t)$  dos señales de entrada distintas entre sí y sean  $r_1(t)$  y  $r_2(t)$  las respectivas respuestas del sistema. Entonces se cumple que la respuesta a una entrada  $\alpha e_1(t) + \beta e_2(t)$  es  $\alpha r_1(t) + \beta r_2(t)$ .
- Causalidad. Si una entrada al sistema verifica que  $e(t) = 0 \forall t < 0$ , entonces también se cumple que  $r(t) = 0 \forall t < 0$ .
- Invarianza temporal. Sea  $r(t)$  la respuesta a la entrada  $e(t)$ . Que el sistema sea invariante en el tiempo implica que si se retrasa la señal de entrada un tiempo  $T > 0$  entonces la respuesta del sistema también se verá retrasada. Esto quiere decir que la respuesta a una entrada de la forma  $e(t - T)$  es  $r(t - T)$ .

Bajo estas hipótesis el sistema queda totalmente determinado por su respuesta a una entrada impulsional. Denotaremos como  $h(t)$  a dicha respuesta.

Esta función está vinculada, como definiremos en el próximo capítulo, a la función de Green en el dominio temporal para  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$  fijos pero tiene en cuenta además la RAE de los elementos del array.

La respuesta del sistema a una entrada arbitraria  $e(t)$  queda determinada entonces por el producto convolución entre la entrada en cuestión y la respuesta impulsional del sistema

$$r(t) = h(t) * e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e(t - \tau) d\tau \quad (2.11)$$

Es claro de la ecuación (2.11) que la función  $h(t)$  se obtiene utilizando como entrada a una función delta de Dirac  $\delta(t)$ , debido a su papel de identidad del producto convolución.

Una forma por igual útil de trabajar con los sistemas lineales es utilizar la transformada de Fourier y trabajar en el espacio de frecuencias de las señales implicadas. Si tomamos la ecuación (2.11) y aplicamos la transformada, tenemos que

$$F[r(t)](\omega) = F[h(t) * e(t)](\omega)$$

Definiendo con mayúsculas las respectivas transformadas y utilizando el teorema de convolución, obtenemos que

$$R(\omega) = H(\omega) E(\omega) \quad (2.12)$$

Podemos concluir que, trabajando en el espacio de las frecuencias, la respuesta del sistema se calcula como el producto de las transformadas de Fourier de la respuesta impulsional y de la señal de entrada al sistema.

### 2.3.2. Inversión temporal en sistemas lineales

El proceso de inversión temporal consiste en excitar el sistema con la respuesta obtenida previamente pero invertida en el tiempo [21]. El resultado final es una focalización espacio-temporal, donde recuperamos la información de la entrada inicial al sistema.

Supongamos una entrada inicial  $e(t)$  que excita el sistema. Como se mencionó antes, la respuesta del sistema está dada por la expresión (2.11). En el proceso de inversión temporal, el sistema se excita con la señal  $r(-t)$ . Llamemos  $r_{TR}(t)$  a la correspondiente respuesta del sistema. Se cumple entonces que

[1, 21]

$$r_{TR}(t) = h(t) * r(-t) = h(t) * [h(-t) * e(-t)] \quad (2.13)$$

Utilizando la propiedad asociativa del producto convolución y recurriendo a la definición del producto correlación

$$f(t) \star g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(\tau) g(t + \tau) d\tau \quad (2.14)$$

vemos que (2.13) puede reescribirse como

$$r_{TR} = [h(t) * h(-t)] * e(-t) = [h(t) \star h^*(t)] * e(-t)$$

Considerando la función  $h(t)$  real, vemos finalmente que

$$r_{TR} = [h(t) \star h(t)] * e(-t) \quad (2.15)$$

Nótese que en el razonamiento anterior se utilizó la función  $h(t)$  indistintamente tanto para la excitación del medio como para el proceso de inversión temporal. La hipótesis que nos permite realizar esto es la reciprocidad del sistema. Que sea recíproco implica que pueden intercambiarse los roles entre la entrada y la salida del sistema, obteniendo el mismo resultado. Por el teorema de reciprocidad acústica, esta hipótesis se cumple en forma general en sistemas acústicos lineales [33].

Teniendo en cuenta la causalidad del sistema, lo que ocurre durante el proceso de inversión temporal es que no se reemite  $r(-t)$  sino  $r(T-t)$ , siendo  $T$  la duración de la señal. Esto mantiene las conclusiones anteriores, como podemos ver

$$r_{TR}(t) = [h(t) * h(T-t)] * e(T-t)$$

Realizando el cambio de variable  $t' = t - T$

$$r_{TR}(t') = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) h(t' + \tau) d\tau \right] * e(-t') \quad (2.16)$$

Obteniendo nuevamente la auto correlación de la respuesta al impulso, convolucionada con la entrada inicial en función del tiempo retardado  $t'$ .

En el dominio de la frecuencia, tenemos que

$$R_{TR}(\omega) = [H(\omega) H^*(\omega)] E^*(\omega) = |H(\omega)|^2 E^*(\omega) \quad (2.17)$$

de donde vemos que si la entrada del sistema es una delta de Dirac, la respuesta al retorno temporal es simplemente  $|H(\omega)|^2$ . De esta expresión vemos que el ancho temporal de la focalización está dado por el ancho de banda de la señal de excitación  $e(t)$ . Es decir, la focalización temporal en el proceso de inversión temporal es similar a la que se obtiene en un medio homogéneo (2.6) y no depende de las variaciones de impedancia acústica presentes en el medio [1, 21].

Hasta este punto vimos que la señal obtenida tras la inversión temporal (en el dominio del tiempo) es la mostrada en (2.16). Resta analizar qué ocurre con la coordenada espacial en la inversión cuando no tenemos una única entrada y salida.

En primer lugar supongamos que la respuesta al impulso depende además de la variable espacial:  $h(\mathbf{r}, t)$ . Supongamos que excitamos el sistema con una entrada  $e(t)$  y recibimos la respuesta en las posiciones  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ . En el proceso de inversión temporal emitimos la señal recibida en la posición  $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$  invertida en el tiempo desde la fuente. Si analizamos la respuesta del sistema  $r_{TR}$  en la posición  $\mathbf{r}$ , vemos que

$$r_{TR}(\mathbf{r}, t') = [h(\mathbf{r}, t') \star h(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, t')] * e(t') \quad (2.18)$$

Se define la función  $C(\Delta\mathbf{r})$  como la auto correlación temporal de las respuestas impulsionales en el tiempo  $t' = 0$ . Esto es

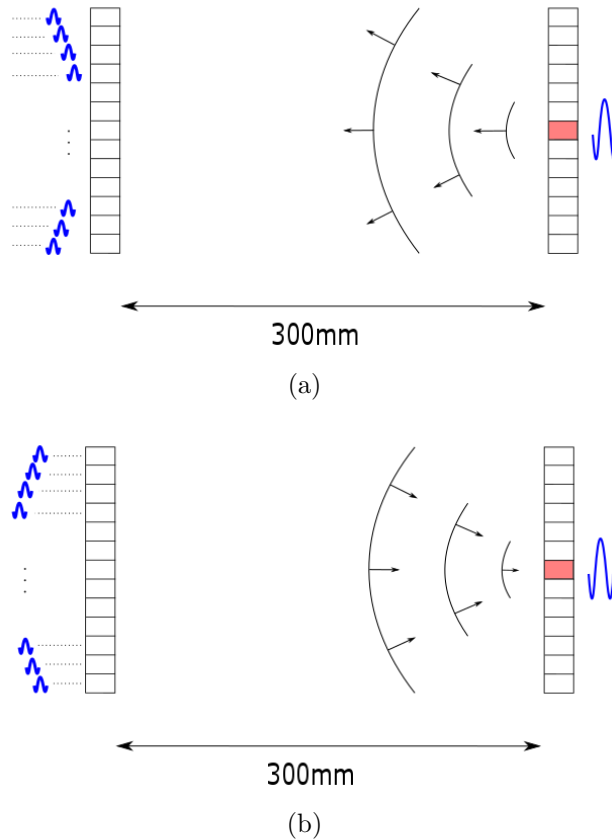
$$C(\Delta\mathbf{r}) = \int h(\mathbf{r}, \tau) h(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, \tau) d\tau \quad (2.19)$$

$$\tilde{C}(\Delta\mathbf{r}) = H(\mathbf{r}, \omega) H^*(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, \omega) \quad (2.20)$$

En este punto es conveniente interpretar la correlación como una medida de la similitud entre dos funciones. La última expresión nos permite ver que a medida que la cantidad  $\Delta\mathbf{r}$  disminuye, las funciones  $h(\mathbf{r}, t)$  y  $h(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, t)$  son cada vez más similares. Sin embargo, cuando  $\Delta\mathbf{r}$  aumenta, se incrementa la diferencia entre las respuestas impulsionales y por lo tanto disminuye la cantidad  $C(\Delta\mathbf{r})$ . Para medios homogéneos se puede mostrar que esta pérdida de similitud es del orden de la longitud de onda  $\lambda$  ya que en este caso la focalización por un EIT es equivalente a una focalización sintética.

### 2.3.3. Experiencias de inversión temporal

Hasta aquí hemos analizado teóricamente el funcionamiento de la inversión temporal. En esta parte se muestran los resultados experimentales obtenidos para tal experiencia.

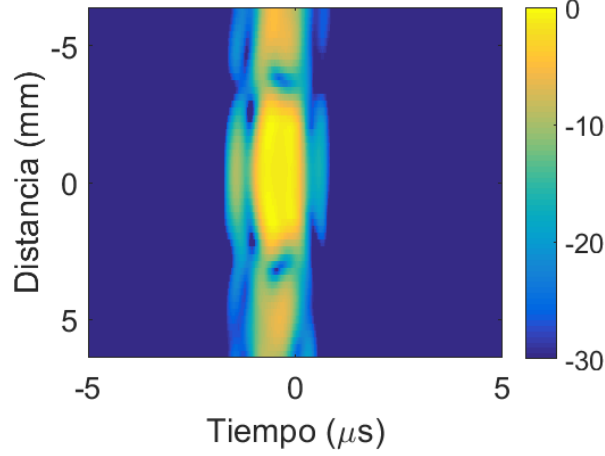


**Figura 2.8:** Montaje experimental para inversión temporal. (a) Excitación del sistema y recepción de señales. (b) Reemisión de las señales adquiridas y focalización en la fuente.

Igual que en las secciones anteriores, utilizamos dos arreglos lineales de 32 canales. Uno de ellos actuó como la fuente puntual, excitando el medio emitiendo 3 ciclos de senoide a  $5MHz$  con un único canal. Ubicado a  $300mm$  de distancia se situó el espejo de inversión temporal, que recibió señales con sus 32 canales para luego invertirlas y reemitirlas. En el proceso de inversión se utilizó como receptor el que inicialmente fue la fuente. Se realizó un barrido espacial en la dirección paralela a la disposición del arreglo lineal, *i.e.* dirección  $x$ . En la figura (2.8) se muestra el montaje experimental mencionado, mientras que en la figura (2.9) se muestra la intensidad acústica obtenida



experimentalmente para la inversión temporal en agua.



**Figura 2.9:** Inversión temporal en agua.

Los resultados obtenidos para la experiencia de retorno temporal, utilizando el mismo criterio antes mencionado, fueron

$$\begin{cases} \Delta l_{exp} = 4.84mm \\ \Delta t_{exp} = 0.85\mu s \end{cases} \quad (2.21)$$

De acuerdo a la ecuación (2.17), el ancho temporal de la focalización por inversión temporal está dado por la señal de excitación y es muy similar al ya obtenido por la focalización sintética. Notemos que la ecuación (2.17) es genérica para un proceso de inversión temporal e incluye la cavidad de inversión temporal si se suman las respuestas impulsionales de cada transductor en la superficie de la cavidad. Pero esta suma no afecta a  $E(\omega)$  que está dado por la excitación inicial. Vemos en consecuencia que la falta de información espacial del EIT en comparación con la cavidad no afecta la focalización temporal.

## 2.4. Discusión de resultados

Realizamos una comparación entre los resultados obtenidos utilizando la ley de retardos contra los obtenidos por inversión temporal. Como ya se mencionó antes, el ancho espacial obtenido para la focalización por ley de retardos fue de  $\Delta l = 6.57mm$  y  $\Delta t = 0.75\mu s$ . Por su parte, y mostrado en la figura (2.9), la focalización por inversión temporal dio como resultado  $\Delta l = 4.84mm$

y  $\Delta t = 0.85\mu s$ . En tabla al final del capítulo se muestran los resultados mencionados en forma en medios homogéneos.

Por un lado, la diferencia entre los anchos temporales radica principalmente en el ringing de los elementos emisores. Para la focalización sintética es necesario un único proceso de emisión y recepción para concentrar la intensidad acústica. Sin embargo el proceso de inversión temporal consta de dos pasos en los cuales se emiten y reciben señales. Debido a que el proceso de ringing de los elementos piezoeléctricos no es reversible, en la inversión temporal tenemos que este efecto aparece dos veces en total, una por cada paso de emisión/recepción, mientras que para la focalización sintética sólo ocurre una vez.

Por otro lado, los anchos espaciales presentan diferencias más pronunciadas. Según la teoría de inversión temporal mostrada en la sección anterior, para una fuente puntual se cumple que la focalización espacial es del orden de la longitud de onda  $\lambda$ . En nuestro caso la fuente es un elemento de tamaño finito, además de haber utilizado un espejo de inversión temporal en lugar de una cavidad. Por lo que podemos concluir que, a pesar de no recuperar toda la información emitida por la fuente, la inversión temporal presenta leves mejoras a la hora de concentrar la energía acústica en un medio. Estas mejoras se pueden explicar debido a que la función  $h(t)$  tiene en cuenta la RAE de los elementos del array, mientras que la focalización sintética no.

Método	Ancho espacial (mm)	Ancho temporal ( $\mu s$ )
Focalización sintética	6.57	0.75
Inversión temporal	4.84	0.85

# Capítulo 3

## Focalización a través de medios inhomogéneos

### 3.1. Medios inhomogéneos aleatorios

En este punto queremos analizar qué ocurre cuando el medio de propagación no es homogéneo, es decir, si el medio contiene variaciones locales de la impedancia acústica en forma aleatoria. En este caso, es necesario conocer el valor local de la velocidad del sonido para poder utilizar la ley de retardos. Sin embargo, es esperable que, para leves perturbaciones del medio, la ley de retardos continúe concentrando la energía acústica en una zona acotada del espacio pero con un ancho mayor comparada con el medio homogéneo. Si las perturbaciones al medio homogéneo son grandes en número o en extensión, entonces será necesario recurrir a otros métodos de focalización como la inversión temporal.

En esta sección introduciremos el formalismo de Green para tratar la propagación de ondas acústicas en medios de scattering múltiple (o medios multidifusores). Este formalismo junto con la aproximación de medio diluido nos permiten definir un medio efectivo independiente de la configuración de desorden y una distancia característica denominada recorrido libre medio elástico.

#### 3.1.1. Función de Green

La función de Green corresponde a la solución de la ecuación de propagación en un medio dado, con la condición inicial de que en tiempo  $t = 0$  el sistema es excitado por una fuente puntual en  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ . Esto implica que la ecuación

(2.2) puede reescribirse en términos de la función de Green en el dominio de la frecuencia de la siguiente manera:

$$(\nabla^2 + k^2) G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

donde las condiciones de frontera están fijadas en el infinito.  $G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$  está definida a partir de la transformada de Fourier

$$G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t) G(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

Para el caso de un medio homogéneo  $k = k_0$  y  $G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . En este caso la respuesta del sistema es independiente de la posición de la fuente y por lo tanto la función de Green depende únicamente de la separación entre el emisor y el receptor

$$G_0(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$(\nabla^2 + k_0^2) G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.1)$$

Si trabajamos en el espacio de las frecuencias espaciales (espacio recíproco), la función de Green en el espacio real puede obtenerse realizando la transformada inversa de Fourier. De esta forma

$$G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int d\mathbf{k} \frac{\exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{(2\pi)^d} \tilde{G}_0(\omega, \mathbf{k})$$

y

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int d\mathbf{k} \frac{\exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{(2\pi)^d}$$

donde la cantidad  $d$  denota la dimensión espacial. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (3.1), y considerando que el operador  $\nabla^2$  actúa únicamente sobre la variable  $\mathbf{r}$

$$[k_0^2(\omega) - k^2] \int d\mathbf{k} \frac{\exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{(2\pi)^d} \tilde{G}_0(\omega, \mathbf{k}) = \int d\mathbf{k} \frac{\exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{(2\pi)^d}$$

Simplificando

$$[k_0^2(\omega) - k^2] \tilde{G}_0(\omega, \mathbf{k}) = 1$$

Finalmente, se obtiene

$$\tilde{G}_0(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{k_0^2(\omega) - k^2} \quad (3.2)$$

La ecuación (3.2) nos brinda la solución a una onda de frecuencia  $\omega$  y vector de onda  $\mathbf{k}$ , vinculados con la velocidad de propagación del medio homogéneo a través de la relación de dispersión. Físicamente, este resultado indica que el sistema selecciona en la propagación aquellos valores de  $\mathbf{k}$  cercanos a  $\mathbf{k}_0$ .

Obtenida la función de Green en el espacio  $\mathbf{k}$ , es posible llegar a la solución en el espacio real realizando la transformada inversa de Fourier. Esta solución se consigue mediante la operación descrita anteriormente. La dimensión del espacio real en consideración es de gran importancia, ya que a pesar de que la función de Green en el espacio recíproco posee una expresión independiente de la dimensión, en el espacio real esto no es así. Aquí presentamos la solución para los casos de mayor interés [38]

$$G_0^\pm(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} -\frac{\exp[\pm ik_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} & , \text{ en } 3D \\ \mp \frac{i}{4} H_0^{(1,2)}(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) & , \text{ en } 2D \\ \mp \frac{i}{2k_0} \exp[\pm ik_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|] & , \text{ en } 1D \end{cases} \quad (3.3)$$

El superíndice en la función de Green determina si la onda es divergente (+) o convergente (-). La función  $H_0$  es la función de Hankel de orden cero, donde sus dos especies están determinadas por las funciones de Bessel

$$H_n^{(1,2)}(x) = J_n(x) \pm iY_n(x)$$

La función de Green en distintas dimensiones nos permite expresar matemáticamente situaciones donde aparece la propagación de ondas. Como veremos, estas expresiones pueden extenderse a situaciones donde la presencia del scattering múltiple tiene un carácter predominante. Utilizando el formalismo de Green nos será posible comprender los sucesos que ocurren a lo largo de una experiencia de scattering en función de los momentos determinados por las

correlaciones entre funciones de Green junto al promedio en las configuraciones del sistema (promedio en el ensemble).

El razonamiento seguido a continuación en las próximas secciones puede verse detalladamente en el apéndice (A1). En las próximas secciones se muestra en forma resumida los resultados más importantes del fundamento teórico, los cuales son de utilidad para seguir la línea de este trabajo de tesis.

### 3.1.2. Formalismo de Green

Supongamos ahora que  $k$  es de la forma (2.3). En este caso, la ecuación de Green resulta

$$(\nabla^2 + k_0^2) G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \sigma(\mathbf{r}) G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

donde tenemos que la solución es

$$G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}_1 G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_1) G(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \quad (3.4)$$

Como puede verse aquí, la función que queremos determinar aparece en la forma de una ecuación autoconsistente, lo que significa que para hallar la solución analítica  $G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$  de nuestro problema, es necesario conocer previamente  $G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ .

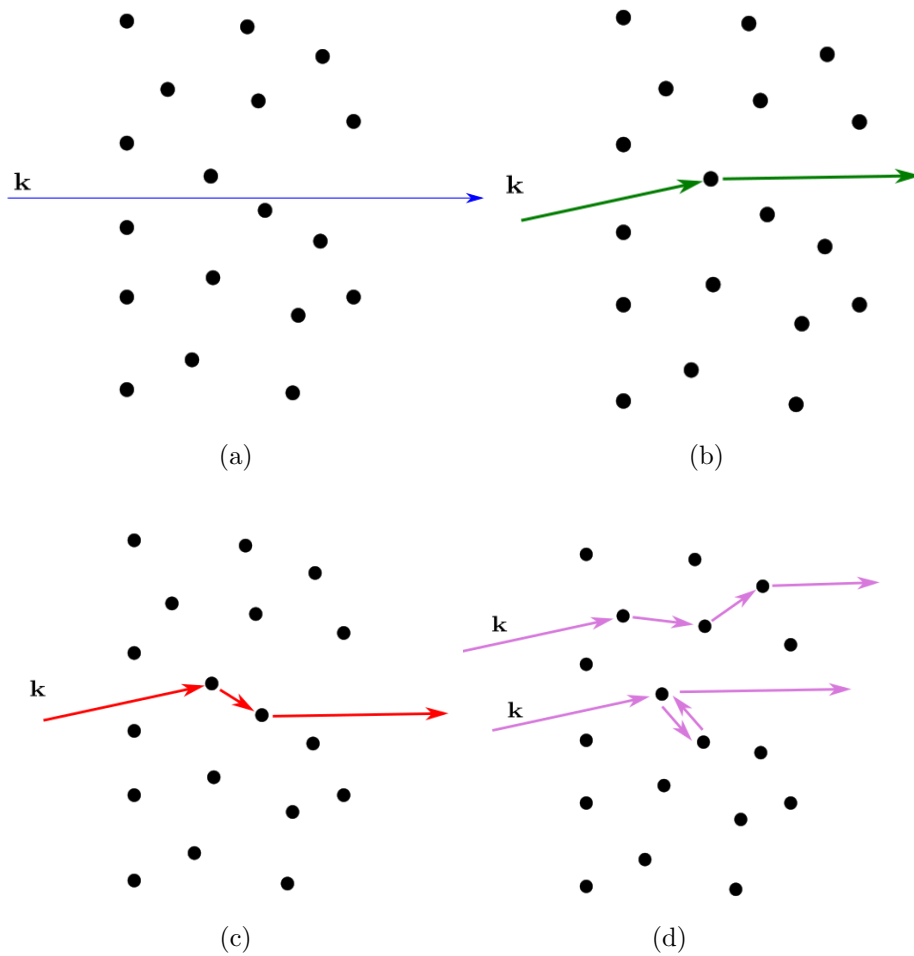
Sustituyendo en forma iterativa, obtenemos una expresión para (3.4) donde la función incógnita aparece únicamente de un lado de la igualdad.

$$G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}_1 G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_1) \\ \times \left[ G_0(\omega, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}_2 G_0(\omega, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \sigma(\mathbf{r}_2) [\dots] \right]$$

Reordenando términos

$$G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}_1 G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_1) G_0(\omega, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}')$$

$$\begin{aligned}
& + \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_1) G_0(\omega, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \sigma(\mathbf{r}_2) G_0(\omega, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}') \\
& + \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{r}_3 G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_1) G_0(\omega, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\
& \quad \times \sigma(\mathbf{r}_2) G_0(\omega, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \sigma(\mathbf{r}_3) G_0(\omega, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}') + \dots
\end{aligned}$$



**Figura 3.1:** Interpretación de los términos que aparecen en la expresión para la solución de Green  $G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . (a) Primer término del desarrollo, relacionado con la onda balística que no sufre ningún evento de scattering. (b) Término correspondiente a un único evento de scattering. Hasta este término tiene en cuenta la conocida aproximación de Born. (c) Término correspondiente a dos eventos de scattering. (d) Término correspondiente a tres eventos de scattering. Vemos que a partir de este término comienzan a presenciarse recorridos recurrentes para las ondas que atraviesan el medio.

En la figura (3.1) se muestra una interpretación de cada término que aparece en la solución de la función de Green. A su vez, se ve el vínculo de los respectivos términos con los eventos de scattering en el medio inhomogéneo, representados por la función  $\sigma(\mathbf{r})$ .

Esta expresión da la solución exacta de la función de Green en un medio de múltiple scattering. La dependencia de esta solución recae en la solución para el espacio homogéneo y la función  $\sigma(\mathbf{r})$ . Será de conveniencia introducir la notación de Dirac y escribir las funciones  $G_0$ ,  $G$  y  $\sigma$  en términos de sus operadores asociados

$$\begin{cases} \langle \mathbf{r} | \mathbf{G} | \mathbf{r}' \rangle = G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \langle \mathbf{r} | \mathbf{G}_0 | \mathbf{r}' \rangle = G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \langle \mathbf{r} | \mathbf{V} | \mathbf{r}' \rangle = \sigma(\mathbf{r}) \delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \end{cases} \quad (3.5)$$

Análogamente

$$\begin{cases} \langle \mathbf{k} | \mathbf{G} | \mathbf{k}' \rangle = \tilde{G}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}') \\ \langle \mathbf{k} | \mathbf{G}_0 | \mathbf{k}' \rangle = \tilde{G}_0(\omega, \mathbf{k}) \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \end{cases} \quad (3.6)$$

De esta manera, la solución dada por la ecuación (3.4) para la función de Green del espacio no homogéneo puede escribirse como

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G} \quad (3.7)$$

Desarrollando esta expresión sustituyendo  $\mathbf{G}$  en forma iterada

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 + \dots$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 (\mathbf{V} + \mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V} + \dots) \mathbf{G}_0$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{T} \mathbf{G}_0 \quad (3.8)$$

Donde llamaremos matriz  $\mathbf{T}$  o matriz de *scattering* a la serie determinada por la composición de los operadores asociados a la función de Green en el espacio homogéneo ( $\mathbf{G}_0$ ) y a la perturbación del medio debida a la presencia de los dispersores ( $\mathbf{V}$ ). Esta matriz contiene la información de todos los eventos posibles de scattering. Cada término que define esta serie se corresponde a



la contribución de un evento de scattering: el primer término corresponde a cuando ocurre un sólo evento de scattering; el segundo cuando ocurren dos; el  $n$ -ésimo cuando ocurren  $n$ .

Si consideramos que a medida que aumenta el número de eventos de scattering la contribución a la función de Green es más pequeña, podemos expresar la serie que define a la matriz  $\mathbf{T}$  como una serie geométrica. Así, podemos escribir una expresión para  $\mathbf{T}$  como sigue [38]

$$\mathbf{T} = \mathbf{V} + \mathbf{V}\mathbf{G}_0\mathbf{V} + \mathbf{V}\mathbf{G}_0\mathbf{V}\mathbf{G}_0\mathbf{V} + \dots$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{V} \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{G}_0\mathbf{V})^n = \mathbf{V} (\mathbf{I} - \mathbf{G}_0\mathbf{V})^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{G}_0)^{-1} \mathbf{V} \quad (3.9)$$

donde, si analizamos la definición (3.5), observamos que  $\mathbf{V}$  es un operador diagonal. Esto significa que  $\mathbf{V}$  conmuta con cualquier otro operador.

Teniendo pleno conocimiento de la matriz  $\mathbf{T}$ , es posible hallar la solución general a la ecuación

$$(\nabla^2 + k_0^2 - \sigma(\mathbf{r})) \phi(\omega, \mathbf{r}) = 0$$

en términos de la solución para el medio homogéneo  $\phi_0$  y  $G_0$

$$|\phi\rangle = |\phi_0\rangle + \mathbf{G}_0\mathbf{V}|\phi\rangle = |\phi_0\rangle + \mathbf{G}_0\mathbf{V}|\phi_0\rangle + \mathbf{G}_0\mathbf{V}\mathbf{G}_0\mathbf{V}|\phi_0\rangle + \dots$$

$$|\phi\rangle = |\phi_0\rangle + \mathbf{G}_0\mathbf{T}|\phi_0\rangle \quad (3.10)$$

Notemos aquí que si usamos solamente el primer orden en  $\mathbf{T}$  obtenemos lo que se conoce como scattering simple o de Rayleigh [26].

### 3.1.3. Sección eficaz de scattering y teorema óptico

El teorema óptico relaciona la sección eficaz total de un dispersor con la amplitud dispersa en la dirección de propagación de la onda incidente.

La sección eficaz de scattering se define como la superficie efectiva del dispersor que ve una onda monocromática al tener contacto con él. En otras palabras, es la potencia esparcida por el dispersor en términos de la intensidad

incidente sobre el mismo [33, 38]. Matemáticamente, esto es

$$\sigma_d = \frac{I_s(\theta, \varphi)}{I_0} \quad (3.11)$$

donde  $(\theta, \varphi)$  son las coordenadas angulares.

La sección eficaz total se obtiene al integrar la expresión (3.11) para  $\sigma_d$  en todo el ángulo sólido.

$$\sigma_T = \int \frac{I_s}{I_0} d\Omega \quad (3.12)$$

La función de forma se define como el coeficiente que indica la directividad de la onda esparcida por un dispersor. Esta función resulta de utilidad para determinar la sección eficaz de un dispersor como hallaremos a continuación.

Consideremos regiones del espacio que satisfacen  $r \gg R$ . En este límite la cantidad  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$  puede aproximarse por  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \simeq r - r_1 \cos \theta$ , siendo  $\theta$  el ángulo entre  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}_1$ . En el caso 3D obtenemos

$$G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \simeq -\frac{\exp(ik_0 r)}{4\pi r} \exp(-i\mathbf{k}'_0 \cdot \mathbf{r}_1)$$

En el caso más general, se define la amplitud de scattering  $f(\mathbf{k}'_0, \mathbf{k}_0)$  en la forma

$$\phi(\omega, \mathbf{r}) \xrightarrow{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) + f(\mathbf{k}'_0, \mathbf{k}_0) \frac{\exp(ik_0 r)}{r^{\frac{(d-1)}{2}}} \quad (3.13)$$

donde la forma explícita de la función depende de la dimensión  $d$  del espacio.

Es de utilidad realizar algunas interpretaciones para comprender mejor  $f(\mathbf{k}'_0, \mathbf{k}_0)$ .

El vector de onda  $\mathbf{k}_0$  es el vector de onda incidente, es decir, el que define la dirección de propagación de la onda plana que excita el medio dispersor. Por otra parte,  $\mathbf{k}'_0$  es un vector con el mismo módulo que  $\mathbf{k}_0$  pero que difiere en la dirección. De la aproximación de la función de Green para campo lejano, vemos que es posible interpretar a  $\mathbf{k}'_0$  como el vector de onda que apunta en la dirección de observación. En definitiva, la amplitud de scattering está definida en términos de los componentes del medio, así como también la relación entre la dirección de incidencia y la dirección de observación.

$$f(\mathbf{k}'_0, \mathbf{k}_0) = \begin{cases} -\frac{\langle \mathbf{k}'_0 | \mathbf{T} | \mathbf{k}_0 \rangle}{4\pi} & , d = 3 \\ -\frac{1+i}{4\sqrt{\pi}k_0} \langle \mathbf{k}'_0 | \mathbf{T} | \mathbf{k}_0 \rangle & , d = 2 \\ -\frac{i}{2k_0} \langle \mathbf{k}'_0 | \mathbf{T} | \mathbf{k}_0 \rangle & , d = 1 \end{cases} \quad (3.14)$$

La sección eficaz de scattering se relaciona con la función de forma según la siguiente expresión

$$\sigma_d = |f(\theta, \phi)|^2 \quad (3.15)$$

Por tanto, la sección eficaz total es

$$\sigma_T = \int |f(\theta, \phi)|^2 d\Omega \quad (3.16)$$

Consideremos que la dirección de señal observada coincide con la de la onda incidente, es decir,  $\mathbf{k}'_0 = \mathbf{k}_0$ . Sustituyendo (3.14) obtenemos la expresión general para el teorema óptico

$$\sigma_T = \frac{1}{k_0} \text{Im} [\langle \mathbf{k}_0 | \mathbf{T} | \mathbf{k}_0 \rangle] \quad (3.17)$$

### 3.1.4. Promedio en las configuraciones y el operador energía propia

Partiendo de la ecuación (3.7)

$$\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{G}_0^{-1} - \mathbf{V} \quad (3.18)$$

donde vemos cómo se relacionan las inversas de la función de Green y la solución en el espacio homogéneo con el operador  $\mathbf{V}$ .

Por otro lado, si partimos de la ecuación (3.8), el promedio sobre las distintas configuraciones de desorden de la solución  $\mathbf{G}$  es

$$\langle \mathbf{G} \rangle = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \langle \mathbf{T} \rangle \mathbf{G}_0 \quad (3.19)$$

Dado que la función de Green en el medio homogéneo no depende de  $\sigma(\mathbf{r})$ , el promedio configuracional no actúa sobre ella.

En forma similar, se define el operador energía propia como el término que relaciona los inversos de las funciones de Green promediadas en las configu-

raciones, análogo a la ecuación (3.18). Partiendo de la ecuación (3.19) encontramos una relación para las inversas de las funciones de Green promediadas

$$\langle \mathbf{G} \rangle^{-1} = \mathbf{G}_0^{-1} - \Sigma \quad (3.20)$$

Aunque el operador energía propia  $\Sigma$  aparece en forma análoga a  $\mathbf{V}$  en la ecuación (3.18), su significado es muy diferente. En el espacio real,  $\mathbf{V}$  representa en forma local las perturbaciones debidas a  $\sigma(\mathbf{r})$ .  $\Sigma$  por su parte representa eventos en forma más general, tornándose independiente de la configuración particular de desorden.

La ecuación (3.20) es conocida como ecuación de Dyson, donde la definición explícita de  $\Sigma$  está dada por la expresión [38]

$$\Sigma = \langle \mathbf{T} \rangle (\mathbf{I} + \mathbf{G}_0 \langle \mathbf{T} \rangle)^{-1} \quad (3.21)$$

### 3.1.5. Medio efectivo y la aproximación de potencial coherente (CPA)

Cuando estamos en el caso de infinitos difusores, es imposible obtener la matriz  $T$  o la función de Green  $G$  con total precisión. Sin embargo, en el espacio de Fourier, la expresión (3.2) para  $G_0$  resulta lo suficientemente sencilla como para hallar el promedio en las configuraciones de la función de Green. Despejando de (3.20) obtenemos

$$\langle \tilde{G} \rangle = \frac{1}{k_0^2(\omega) - k^2 - \Sigma(\omega, \mathbf{k})} \quad (3.22)$$

En aquellos casos en que la energía propia no depende del vector de onda, es decir  $\Sigma = \Sigma(\omega)$ , el efecto de este término es simplemente la renormalización del vector de onda en el medio homogéneo  $k_0$ . En particular, es imprescindible que  $\Sigma$  sea independiente de  $k$  dado que de esta forma es posible recuperar la ecuación de onda en el espacio real.

$$[k_0^2(\omega) + \nabla^2] \langle G \rangle(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') - \int \Sigma(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \langle G \rangle(\omega, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') d\mathbf{r}_1 = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

donde, para obtener la ecuación de ondas nuevamente, es necesario que la energía propia tenga la forma

$$\Sigma(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') = \Sigma'(\omega) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.23)$$

donde se desprende la independencia respecto a  $k$ .

Sustituyendo este resultado en la ecuación de Dyson, obtenemos que

$$\langle \tilde{G} \rangle = \frac{1}{[k_0^2(\omega) - \Sigma'(\omega)] - k^2} \quad (3.24)$$

donde se han agrupado los términos que dependen únicamente de la frecuencia.

De este modo, definimos el vector de onda efectivo  $k_e$  como el valor de  $k_0$  renormalizado por la energía propia del sistema.

$$k_e^2(\omega) = k_0^2(\omega) - \Sigma'(\omega) \quad (3.25)$$

La función de Green promedio tendrá la misma forma que  $G_0$ , sustituyendo el vector de onda  $k_0$  por el valor efectivo  $k_e$ . Por ejemplo, para el caso 3D tenemos que

$$\langle G \rangle = -\frac{\exp(ik_e |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

En analogía con el medio homogéneo, podemos renormalizar las ecuaciones respecto al valor de la energía propia  $\Sigma$ , de forma tal de pasar de trabajar con  $G_0$  a definir una nueva función  $G_e$ , siendo esta última la función de Green para el medio efectivo. Notemos aquí que  $G_e$  recupera la dependencia de la posición relativa entre fuente y receptor. Es decir, la función de Green del medio efectivo obedece la reciprocidad fuente-receptor.

Utilizando la noción de medio efectivo, es posible reescribir la ecuación (3.20) en términos de  $G_e$ . De esta forma tenemos que

$$\langle \mathbf{G} \rangle^{-1} = \mathbf{G}_e^{-1} - \bar{\Sigma} \quad (3.26)$$

donde se tiene que, necesariamente, la función  $\bar{\Sigma}$  debe anularse en la renormalización del medio efectivo.

Concluimos varios resultados que se corresponden con la renormalización del medio efectivo que resultan en simplificaciones operacionales. De las ecuaciones (3.19), (3.21) y (3.26), y utilizando que  $\bar{\Sigma} = 0$ , se obtiene

$$\begin{cases} \langle \overline{\mathbf{T}} \rangle = 0 \\ \mathbf{G} = \mathbf{G}_e + \mathbf{G}_e \overline{\mathbf{T}} \mathbf{G}_e \\ \langle \mathbf{G} \rangle = \mathbf{G}_e \end{cases} \quad (3.27)$$

Estos resultados son la consecuencia directa de que el operador energía propia  $\Sigma$  sea independiente del vector de onda  $k$  ( $\Sigma(\omega, \mathbf{k}) = \Sigma(\omega)$ ) y de haber realizado la renormalización del medio efectivo. Esta aproximación es conocida como *coherent potential approximation* (CPA) o aproximación de medio diluido. Esta puede entenderse bajo la simple idea de que, hablando en términos relativos al medio efectivo, el promedio en las configuraciones de la función de Green se comporta como la función de Green en un medio homogéneo. El concepto de medio diluido hace referencia a los difusores como puntuales, de ahí el factor  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  que aparece en (3.23). Esta aproximación no funciona con medios densos de múltiple scattering, como por ejemplo medios granulares, donde hay que recurrir a otras hipótesis de trabajo [39].

La aproximación de medio efectivo transmite la idea que en él no ocurren eventos de scattering. Sin embargo, el scattering está presente. Aunque  $\langle \overline{\mathbf{T}} \rangle = 0$  en general  $\langle \overline{\mathbf{T}\mathbf{T}} \rangle \neq 0$ . Es así que podemos concluir que la aproximación CPA implica scattering débil.

De esta manera, podemos asumir que la matriz  $\overline{\mathbf{T}}$  admite una expresión de la forma

$$\overline{\mathbf{T}} \simeq \sum_i \overline{\mathbf{t}}_i \quad (3.28)$$

donde  $\mathbf{t}_i$  es la matriz de scattering para cada difusor del sistema.

### 3.1.6. Recorrido libre medio elástico

En general,  $\Sigma$  es una cantidad compleja, por lo que  $k_e$  también lo es. Esto implica que, cuando pasamos del espacio recíproco al espacio real, en la función de Green aparece con un término evanescente debido a la parte imaginaria del vector de onda efectivo.

Considerando el caso mencionado, vemos que la expresión para la función de Green en el medio efectivo puede escribirse como

$$\langle G \rangle = - \exp(-\mathbf{Im}(k_e) |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{\exp(i\mathbf{Re}(k_e) |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.29)$$

De esta ecuación se desprende que necesariamente  $\mathbf{Im}(k_e) > 0$ .

De la definición (3.25) vemos que la parte imaginaria de  $k_e$  está directamente relacionada con  $\mathbf{Im}(\Sigma')$ . A su vez, podemos relacionar esta última con el promedio en las configuraciones de la matriz  $T$  utilizando (3.21). A través del teorema óptico, relacionamos tal promedio con la sección eficaz total de scattering. Este razonamiento implica que el decaimiento exponencial en  $\langle G \rangle$  es debido a pérdidas por scattering. Como cada evento de scattering es considerado elástico lo que se pierde es la directividad de la onda incidente sobre el medio difusor, es decir, la coherencia de la misma.

Partiendo de la ecuación (3.25), tenemos que

$$k_e = k_0 \left(1 - \frac{\Sigma'}{k_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Si suponemos que  $\Sigma'$  es pequeño comparado con  $k_0$ , podemos aproximar la expresión anterior

$$k_e = k_0 - \frac{\Sigma'}{2k_0}$$

donde finalmente, tomando la parte imaginaria vemos que

$$\mathbf{Im}(k_e) = \frac{-\mathbf{Im}(\Sigma')}{2k_0} \quad (3.30)$$

A su vez, tenemos que la parte imaginaria del vector de onda en el medio efectivo está relacionada con el recorrido libre medio elástico bajo la siguiente definición

$$\mathbf{Im}(k_e) = \frac{1}{2l_e} \quad (3.31)$$

Por lo que, utilizando el teorema óptico, se puede ver que el recorrido libre medio elástico se relaciona con la sección eficaz total  $\sigma_T$  y la densidad de difusores  $n$

$$l_e = \frac{1}{n\sigma_T} \quad (3.32)$$

Esta cantidad obtenida representa la longitud en la que la intensidad del

campo coherente se extingue en un 63 %. El recorrido libre medio es una medida de cuánta distancia debe recorrer la onda antes de olvidarse dónde se originó. Es decir, es la distancia característica en la que el campo se torna incoherente.

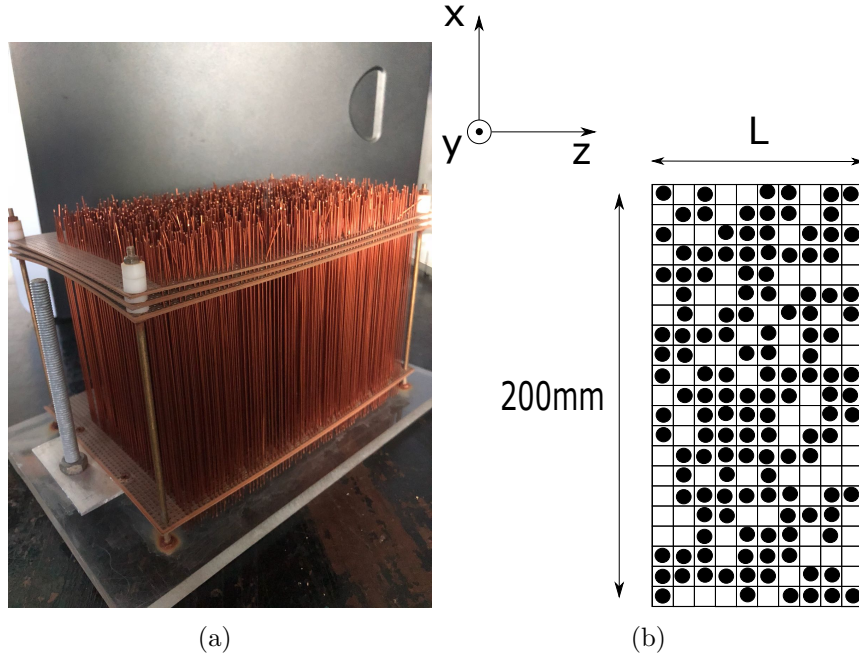
## 3.2. Medios de múltiple scattering

Como medio de múltiple scattering utilizamos en estas experiencias alambres de cobre cilíndricos de  $0.7mm$  de diámetro situados de forma aleatoria en una grilla regular que tiene centros huecos de  $0.8mm$  de diámetro separados  $2.6mm$  entre sí. De esta forma, la distancia mínima entre alambres es de  $1.1mm$ . El largo de los alambres es de  $100mm$ , valor mucho mayor al diámetro. Los alambres se sitúan en la grilla paralelos entre sí con el largo orientado en la dirección  $y$ . Para situarlos en la grilla se elige primero la densidad  $n$  de alambres por unidad de área y luego se genera un programa con números aleatorios que indiquen la posición de cada uno en la grilla para esa densidad. Al medio conformado de esta manera le llamaremos “bosque de alambres”. La figura (3.2a) muestra una foto del bosque de alambres. La figura (3.2b) muestra un corte en el plano  $xz$  del bosque donde se indican las dimensiones aquí mencionadas. Como nuestro emisor lineal está dispuesto en la dirección  $x$ , el campo acústico difracta en la dirección  $y$  por lo que el array emite en realidad una onda cilíndrica (considerando el campo en 3D). Como a su vez el bosque dista varias longitudes de onda del emisor, podemos considerar que sobre el bosque arriba una onda plana. La simetría del problema hace que los resultados sean independientes de la coordenada  $y$ .

### 3.2.1. Inversión temporal en función de la densidad de scatterers

La elección de la densidad de difusores no fue aleatoria. Para conocer la densidad más eficiente para el medio de múltiple scattering con el que trabajamos realizamos una experiencia donde calificamos la inversión temporal en términos de la densidad. Por la forma del setup experimental tenemos dos limitantes o casos extremos. Debido a que la grilla es regular, ocupar todos los espacios disponibles no es deseable ya que el bosque se volvería periódico, lo que favorecería frecuencias que tengan una longitud de onda asociada del orden de la separación media entre alambres. Por otra parte, necesitamos





**Figura 3.2:** Bosque de alambres. (a) Fotografía del sistema utilizado durante las experiencias. (b) Corte en el plano  $xz$  del sistema.

gran cantidad de difusores en el medio, para así obtener una coda más rica en términos de componentes de vector de onda. Es por esto que debe tenerse especial cuidado a la hora de escoger la forma de trabajo.

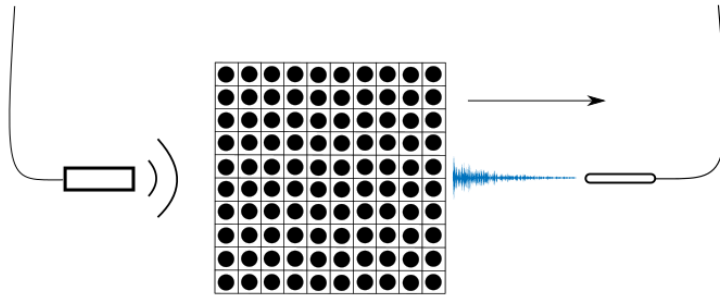
Comencemos por definir conceptos que harán más sencillo el trabajo a explicar en esta sección. Primero que todo, definimos la densidad relativa del medio de múltiple scattering  $\rho$  como la cantidad de sitios ocupados sobre cantidad de sitios disponibles en la grilla. Esta densidad nos facilitará el análisis de la inversión temporal. Notemos que con esta definición, los extremos mencionados están descritos por esta densidad en los casos  $\rho = 0$  y  $\rho = 1$ .

$$\rho = \frac{\text{espacios ocupados}}{\text{espacios totales}}$$

Antes de explicar detalladamente la experiencia realizada, será de utilidad establecer los criterios con los que se clasificará la inversión temporal. Como se mencionó anteriormente, el objetivo de la inversión temporal es concentrar la mayor cantidad de energía accesible en el tiempo y el espacio. Uno de los criterios escogidos por nosotros fue tomar el ancho temporal de la focalización. Consideramos el ancho en la intensidad del retorno temporal a mitad de altura, al igual que en el resto del trabajo de tesis. Debido a que nos interesa

saber qué porcentaje de la energía total logramos focalizar, utilizar la conocida relación señal-ruido (en decibeles) será el otro criterio que utilizaremos. Este último consiste en hallar la energía del foco en el dominio temporal y calcular el cociente con la energía distribuida en el resto de la señal de inversión temporal. Para pasar a  $dB$  simplemente tomamos el logaritmo en base 10 del cociente mencionado.

Se procedió experimentalmente de la siguiente manera. Se utilizaron un transductor piezoeléctrico circular plano de frecuencia central  $2.25MHz$  y diámetro  $9.4mm$  como elemento emisor. La excitación electrónica fue manipulada desde MatLab conectando un generador de funciones arbitrarias a través de un conector GP-IB. La señal electrónica a su vez se incrementó utilizando un amplificador ENI de  $50dB$  de ganancia en un amplio rango de frecuencias. Como elemento receptor se utilizó un hidrófono puntual conectado a un osciloscopio analógico. Este último también se conectó a la PC a través de un puerto GP-IB el cual permitió su manipulación desde MatLab. En la figura (3.3) se muestra el montaje experimental llevado a cabo para estas mediciones.



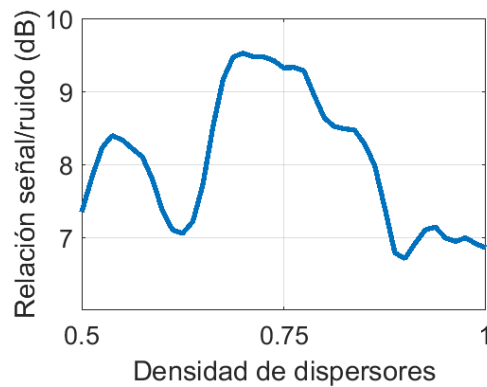
**Figura 3.3:** Montaje experimental para la determinación de la densidad óptima para realizar las experiencias de inversión temporal.

El sistema de múltiple scattering consistió en una región acotada de  $20 \times 20$  espacios ocupados de la grilla, es decir de densidad 1. Se excitó el medio con un ciclo de senoide a la frecuencia central del transductor, se adquirieron  $200\mu s$  de señal y se realizó el proceso de inversión temporal reemitiendo la coda desde el transductor hacia el medio. Luego de realizar la experiencia, se extraían cinco alambres de forma aleatoria, de modo que la densidad decrecía en una cantidad  $\Delta\rho = 0.0125$ . Así se procedió hasta reducir la densidad inicial  $\rho = 1$  a  $\rho = 0.5$ .

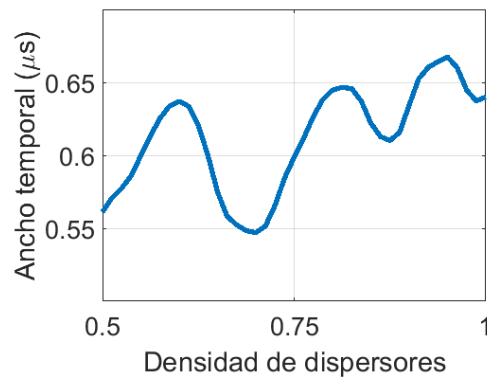
Finalmente se realizó el análisis de las señales de retorno temporal, donde los resultados obtenidos se muestran en la figura (3.4). Recordando que lo que

nos interesa es minimizar la focalización y maximizar la relación señal-ruido, vemos que ambas condiciones se cumplen simultáneamente en un rango de densidades entre 0.60 y 0.75 para la frecuencia con la que se trabajó. Estas densidades relativas se corresponden con un rango de densidad real de entre  $0.090\text{mm}^{-2}$  y  $0.12\text{mm}^{-2}$ .

A pesar de que en general las variaciones no son grandes, es claro que a la densidad escogida de 0.75 el sistema presenta una mejoría en términos de eficiencia de focalización temporal.



(a)



(b)

**Figura 3.4:** Clasificación de la inversión temporal en función de la densidad de difusores. (a) Relación señal-ruido en función de la densidad de difusores. (b) Ancho focal en el dominio temporal en función de la densidad de difusores.

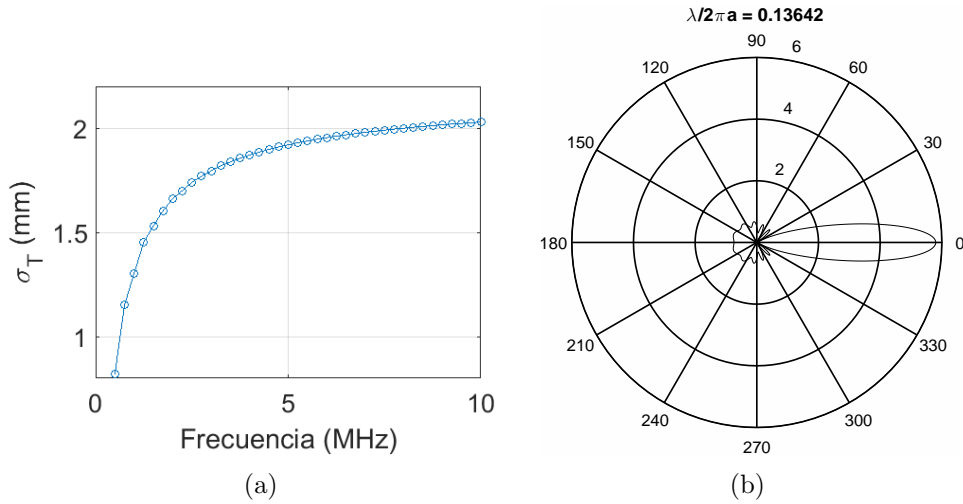
### 3.2.2. Determinación del recorrido libre medio

Determinada la densidad más eficiente para trabajar con el medio de scattering múltiple, resta calcular la profundidad característica para este medio:

el recorrido libre medio elástico. En esta sección se determina teóricamente el recorrido libre medio  $l_e$  dado por la ecuación (3.32) utilizando un modelo de cilindro rígido para cada difusor. Luego se compara este resultado con el valor experimental hallado mediante experiencias de intensidad coherente transmitida.

Modelando los difusores como cilindros rígidos de diámetro  $a = 0.7mm$ , vemos que la sección eficaz total de scattering en función de la frecuencia es como se muestra en la figura (3.5a) [33]. A su vez, siendo la frecuencia utilizada  $5MHz$ , la sección eficaz total toma el valor  $\sigma_T = 1.92mm$  y la dispersión angular de la intensidad toma la forma mostrada en (3.5b).

Modelar los cilindros como elementos rígidos es la aproximación más sencilla a realizar. Si no se comportaran de esta manera, el sistema presentaría resonancias para ciertos valores de frecuencia que excitan modos normales de propagación en los mismos (tanto ondas superficiales como volumétricas) [29]. Los resultados experimentales presentados en esta sección muestran que la hipótesis de rigidez se ajusta adecuadamente con las mediciones experimentales.

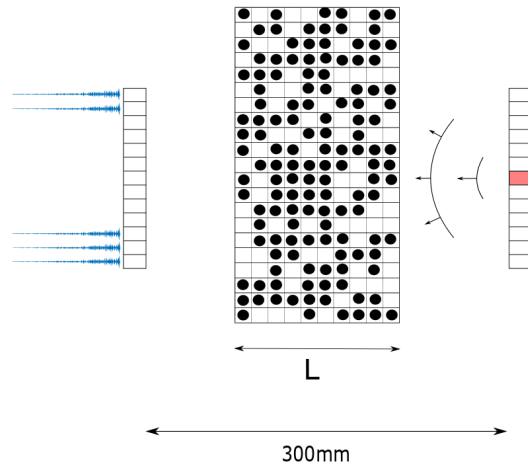


**Figura 3.5:** Sección eficaz diferencial y total de scattering. (a) Sección eficaz total de scattering en función de la frecuencia para un cilindro rígido. (b) Sección eficaz diferencial para  $5MHz$ .

Utilizando una densidad de difusores de  $n = 0.119mm^{-2}$ , tenemos que el valor teórico esperado para el recorrido libre medio elástico es

$$l_e^{teo} = \frac{1}{n\sigma_T} = 8.79mm \quad (3.33)$$

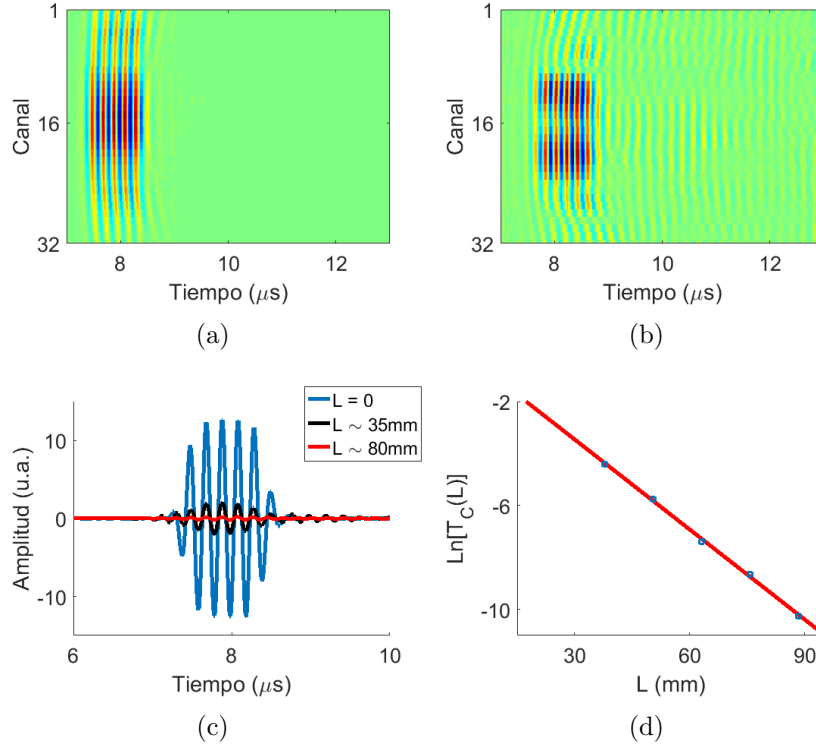
En la sección anterior vimos que la distancia característica  $l_e$  se define a través del decaimiento exponencial en la intensidad acústica coherente transmitida. Esto quiere decir que, para determinarla experimentalmente, es necesario realizar medidas de transmisión a través del medio aleatorio para varias configuraciones y para distintos valores de  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = L$ , siendo  $L$  la profundidad del mismo. En la figura (3.6) se muestra el montaje experimental utilizado.



**Figura 3.6:** Montaje experimental utilizado para las mediciones de intensidad coherente por transmisión.

Algunas de las señales obtenidas se muestran en la figura (3.7). En ella aparecen tanto los campos coherentes medidos así como también la comparación entre ellos para distintos valores de  $L$ . Para medir experimentalmente el campo coherente se realizó un promedio sobre 40 configuraciones de desorden. Para lograr diferentes configuraciones se desplazó el medio  $3mm$  en la dirección  $x$ , dejando al emisor y el receptor fijos. Se eligió esta distancia ya que es del orden de tres veces el pitch entre elementos del array y diez veces la longitud de onda.

De los resultados presentados en las figuras (3.7a) y (3.7b) observamos que, a pesar que el espesor del medio es varias veces  $l_e$ , todavía es posible distinguir el campo coherente. En la figura (3.7c) se muestran ejemplos de señales para un solo canal todas en la misma escala de amplitud. Esta figura es útil para ver que, a pesar de que el campo coherente todavía está presente, su atenuación debida al scattering múltiple hace que sea despreciable respecto al valor en el medio homogéneo.



**Figura 3.7:** Señales coherentes adquiridas para distintos valores de  $L$  y resultados de la experiencia. (a) Campo obtenido en medio homogéneo (agua). (b) Señal coherente para  $L \sim 80mm$ . (c) Comparación señales coherentes. (d) Coeficiente de transmisión coherente en función de la profundidad  $L$ .

Para determinar  $l_e$  experimentalmente calculamos el coeficiente de transmisión coherente en función de la profundidad del medio  $T_C(L)$ . Se midió el campo transmitido para 40 configuraciones diferentes y para varios valores de  $L$ , según la expresión

$$T_C(L) = \frac{\int u_C^2(L, t) dt}{\int u_C^2(0, t) dt} = \frac{\int |U_C(L, \omega)|^2 d\omega}{\int |U_C(0, \omega)|^2 d\omega} \quad (3.34)$$

donde  $u_C(L, t)$  es el campo acústico coherente y  $U_C(L, \omega)$  su transformada de Fourier.

De esta forma se determinó el recorrido libre medio elástico, obteniendo un valor experimental de

$$l_e^{exp} = (8.67 \pm 0.19) mm \quad (3.35)$$

donde el error obtenido es debido a la aproximación lineal realizada con los

datos.

En la figura (3.7d) se muestran los valores del coeficiente de transmisión en escala logarítmica, en función del ancho del medio.

Vemos que los puntos experimentales se ajustan a una recta. Este hecho valida el modelo CPA utilizado en la discusión teórica (ver sección 3.1.5), en particular la hipótesis de que el operador energía propia es independiente de  $\mathbf{k}$ . A su vez, notamos la cercanía entre el valor de  $l_e$  obtenido experimentalmente con el calculado teóricamente para cilindros rígidos (error relativo porcentual del orden de 1%). Esto indica que en el rango de frecuencias utilizadas, los cilindros no tienen resonancias apreciables que modifiquen la forma de la sección eficaz de scattering mostrada en (3.5a).

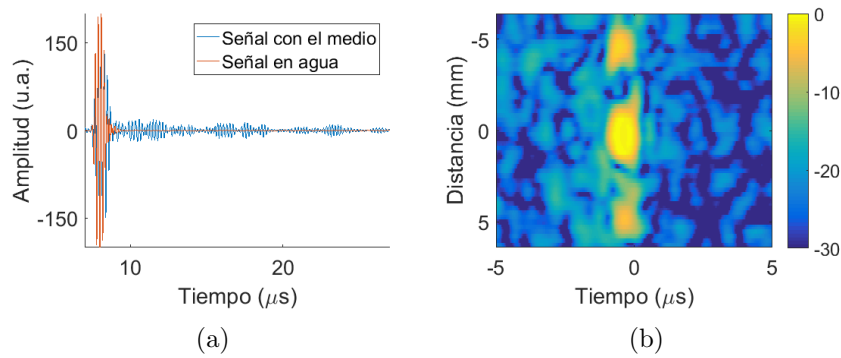
### 3.2.3. Efecto del medio de múltiple scattering en la inversión temporal

En esta sección se muestran los resultados obtenidos para la experiencia de inversión temporal a través de un medio de múltiple scattering poco profundo (es decir, profundidades del orden de  $l_e$ ). Los resultados discutidos en esta sección muestran que la presencia de un medio de estas características enriquecen la inversión temporal, obteniendo una mejor focalización de intensidad acústica.

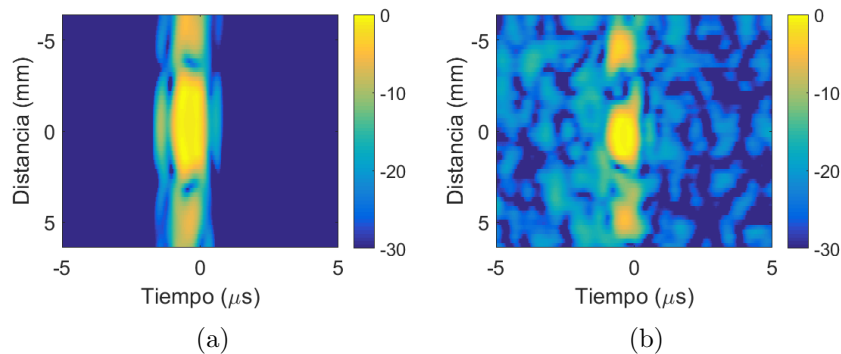
La experiencia de inversión temporal fue realizada para un bosque de profundidad  $L = 12mm$  (aproximadamente 1,5 veces  $l_e$ ). El ancho de este medio (distancia en la dirección  $x$ ) es del orden de  $200mm$ , por lo que aproximaremos al bosque como infinito en esta dimensión espacial. Debido a que la separación mínima ya es varias veces la longitud de onda utilizada, podemos asumir que el bosque de alambres se comporta como lo que se llama un medio diluido [26]. La densidad de difusores utilizada fue de  $n = 0.119mm^{-2}$ .

Colocando el medio descrito entre el emisor y el receptor, se realizó la experiencia de retorno temporal. Se adquirieron señales de  $100\mu s$  de duración con los 32 canales del array, las cuales fueron invertidas y reemitidas para lograr la focalización por inversión temporal. En la figura (3.8a) se muestra una de las señales adquiridas comparada con la señal adquirida en el medio homogéneo, mientras que en la figura (3.8b) se muestra la focalización espacio-temporal alcanzada por la inversión temporal. Notar que la duración de esta señal es varios órdenes mayor que la señal inicial. La señal se compone de

un pulso inicial de gran amplitud que es similar al pulso enviado. Este pulso normalmente es llamado pulso balístico y es el que arriba de forma directa entre el emisor y el receptor. Luego del pulso balístico aparece la señal de coda acústico. Esta parte de la señal tiene en cuenta los eventos de scattering ocurridos en el bosque que luego arribaron al receptor. A mayor tiempo de arribo, más eventos de scattering ocurrieron que produjeron un retardo en la onda para llegar al emisor. Notemos que, sin embargo, no es posible identificar un tiempo de arribo con una zona espacial precisa del bosque de alambres ya que esa señal pudo haber arribado al receptor mediante cualquier camino acústico que diste  $ct$  del mismo.



**Figura 3.8:** Resultados de la experiencia de inversión temporal a través del medio de múltiple scattering. (a) Comparación señal recibida en agua (roja) y señal recibida con el medio de múltiple scattering (azul). (b) Focalización espacio-temporal para la inversión temporal con el medio de múltiple scattering.



**Figura 3.9:** Comparación de la focalización espacio-temporal obtenida tras realizar la inversión temporal. (a) Focalización en agua. (b) Focalización obtenida con el medio de múltiple scattering.

En la figura (3.9) se muestra una comparación entre las focalizaciones



obtenidas en agua (a) y con el medio de múltiple scattering (b). Claramente se denota una mejora en la focalización tanto en el espacio como en el tiempo. Los resultados obtenidos con el bosque son

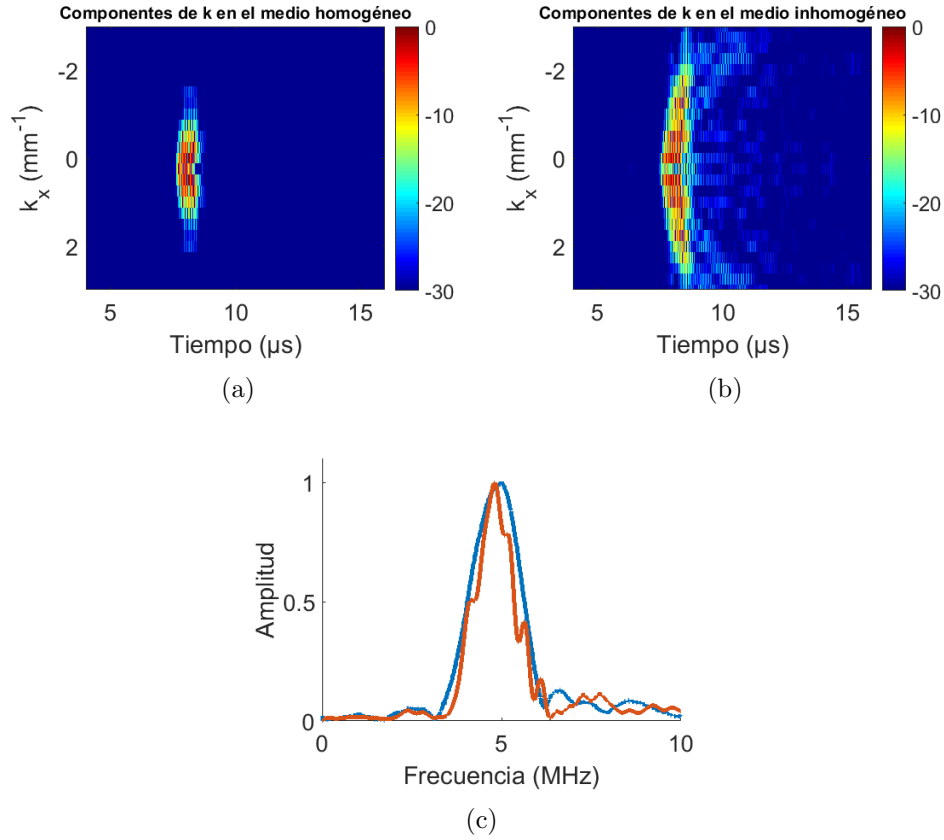
$$\begin{cases} \Delta l = 2.34mm \\ \Delta t = 0.67\mu s \end{cases} \quad (3.36)$$

Comparando los anchos temporales con la inversión temporal en agua y la focalización sintética vemos que, a pesar de haber una mejoría con el sistema de múltiple scattering, el valor hallado está en el mismo orden de magnitud de otros dos casos. Aún así, debemos tener en cuenta esta mejora dado que nuestro objetivo es minimizar el tamaño de la focalización tanto en tiempo como en espacio.

Por otra parte, el cambio más notable ocurre en la focalización espacial. La diferencia de la inversión temporal en agua sola y con el bosque es de aproximadamente la mitad. Este es el resultado más importante del medio de múltiple scattering. Lo que a priori podría pensarse como una dificultad para la focalización de ondas acústicas, es en realidad un beneficio desde el punto de vista de la resolución espacial del foco. La presencia del bosque de alambres mejoró notablemente la focalización espacial. En términos de la ecuación (2.5) en el capítulo anterior, este resultado se puede interpretar como un incremento de la apertura  $D$  del emisor, ya que  $\lambda$  y  $F$  no varían.

En efecto, el bosque de alambres introduce componentes del vector de ondas según la dirección  $x$  que no están en el campo coherente del emisor, como se muestra en la figura (3.10). En la figura mencionada se destaca la diferencia en las componentes del vector de onda que participan de las señales adquiridas. De estos resultados se verifica experimentalmente lo mencionado anteriormente: el aumento en las componentes transversales del vector de onda debido a la presencia del medio de scattering múltiple es equivalente a un incremento en la apertura aparente del EIT.

El proceso de la inversión temporal hace que todas las componentes se pongan en fase en el punto focal en el instante de la focalización. Como ahora el campo es más “rico” en componentes laterales del vector de ondas, el efecto es equivalente a incrementar la apertura del emisor en un medio homogéneo. Esto significa que aunque contemos con un EIT formado por poca cantidad de elementos piezoeléctricos, es posible optimizar la focalización de ondas acústicas



**Figura 3.10:** Componentes del vector de onda presentes en las codas adquiridas. (a) Componentes del vector de onda en la dirección  $x$  para las mediciones en agua. (b) Componentes del vector de onda en la dirección  $x$  para las mediciones con el sistema de múltiple scattering. (c) Comparación componentes de frecuencia entre la señal obtenida en agua (curva azul) y con el medio de múltiple scattering (curva roja).

utilizando un medio de múltiple scattering. En secciones posteriores se detalla más precisamente esta idea y cómo establecer criterios acerca de los mismos. Sin embargo, la mejora de la concentración de energía en el foco se ve contrarrestada por el incremento de ruido de fondo o señales residuales. Por más que esto no represente un problema en sí mismo, debido a que el objetivo de este trabajo es focalizar la energía acústica tanto espacial como temporalmente en forma óptima, minimizar el ruido de fondo también es una labor a considerar.

### 3.2.4. Focalización para medios poco profundos

En esta sección se trabaja con medios poco profundos, es decir, con  $L \sim l_e$ . Para este orden aún sobrevive la señal coherente, por lo que es esperable que

la focalización por ley de retardos continúe funcionando a pesar del sistema de múltiple scattering.

Debida a la abrupta mejora del retorno temporal frente al bosque de alambres, es de nuestro interés optimizar aún más esta focalización. Es por esto que se presenta un método que acopla la focalización sintética e inversión temporal.

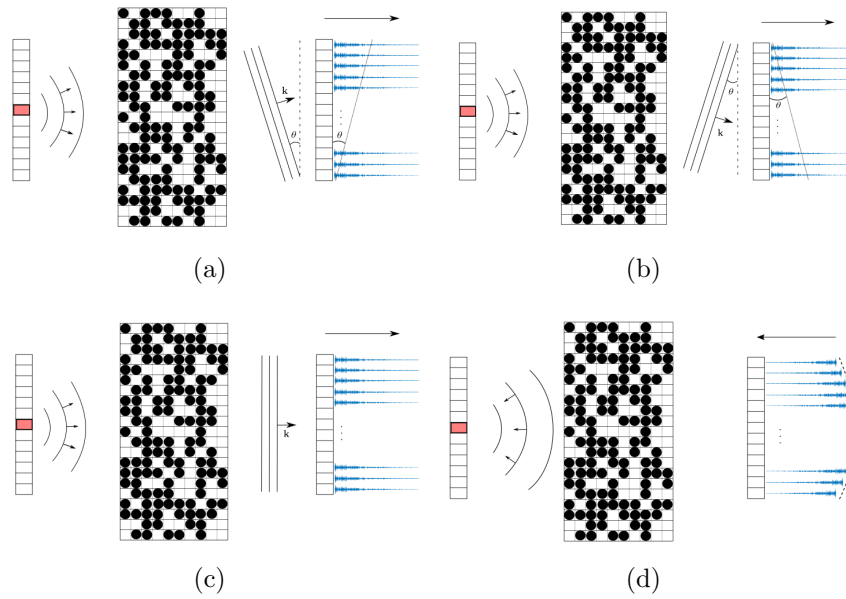
La focalización de la inversión temporal mejora a medida que más decae la onda coherente. Es por esto que es conveniente utilizar únicamente la coda en el proceso de inversión. Sin embargo, la focalización por ley de retardos utiliza la coherencia de la señal para focalizar. Es aquí donde unificaremos los métodos de forma de compensar la señal coherente presente en las señales adquiridas. Debido a que estamos bajo la condición  $L \sim l_e$ , la onda coherente conlleva la mayor parte de la energía acústica de las señales, por lo que conservarla y así mejorar la focalización será de gran utilidad.

Para combinar ambos métodos se procede de la siguiente manera. En la primera etapa la fuente excita el medio de múltiple scattering y el receptor adquiere las señales con un ángulo  $\theta$  dado, simulando un frente plano que arriba en esa dirección (3.11). Se repite este proceso para varios ángulos, tanto positivos como negativos. En la segunda etapa invertimos en el tiempo estas señales, que ya tienen incorporada la ley de retardos, idéntica a como realizamos para la focalización sintética. De esta forma nos aseguramos que la parte coherente de la señal presente la ley de retardos para interferir constructivamente en la región en torno a la fuente. En la figura (3.11) se muestra el método mencionado. Se destacan además, a modo de ejemplo, las adquisiciones para los ángulos  $\theta$ ,  $-\theta$  y el ángulo  $\theta = 0$ . Finalmente, en la figura (3.11d) se muestra esquemáticamente cómo es realizada la inversión temporal combinando las diferentes señales adquiridas.

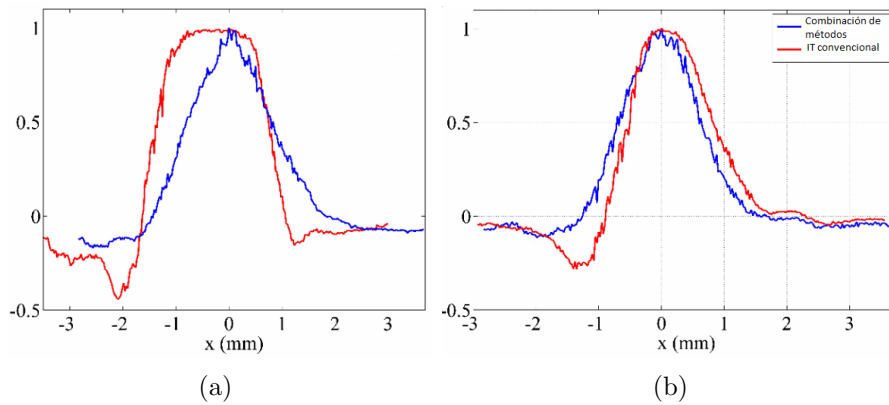
Comparando resultados con la inversión temporal convencional, vemos que la focalización espacial mejora cuando añadimos la ley de retardos en el proceso de inversión.

Para  $L = 3l_e$  los resultados obtenidos dan un ancho focal de  $2.2mm$  para la inversión temporal convencional, mientras que para la focalización combinada se obtuvo un ancho de  $1.4mm$ . Por otro lado, para  $L = 6l_e$ , se obtuvo como resultado  $1.5mm$  y  $1.4mm$ , respectivamente.

Podemos pensar que el efecto del proceso combinado es “reforzar” las altas frecuencias espaciales del campo coherente. En efecto, la ley de retardos introducida en la recepción de alguna forma “elimina” la información de la



**Figura 3.11:** Método implementado para combinar la inversión temporal con la focalización sintética. (a) Adquisición de un frente plano en ángulo  $\theta$ , cortando la señal adquirida por el receptor. (b) Adquisición del ángulo  $-\theta$ . (c) Adquisición del ángulo cero. (d) Promedio de todas las señales adquiridas para diferentes ángulos, invertida en el tiempo y reemitida en el proceso de inversión.



**Figura 3.12:** Focalizaciones obtenidas utilizando la inversión temporal (curva roja) y la combinación de la inversión temporal con la focalización sintética (curva azul). (a) Comparación para  $L = 3l_e$ . (b) Comparación para  $L = 6l_e$ .

posición de la fuente inicial presente en el campo coherente. Sin embargo, el resto de la señal de coda, contiene esta información. Al invertir las señales en cada canal pero con una ley de retardos cilíndrica, se combinan ambos efectos: la focalización debida a la apertura  $D$  del emisor con la focalización debida a la apertura aparente introducida por el bosque de alambres. El resultado es un

campo con un incremento de las frecuencias espaciales en la dirección  $x$  que mejoran la focalización. Es importante notar también cómo para medios más profundos el método combinado y la inversión temporal estándar tienden al mismo valor. Como se argumentó anteriormente, la eficacia de la ley de retardos depende de la parte coherente de la señal, por tanto es normal pensar que para medios muy profundos esta focalización no surta ningún efecto.

### 3.3. Discusión de resultados

Como resumen del capítulo, se destacan los resultados obtenidos para las distintas experiencias realizadas para medios de scattering múltiple.

Como primer punto destacable, cabe mencionar la determinación de la densidad óptima para realizar las experiencias de inversión temporal. Estos resultados nos permiten trabajar con una grilla discreta como medio aleatorio. Una de las principales ventajas que presenta el mismo es que su profundidad  $L$  es variable y manipulable, lo que permite trabajar en distintos niveles de scattering. A su vez presenta la ventaja de poder trabajar con medios periódicos, en caso de estudiar los bandgap existentes para la grilla utilizada (debidos a la periodicidad del sistema) y cómo los mismos afectan la inversión temporal.

Por otro lado, la determinación del recorrido libre medio como verificación de las hipótesis de trabajo. Es bien conocido en la bibliografía el método para determinar  $l_e$ . Sin embargo, lo más importante acerca de hallarlo radica en verificar experimentalmente las hipótesis asumidas en el fundamento teórico.

Se verificó que la presencia de un medio de múltiple scattering en el proceso de inversión temporal aumenta la apertura aparente del EIT. Incluso se corroboró que este efecto implica el aumento de las componentes en la dirección  $x$  del vector de onda incidente, aumento que contribuye a la focalización espacial de la inversión temporal. Además, utilizando esto, se optimizó la inversión temporal implementando una ley de retardos.

Combinando los métodos de focalización vistos en el capítulo (2), vemos que para medios poco profundos la focalización espacial mejora notablemente. Esto surge, por un lado, de la existencia del campo coherente. El campo coherente es aquella parte de la señal adquirida la cual sobrevive a pesar de las inhomogeneidades presentes (en forma aleatoria) en el medio. Por otro lado, el seleccionar y reforzar la contribución de las componentes del vector de onda en ángulos mayores. Este método presenta como novedad el utilizar la onda

coherente para optimizar la focalización espacial, en lugar de descartarla.

A modo de puesta a punto, se presenta la siguiente tabla comparativa con los resultados experimentales obtenidos.

Método	Ancho espacial (mm)
IT en agua	4.84
IT con bosque ( $1,5l_e$ )	2.34
IT con bosque ( $3l_e$ )	2.2
Focalización combinada ( $3l_e$ )	1.4
IT con bosque ( $6l_e$ )	1.5
Focalización combinada ( $6l_e$ )	1.4

# Capítulo 4

## Medios aleatorios difusivos

### 4.1. Procesos difusivos

#### 4.1.1. Difusión luego del múltiple scattering

En el capítulo anterior (3) se analizó teórica y experimentalmente qué ocurre con el campo coherente en un medio de múltiple scattering. Se verificó que el campo decae exponencialmente con una longitud característica  $l_e$ . En este capítulo se analizan sistemas cuya profundidad  $L$  es varias veces el recorrido libre medio  $l_e$ . En virtud de que el primer momento del campo  $\langle G \rangle$  se extingue luego de algunas veces  $l_e$ , analizaremos el comportamiento del segundo momento  $\langle GG^* \rangle$ . Físicamente, el producto  $GG^*$  está relacionado a la intensidad acústica  $I = GG^*/2Z$ , donde  $Z$  es la impedancia acústica del medio [33].

$$P(t; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = |G(t; \mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2 = G(t; \mathbf{r}, \mathbf{r}') G^*(t; \mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad (4.1)$$

donde estamos considerando distancias  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  largas en comparación con  $l_e$  y tiempos de adquisición  $t$  grandes comparados con la duración de la excitación inicial. Es importante notar que, bajo esta consideración, la parte coherente de la intensidad será lo suficientemente pequeña como para considerar a  $P$  como la intensidad incoherente. Es decir que el campo luego de atravesar un medio aleatorio de espesor mucho mayor a  $l_e$ , sufrió tantos eventos de scattering que su fase es aleatoria. Por lo tanto, el campo tiene fluctuaciones espaciales rápidas. Veremos en este caso que la intensidad acústica promediada sobre diferentes realizaciones de desorden está relacionada a una ecuación de difusión.

Sin embargo debemos tener presente que el campo acústico como tal sigue obedeciendo a la ecuación de ondas (2.1). Es decir que las experiencias de inversión temporal son todavía posibles en un medio de espesor  $L \gg l_e$ .

Considerando las funciones que aparecen en (4.1) en el espacio de las frecuencias (ver Apéndice 3), obtenemos

$$P(\Delta\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega_+; \mathbf{r}, \mathbf{r}') G^*(\omega_-; \mathbf{r}', \mathbf{r}) d\omega \quad (4.2)$$

donde las frecuencias que aparecen en la integral anterior están definidas como  $\omega_{\pm} = \omega \pm \frac{\Delta\omega}{2}$ .

Tomando el promedio sobre las distintas configuraciones de desorden, vemos que

$$\langle P(\Delta\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle G(\omega_+; \mathbf{r}, \mathbf{r}') G^*(\omega_-; \mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle d\omega$$

de donde la cantidad que aparece en el integrando la definimos como

$$S(\Delta\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle G(\omega_+; \mathbf{r}, \mathbf{r}') G^*(\omega_-; \mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle \quad (4.3)$$

Trabajando en el espacio recíproco, la igualdad anterior podemos plantearla como

$$S(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int \int \phi_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \quad (4.4)$$

donde tomamos la definición

$$\phi_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = \langle \langle \mathbf{k}_+ | \mathbf{G}(\omega_+) | \mathbf{k}'_+ \rangle \langle \mathbf{k}'_- | \mathbf{G}^*(\omega_-) | \mathbf{k}_- \rangle \rangle \quad (4.5)$$

Como veremos más adelante, la cantidad  $S$  puede interpretarse como una densidad de energía. Para ello debemos mostrar dos resultados previos, conocidos como la ecuación de Bethe-Salpeter e identidad de Ward. La primera es un análogo de la ecuación de Dyson para la intensidad, donde definiremos un operador llamado vértice irreducible que es el análogo al operador energía propia. La segunda puede entenderse como una ecuación de continuidad, donde relaciona variaciones en la densidad de intensidad incoherente con un flujo asociado a la misma.



### 4.1.2. Ecuación de Bethe-Salpeter

Partimos de la expresión de  $G$  dada por (3.27). La intensidad está dada por la fórmula (4.1), de modo que al tomar el promedio en las configuraciones trabajando en la notación operacional

$$\langle \mathbf{G}\mathbf{G}^* \rangle = \mathbf{G}_e \mathbf{G}_e^* + \langle \mathbf{G}_e \bar{\mathbf{T}} \mathbf{G}_e \mathbf{G}_e^* \bar{\mathbf{T}}^* \mathbf{G}_e^* \rangle \quad (4.6)$$

Si consideramos los operadores como matrices, podemos ver que  $(\mathbf{G}\mathbf{G}^*)_{i,j} = \mathbf{G}_{i,j} \mathbf{G}_{j,i}^*$ . Para analizar la correlación entre ambas funciones, es necesario tener en cuenta el producto entre cada elemento de cada uno de los operadores, obteniendo un tensor de cuarto rango. De esta forma, definimos el producto externo [38] como

$$(\mathbf{G} \otimes \mathbf{G}^*)_{i,l,j,k} = \mathbf{G}_{i,j} \mathbf{G}_{k,l}^* \quad (4.7)$$

Así, podemos desarrollar (4.6) en términos de este producto como

$$\langle \mathbf{G} \otimes \mathbf{G}^* \rangle = \mathbf{G}_e \otimes \mathbf{G}_e^* + \langle \mathbf{G}_e \bar{\mathbf{T}} \mathbf{G}_e \otimes \mathbf{G}_e^* \bar{\mathbf{T}}^* \mathbf{G}_e^* \rangle \quad (4.8)$$

A su vez, podemos escribir la expresión en términos de la componente  $(i, j, k, l)$  como

$$\begin{aligned} (\mathbf{G} \otimes \mathbf{G}^*)_{i,q,l,m} &= (\mathbf{G}_e)_{i,l} (\mathbf{G}_e^*)_{m,q} + \\ &\sum_{j,k,n,p} (\mathbf{G}_e)_{i,j} (\bar{\mathbf{T}})_{j,k} (\mathbf{G}_e)_{k,l} (\mathbf{G}_e^*)_{m,n} (\bar{\mathbf{T}}^*)_{n,p} (\mathbf{G}_e^*)_{p,q} \\ &= (\mathbf{G}_e)_{i,l} (\mathbf{G}_e^*)_{m,q} + \sum_{j,k,n,p} (\mathbf{G}_e \otimes \mathbf{G}_e^*)_{i,q,j,p} (\bar{\mathbf{T}} \otimes \bar{\mathbf{T}}^*)_{j,p,k,n} (\mathbf{G}_e \otimes \mathbf{G}_e^*)_{k,n,l,m} \end{aligned}$$

Entonces obtenemos la ecuación

$$\langle \mathbf{G} \otimes \mathbf{G}^* \rangle = \mathbf{G}_e \otimes \mathbf{G}_e^* + (\mathbf{G}_e \otimes \mathbf{G}_e^*) \Gamma (\mathbf{G}_e \otimes \mathbf{G}_e^*) \quad (4.9)$$

Definimos la función  $\Gamma = \langle \bar{\mathbf{T}} \otimes \bar{\mathbf{T}}^* \rangle$  como el vértice reducible. Esta función se entiende como el momento de segundo orden de todos los eventos posibles de scattering que ocurren en el sistema difusor.

Para visualizar con claridad el resultado anterior, expresemos las funciones que allí aparecen en términos de las variables espaciales

$$\begin{aligned}
\langle G(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}'_a) G^*(\mathbf{r}_b, \mathbf{r}'_b) \rangle &= \langle G(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}'_a) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}_b, \mathbf{r}'_b) \rangle + \\
&\int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{r}_3 \int d\mathbf{r}_4 \langle G(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_1) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}_b, \mathbf{r}_2) \rangle \times \\
&\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \langle G(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'_a) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}'_b) \rangle
\end{aligned} \tag{4.10}$$

donde hemos omitido la dependencia frecuencial para facilitar su entendimiento.

Definamos ahora el vértice irreducible  $U$ . Supongamos que  $\Gamma$  admite una expresión de la forma [38]

$$\Gamma = \mathbf{U} + \mathbf{U} (\mathbf{G}_e \otimes \mathbf{G}_e^*) \Gamma \tag{4.11}$$

Sustituyendo esta expresión en (4.9), llegamos a la ecuación de Bethe-Salpeter

$$\langle \mathbf{G} \otimes \mathbf{G}^* \rangle = \mathbf{G}_e \otimes \mathbf{G}_e^* + (\mathbf{G}_e \otimes \mathbf{G}_e^*) \mathbf{U} \langle \mathbf{G} \otimes \mathbf{G}^* \rangle \tag{4.12}$$

Esta ecuación es análoga a la ecuación de Dyson pero para la intensidad, donde el vértice irreducible cumple el rol de la energía propia.

### 4.1.3. Identidad de Ward y ecuación de difusión

Utilizando la expresión definida anteriormente en (4.5), podemos ver que se cumplen las siguientes relaciones

$$\begin{cases} \langle \mathbf{G} \otimes \mathbf{G}^* \rangle = \phi_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) \\ \mathbf{G}_e \otimes \mathbf{G}_e^* = G_e(\omega_+, \mathbf{k}_+) G_e^*(\omega_-, \mathbf{k}_-) \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \end{cases} \tag{4.13}$$

donde el límite  $\Delta\omega, |\Delta\mathbf{k}| \rightarrow 0$  permite expresar estas igualdades.

Si sustituimos (4.13) en (4.12)

$$\phi_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = (G_e G_e^*)_{\mathbf{k}} \left[ \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} + \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{k}_1 U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'} \right]$$

Integrando esta expresión en  $\mathbf{k}'$

$$\phi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \phi_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} d\mathbf{k}' = (G_e G_e^*)_{\mathbf{k}} \left[ 1 + \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{k}_1 U_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_1} \right] \quad (4.14)$$

Aproximando las cantidades eficaces por el promedio en las configuraciones, llegamos a que la expresión anterior puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{2\omega}{c^2} \Delta\omega + 2\mathbf{k} \cdot \Delta\mathbf{k} + \Sigma - \Sigma^* \right) \phi_{\mathbf{k}} \\ & = (\Delta G_e)_{\mathbf{k}} \left[ 1 + \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{k}' U_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \phi_{\mathbf{k}'} \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

Esta última es la ecuación de transporte de intensidad incoherente, análoga a la ecuación de transporte de Boltzmann para partículas clásicas. Si integramos ahora en la variable  $\mathbf{k}$  y manipulando los subíndices obtenemos la conocida identidad de Ward

$$\int d\mathbf{k} (\Delta\Sigma)_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' (\Delta G_e)_{\mathbf{k}'} U_{\mathbf{k}',\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} \quad (4.16)$$

En el espacio real en el dominio temporal, multiplicar por  $\Delta\omega$  podemos interpretarlo como la derivada temporal y el producto escalar con  $\Delta\mathbf{k}$  como el operador divergencia. Con esta interpretación, multiplicamos (4.15) por la unidad compleja  $i$  y así llegamos a la ecuación de transporte en su forma diferencial

$$\frac{\omega}{c^2} \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{1}{(2\pi)^d} \int \mathbf{Im}(G_e) d\mathbf{k} \quad (4.17)$$

donde la cantidad  $S$  está definida en (4.4) y  $\mathbf{J}$  es el flujo de la función  $\phi_{\mathbf{k}}$  en el espacio recíproco

$$\mathbf{J} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \mathbf{k} \phi_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}$$

Interpretando la función  $S$  como la densidad de intensidad acústica, el flujo de la misma ( $\mathbf{J}$ ) será proporcional al gradiente de la densidad

$$\mathbf{J} \propto \nabla S$$

donde, recurriendo a la ley de Fick y estableciendo la constante de rela-

cionamiento como  $D$ , llegamos a la ecuación de difusión con una fuente puntual en  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  que emite en tiempo  $t = 0$

$$\frac{\partial S}{\partial t} - D\nabla^2 S = \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \delta(t) \quad (4.18)$$

De la ley de Fick se deduce que el coeficiente  $D$  no es otro que la constante de difusión. Es posible relacionar el valor que toma esta constante con los parámetros de transporte del medio, rigiéndose por la siguiente expresión [38]

$$D = \frac{v_t l^*}{d} \quad (4.19)$$

donde  $d$  es la dimensión del espacio,  $v_t$  la velocidad de transporte de intensidad y  $l^*$  es el recorrido libre medio de transporte. Esta última es una distancia relacionada con el recorrido libre medio  $l_e$

$$l^* = \frac{l_e}{1 - \overline{\cos}} \quad (4.20)$$

Donde  $\overline{\cos}$  expresa el patrón de directividad de los difusores, determinado por su geometría y la frecuencia de la onda incidente.

Como vimos, el recorrido libre medio es la distancia característica a la cual el campo coherente se extingue. Por su parte,  $l^*$  expresa la distancia promedio recorrida por la intensidad antes de olvidar dónde fue originada.

El patrón de directividad presente en (4.20) se conoce como coseno medio y se relaciona con la sección eficaz diferencial de scattering en la dirección del vector de onda incidente, ponderada por la sección eficaz total. En el caso  $2D$  esta relación es

$$\overline{\cos} = \frac{1}{\sigma_T} \int_0^{2\pi} \sigma_d \cos(\theta) d\theta \quad (4.21)$$

Notemos que si  $\sigma_d$  es independiente de  $\theta$ , las dos longitudes coinciden pues el coseno medio se anula. Este es el caso en el scattering de Rayleigh. Sin embargo si los difusores tienen una fuerte directividad hacia adelante la longitud de transporte  $l^*$  es mucho mayor a  $l_e$ .

## 4.2. Cono de retrodifusión coherente

### 4.2.1. Efecto del backscattering coherente

En la sección anterior vimos que la intensidad acústica se vuelve difusa luego de viajar una distancia mayor que algunas veces  $l^*$ . En esta sección nos concentraremos en la intensidad acústica retrodifundida. Hasta ahora en el trabajo de tesis hemos analizado la onda transmitida tanto experimental como teóricamente. Analizando la onda reflejada encontraremos la forma de hallar parámetros de transporte en la difusión, así como también el efecto del cono de retrodifusión coherente [32, 40].

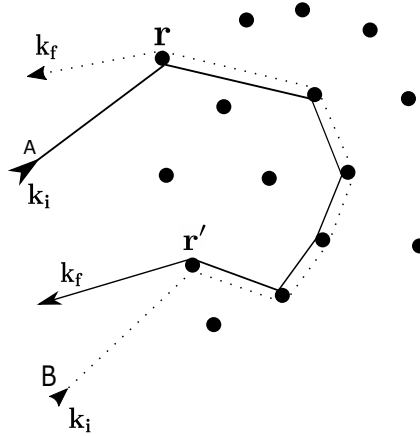
El cono de retrodifusión es un efecto que surge de la interferencia de ondas que aparece al tomar el promedio de la intensidad acústica sobre las distintas configuraciones de desorden. Es importante notar que, para presenciar este efecto, el sistema debe ser estático, es decir que los difusores estén fijos. Describiremos a continuación el origen de este efecto, que es una prueba de la reciprocidad del medio de múltiple scattering.

Consideremos la intensidad como interferencia de rayos acústicos que sufren cierta cantidad de eventos de scattering. Sea  $A$  un rayo de amplitud  $A_i$  y vector de onda incidente  $\mathbf{k}_i$  que incide en el medio de múltiple scattering en un punto  $\mathbf{r}$ . Luego de  $n$  eventos de scattering el rayo emerge de la superficie del medio con un vector de onda  $\mathbf{k}_f$  desde la posición  $\mathbf{r}'$ . De la misma forma, consideremos un rayo  $B$  de amplitud  $B_i$  con los mismos vectores de onda incidente y emergente, pero que ingresa al medio en la posición  $\mathbf{r}'$  y emerge desde  $\mathbf{r}$ . El rayo  $B$  no solo sufre la misma cantidad de scatterings sino que además realiza el mismo camino acústico que el rayo  $A$ , pero en sentido contrario. En la figura (4.1) se ilustra lo descrito.

Sean  $\mathbf{R}_0$  y  $\mathbf{r}_0$  la posición de la fuente y del receptor, respectivamente. De esta forma, la amplitud de los rayos  $A$  y  $B$  vista por el receptor es [38]

$$A_0 = A_i \exp [i\mathbf{k}_i \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_0)] \exp [i\mathbf{k}_{1,2} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] \dots \\ \times \exp [i\mathbf{k}_{n-1,n} \cdot (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1})] \exp [i\mathbf{k}_f \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_n)] \quad (4.22)$$

$$B_0 = B_i \exp [i\mathbf{k}_i \cdot (\mathbf{r}_n - \mathbf{R}_0)] \exp [i\mathbf{k}_{n,n-1} \cdot (\mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{r}_n)] \dots \\ \times \exp [i\mathbf{k}_{2,1} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] \exp [i\mathbf{k}_f \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)] \quad (4.23)$$



**Figura 4.1:** Ilustración de los rayos incidentes  $A$  y  $B$ .

El vector de onda  $\mathbf{k}_{i,j}$  tiene la dirección que apunta del difusor  $i$  al difusor  $j$  y se cumple que  $\mathbf{k}_{i,j} = -\mathbf{k}_{j,i}$ . Además las posiciones  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_n$  se corresponden con  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$  respectivamente. Por simplicidad asumimos  $A_i = B_i$ .

Teniendo en cuenta lo mencionado se puede ver que

$$\frac{A_0}{B_0} = \exp [i (\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_f) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \quad (4.24)$$

Cuando calculamos la intensidad debida a la interferencia de estos dos rayos, lo que tenemos es que una expresión de la suma de ambos elevada al cuadrado

$$|A_0 + B_0|^2 = |A_0|^2 + |B_0|^2 + A_0 B_0^* + A_0^* B_0 \quad (4.25)$$

que si sustituimos la relación (4.24)

$$|A_0 + B_0|^2 = 2 |A_0|^2 [1 + \cos (\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_f) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \quad (4.26)$$

En este punto es necesario analizar los resultados hallados. De la ecuación (4.26) vemos que en total hay sólo dos tipos de contribución a la intensidad: el término constante llamado contribución incoherente y un término coherente que depende de la diferencia angular entre  $\mathbf{k}_i$  y  $\mathbf{k}_f$  y la diferencia espacial  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$ . La contribución incoherente participa siempre, dado que está vinculada a la invarianza temporal del medio. Al tomar el promedio en las configuraciones, es posible deshacerse de las interferencias de fases aleatorias y quedarnos únicamente con la contribución de los dos términos que aparecen en (4.26).

El término coherente toma importancia cuando  $\mathbf{k}_f = -\mathbf{k}_i$ , es decir que

estamos mirando al campo retrodifundido en la dirección opuesta a la de incidencia. Por lo tanto, el promedio de configuraciones tiene una contribución coherente en la posición original de la fuente. Esta contribución coherente se suma a la contribución incoherente de fondo presente en todo el espacio. Esto quiere decir que la relación entre intensidades medida en la posición de la fuente y el fondo es de 2 a 1.

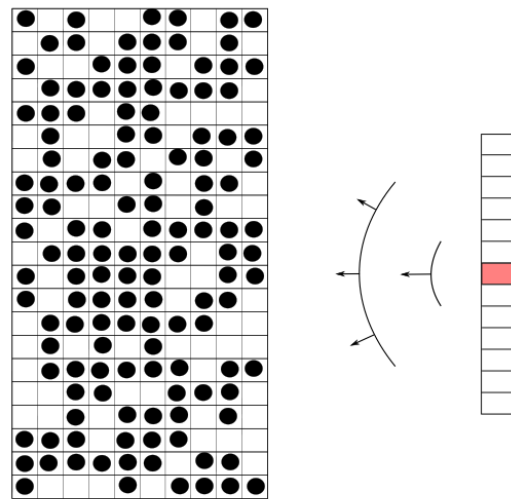
La contribución depende también de la diferencia de posiciones  $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ . La distancia característica para la intensidad estacionaria es el recorrido libre medio de transporte definido antes ( $l^*$ ). Para distancias más lejanas la coherencia se pierde, por lo que la contribución no tiene por qué estar en fase y entonces no contribuye constructivamente a la intensidad. Es esperable entonces que el ancho espacial del cono de retrodifusión coherente se relacione con  $l^*$ . Una ventaja que ofrece la experiencia del cono de retrodifusión coherente en acústica es que tenemos acceso a las señales temporales. Por lo tanto, es posible realizar la construcción del cono de retrodifusión coherente promediando las diferentes realizaciones de desorden recortando la señal de coda y tomando solamente una porción de la misma. Esta construcción se conoce como cono de retrodifusión dinámico y fue analizada en detalle por A. Tourin [29]. Por contrapartida, a la construcción del cono utilizando toda la señal de coda se le conoce como cono estacionario. En sus trabajos, Tourin mostró la relación entre el ancho angular del cono y los parámetros de transporte  $l^*$  y  $D$ . Concretamente el resultado es

$$\begin{cases} \Delta\theta_{din} \propto \frac{\lambda}{\sqrt{Dt}} \\ \Delta\theta_{est} \propto \frac{\lambda}{l^*} \end{cases} \quad (4.27)$$

#### 4.2.2. Cálculo experimental del cono de retrodifusión coherente

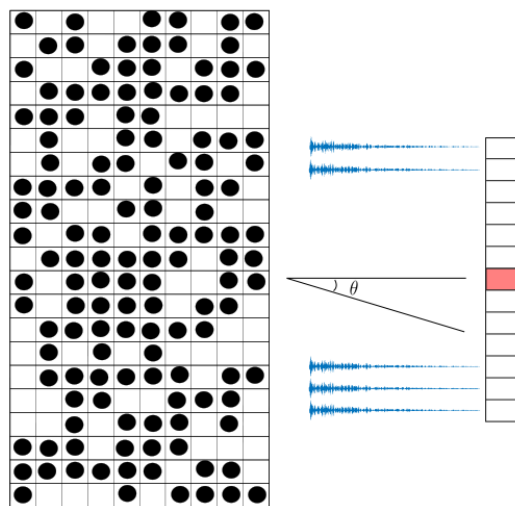
Para esta experiencia se colocó únicamente un array de 32 canales, el cual funcionó como emisor y receptor. Este se ubicó a  $150mm$  del medio de múltiple scattering. Se excitó el medio emitiendo 5 ciclos de senoide a  $5MHz$  desde el canal central del arreglo lineal. Al momento de recibir se adquirieron  $150\mu s$  de señal de coda. Se realizó el promedio en 32 configuraciones distintas. Para lograr distintas configuraciones de desorden, se desplazó el sistema 3 mm entre medidas, al igual que las experiencias del capítulo 3. En la figura (4.2) se muestra el montaje experimental llevado a cabo.

El sistema contó, nuevamente, con una densidad de  $n = 0.119mm^{-2}$ . La profundidad con la que se trabajó fue de  $L \sim 75mm$ , que es aproximadamente  $9l_e$ .



150mm

(a)



150mm

(b)

**Figura 4.2:** Esquema de la experiencia de backscattering para obtener el cono de retrodifusión coherente. (a) Excitación del bosque con un único canal. (b) Adquisición de las codas con los 32 canales.



Se calculó el cono dinámico integrando en el tiempo la intensidad promedio. El inicio de la integración es el tiempo  $t_0$  y va hasta el largo total de la señal  $T$ . Es decir

$$I(x, t) = \int_t^T |u(x, \tau)|^2 d\tau$$

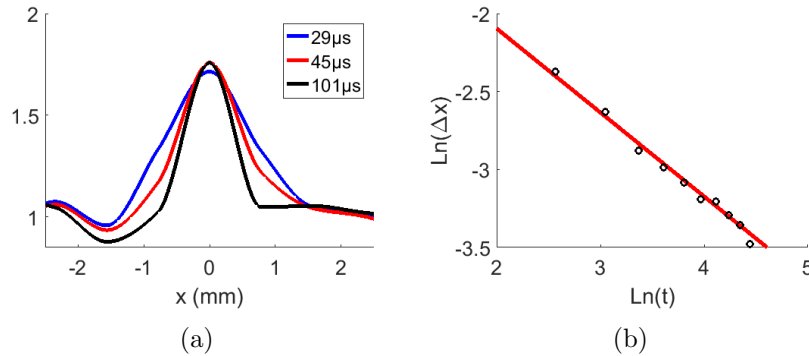
donde  $u(x, t)$  es la señal de coda recibida en la posición  $x$ . El valor de  $t$  en la integral fue considerado desde los  $5\mu s$  hasta los  $100\mu s$ , con un paso de  $8\mu s$ . En la figura (4.3a) mostramos algunos de los conos obtenidos por este método. En (4.3b) por otro lado vemos la aproximación lineal para determinar el coeficiente de difusión. Utilizando la expresión teórica

$$\frac{\Delta x_{din}}{2} = (1.22) \frac{a}{k\sqrt{Dt}}$$

se obtuvo como resultado para  $D$

$$D_{exp} = (7.7 \pm 1.4) mm^2/\mu s \quad (4.28)$$

donde el error surge de la aproximación lineal realizada para ajustar los datos experimentales.



**Figura 4.3:** Resultados experimentales para el cono de retrodifusión dinámico. (a) Gráficos del cono de retrodifusión coherente para diferentes tiempos. (b) Ajuste lineal para el ancho del cono en función del tiempo, en escala logarítmica.

Para verificar este resultado, es posible determinar la velocidad de transporte de la energía. Dado que estamos en procesos difusivos, es natural esperar que la velocidad de transporte sea inferior a la velocidad de propagación de una onda en agua ( $1.5mm/\mu s$ ). Para cilindros rígidos se tiene que  $\overline{\cos} = 0.2547$ , de donde se concluye un recorrido libre medio de transporte  $l^* = 11.8mm$ . Así,

se obtiene

$$v_t = (1.30 \pm 0.26) \text{ mm}/\mu\text{s} \quad (4.29)$$

El valor experimental obtenido para la velocidad de transporte es razonable desde del punto de vista físico. Se espera que este valor sea comparable a la velocidad del sonido en el medio homogéneo pero menor. Esto es así porque para campos difusos no existe un camino directo entre el emisor y el receptor. De esta forma, aún los arribos más tempranos sufrieron algún evento de scattering que retarda la llegada de la onda respecto al medio homogéneo debido al incremento del camino acústico.

En la figura (4.3a) se muestra el cono de retrodifusión para distintos valores de tiempo. Es importante notar que el cono no llega nunca a tomar el valor 2. Esto está de acuerdo con la teoría, dado que este valor es alcanzado únicamente en el límite  $L \gg l^*$ . En nuestro caso, tenemos que  $L \sim 10l^*$ , por lo que el cono solo llega a valores cercanos a 1.8 en  $\theta = 0$ .

El efecto de retrodifusión coherente nos indica, por un lado, que el medio es difuso. Es decir, se ha verificado lo mostrado en la sección anterior (4.1).

Por otro lado, el cono de retrodifusión tiene como consecuencia la reciprocidad del medio. Es decir, la experiencia no se ve alterada ante un intercambio de posiciones entre el emisor y receptor. Esto se debe a que, como los difusores presentes en el medio de múltiple scattering están fijos, si un camino acústico es válido entonces el mismo camino recorrido en sentido contrario también lo es. Es por esto que se verifica la relación 2 a 1 en el cono de retrodifusión coherente, discutida en la sección (4.2.1) [29].

### 4.3. Inversión temporal en medios difusivos

En este capítulo se analizó la teoría de la difusión presente en medios de múltiple scattering cuando la profundidad del mismo es mucho mayor que el recorrido libre medio elástico. Además se trabajó con el cono de retrodifusión coherente, una forma efectiva de determinar parámetros de transporte como  $l^*$  y  $D$  dentro del régimen difusivo. Llegado este punto, analizaremos la inversión temporal más allá del múltiple scattering y buscaremos la optimización para focalizar la energía utilizando estos medios. En este punto no será necesario intentar concentrar la energía acústica a través del medio utilizando la

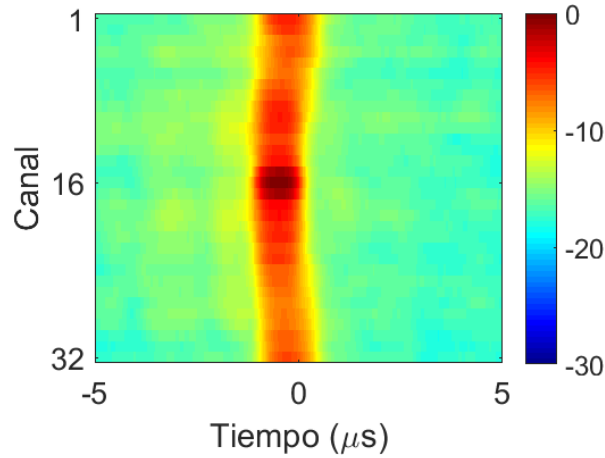
focalización sintética. Dado que ya superamos ampliamente la distancia característica de extinción de coherencia, la emisión focalizada por ley de retardos no surtiría ningún efecto adicional ya que se basa en la supervivencia de la coherencia a través del medio. Por ello en esta sección nos centraremos en la inversión temporal y analizaremos distintos aspectos vinculados a la misma.

Es de esperar que la focalización por inversión temporal funcione en forma óptima en medios difusivos. Debido a que la coherencia se ha perdido por completo, lo que resta en las señales adquiridas es el campo incoherente. La interpretación de la focalización por inversión temporal como correlación espacial expresada en la ecuación (2.19) hace prever que el ancho focal sea menor, pues la correlación del campo incoherente decae rápidamente con la distancia. Dicho de otra forma, es de esperar que obtengamos un máximo en las componentes accesibles del vector de onda como para lograr una focalización espaciotemporal superior a la vista anteriormente. Estudiaremos además los límites a los que converge la inversión temporal cuando el campo medido es totalmente difuso y discutiremos posibles mejoras o usos de la situación planteada a lo largo de esta sección.

Debido a la profundidad del medio de múltiple scattering en este régimen ( $L \sim 100mm$ ) la transmisión de ondas se vió imposibilitada. En efecto, la superficie de cada elemento del array es pequeña y la atenuación de la onda es alta luego de atravesar el medio. Como consecuencia, la relación señal/ruido de las señales de coda recibidas es muy baja, especialmente para tiempos grandes ( $> 50\mu s$ ). De esta forma, las experiencias de retorno temporal resultaron muy ruidosas y, si bien fue posible observar una focalización, la estimación del ancho focal resultó difícil.

Para salvar esta dificultad, decidimos utilizar un transductor monoelemento circular de diámetro  $12mm$  y frecuencia central  $5MHz$ . Debido al tamaño y la geometría del emisor, el haz de difracción se encuentra concentrado hacia la dirección de emisión. Es por esto que este emisor concentra mayor energía hacia el bosque.

La experiencia se realizó de la siguiente manera. Con el transductor monoelemento se emitió un pulso breve. Luego de atravesar el bosque de alambres, cada elemento del array recibió las señales de coda. La señal recibida por el elemento central del array se invirtió en el tiempo y se reenvió al medio utilizando el transductor monoelemento. Aquí se hizo uso de la reciprocidad del medio (propiedad que ya mostramos experimentalmente con la construcción del cono



**Figura 4.4:** Inversión temporal por transmisión para  $L = 100mm$ , utilizando un transductor circular como emisor monoelemento de  $12mm$  de diámetro.

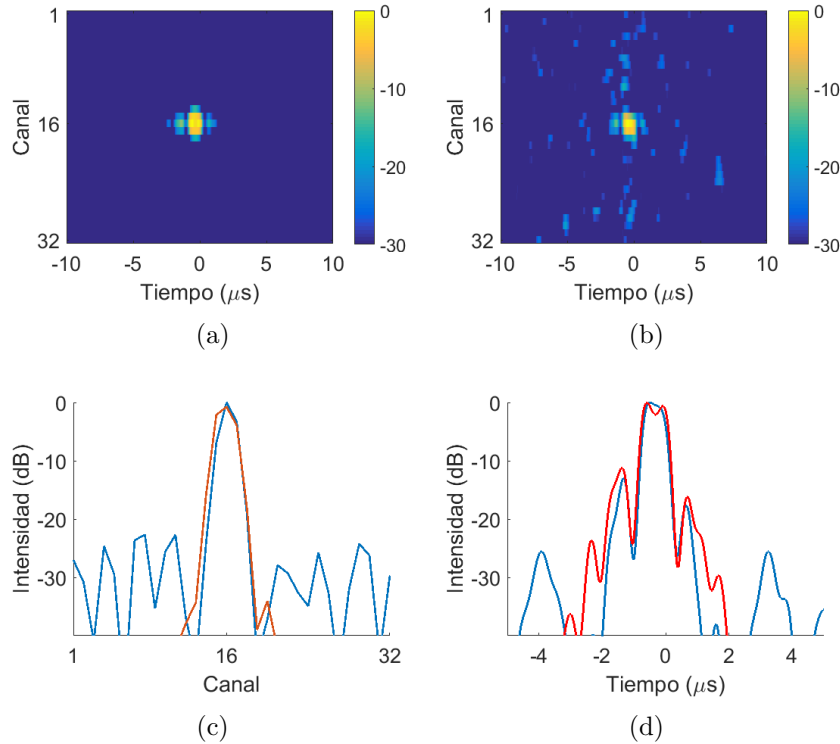
de retrodifusión coherente). La figura (4.4) muestra el resultado obtenido. El ancho espacial del foco es de  $2.44mm$ . Si bien, este comportamiento es peor del que esperábamos, se justifica por el tamaño de la fuente inicial. Al ser una fuente extendida en lugar de una fuente puntual, la focalización espacial se ve degradada.

Sin embargo, es importante destacar de esta experiencia que fue posible focalizar la onda acústica utilizando un solo canal de emisión en la inversión temporal. Es decir, es la presencia del bosque de alambres la que actúa como apertura para lograr la focalización espacial. Esta experiencia muestra que con una electrónica de una sola vía y un medio de múltiple scattering es posible focalizar la onda acústica sin necesidad de apelar a una ley de retardos.

### 4.3.1. Carácter autopromediante del retorno temporal

Ya se ha estudiado que la inversión temporal tiene la característica de ser autopromediante, donde se muestra que el desvío standard de la inversión temporal tiende a cero en un campo difuso [41]. Esto significa que no es necesario recurrir a promedios en las distintas configuraciones de desorden, si no que al realizar la experiencia una única vez se obtiene la información suficiente. Este concepto puede verse con mayor claridad analizando la ecuación (2.15), donde se explicita que la focalización espacio-temporal obtenida tras el retorno temporal depende únicamente de la respuesta al impulso del sistema y de la señal con la que se excitó el mismo. Si bien este concepto está suficientemente

estudiado en forma teórica, no es así en forma experimental. Por ello, en esta sección se comparan los resultados obtenidos tras realizar la experiencia de retorno temporal en una configuración única de desorden contra un promedio en el ensemble.



**Figura 4.5:** Inversión temporal como proceso autopromediante. (a) Inversión temporal promediada en 32 configuraciones. (b) Inversión temporal para una única configuración. (c) Comparación espacial. (d) Comparación temporal.

En esta experiencia se mantuvo el montaje experimental utilizado para determinar el cono de retrodifusión coherente pero, a diferencia de este, aquí recurrimos a una segunda etapa donde ejecutamos el proceso de inversión temporal. Es decir realizamos una experiencia de inversión temporal pero utilizando el campo de backscattering en lugar del campo transmitido a través del bosque. El emisor/receptor también se utilizó como EIT, invirtiendo en el tiempo los  $150\mu\text{s}$  adquiridos por los 32 canales y reemitiéndolos hacia el medio. De la misma forma que antes, se realizó la experiencia para 32 configuraciones diferentes desplazando el sistema de múltiple scattering  $3\text{mm}$  entre configuraciones.

En la figura (4.5) podemos observar que el resultado para la intensidad acústica focalizada es muy similar tanto para el promedio en las configuraciones

como para la realización en una única configuración. La figura (4.5a) muestra la inversión temporal promediada en 32 realizaciones mientras que la figura (4.5b) para una sola realización. Las figuras (4.5c) y (4.5d) son una comparación entre la focalización espacial y temporal respectivamente en dB para ambos casos. El nivel de ruido de fondo es levemente mayor en la realización simple como puede observarse en estas figuras. Sin embargo, en el entorno de la focalización espacio-temporal, las medidas promediadas se asemejan a las obtenidas en una única realización de desorden. De estos resultados, concluimos que en un entorno de la región focal la inversión temporal es autopromediante.

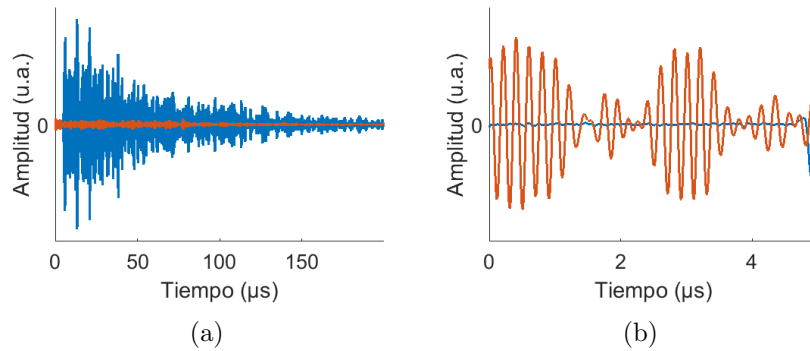
### 4.3.2. Inversión temporal dinámica

Para finalizar este trabajo se presenta la dependencia temporal encontrada en la focalización por inversión temporal para medios difusivos. Aquí la dependencia con el tiempo hace referencia al tiempo de arribo de las señales adquiridas. La diferencia de tiempos de arribo entre una coda y la siguiente fue de  $4\mu s$ . En total se realizó el retorno temporal con 50 codas equidistantes temporalmente entre sí, por lo tanto la diferencia en el tiempo de arribo entre la primera coda y la última fue de  $200\mu s$ .

Se utilizó la disposición mostrada en la figura (4.2). Nuevamente se empleó el método de inversión mencionado en la sección anterior (4.3.1). Se repitió la experiencia adquiriendo codas más tardías, realizando la inversión temporal con cada una de ellas. Todas las señales invertidas tuvieron una duración de  $200\mu s$ . En el proceso de inversión se utilizaron los 32 canales del EIT, los cuales adquirieron las coda con el mismo retardo.

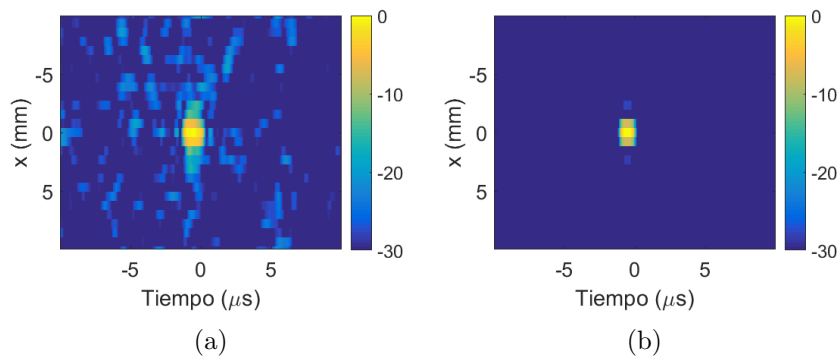
En la figura (4.6a) comparamos la primera coda adquirida y la coda adquirida  $200\mu s$  más tarde. En (4.6b) mostramos un zoom al comienzo de ambas señales. Podemos ver aquí que, a pesar de las amplitudes presenten algunos órdenes de magnitud de diferencia, la señal recibida más tarde aún contiene información del medio.

Analizaremos ahora las distintas focalizaciones obtenidas por inversión temporal mediante las codas adquiridas. En la figura (4.7a) mostramos la focalización obtenida para la primera coda y la focalización para la coda más tardía considerada en esta experiencia (4.7b). Se ve una mejoría en el foco a medida que tomamos señales que arriban en tiempos más largos al receptor. Como se mencionó anteriormente en este trabajo, esto es esperable debido a la presen-



**Figura 4.6:** Comparación de codas. (a) Señales de coda recibidas. (b) Zoom sobre el comienzo de las codas.

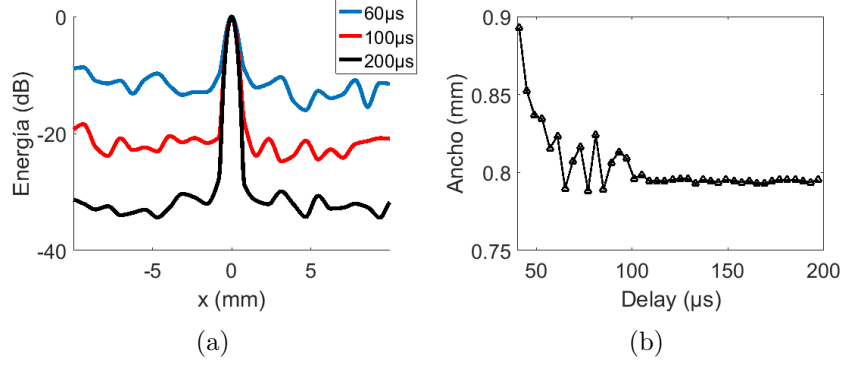
cia de una mayor cantidad de componentes de vectores de onda que arriban al receptor. Para tener una referencia más evidente, se calculó el ancho espacial de la focalización para cada coda invertida en el tiempo. En la figura (4.8) vemos los distintos resultados obtenidos.



**Figura 4.7:** Focalización espacio-temporal en dB para la primera y la última coda recibida. (a) Delay  $0\mu s$ . (b) Delay  $200\mu s$ .

Podemos concluir que, por un lado, aquellas señales que demoran más en llegar al receptor poseen una mejor relación señal-ruido en la focalización por inversión temporal, como se puede ver en (4.8a). Por otro lado, de (4.8b) vemos que el ancho del foco decrece con el tiempo hasta llegar a un valor constante  $\sim 0.79mm$ . Debido a que el diámetro de los alambres es  $0.7mm$ , es posible asociar este valor límite como la distancia a la cual una onda de longitud de onda  $\lambda$  logra diferenciar dos difusores contiguos. Es decir, esta distancia se entiende como la distancia característica de decorrelación de dos difusores.

Para visualizar esta idea, tomemos la ecuación (4.10) en el límite de campo



**Figura 4.8:** Dependencia de la focalización espacial con el tiempo de arribo. (a) Comparación energía acústica. (b) Ancho focal de la intensidad acústica.

lejano dado que consideramos que el emisor y receptor distan mucho del medio de múltiple scattering. Las funciones de Green entonces toman la forma de una onda plana

$$G_0(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}') \simeq \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}') \quad (4.30)$$

Utilizando además la aproximación de medio diluido, la función de Green entre eventos de scattering se puede escribir como

$$G_0(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}') \simeq \frac{\exp(ik_0 r)}{4\pi r} \exp(i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}') \quad (4.31)$$

donde el vector  $\mathbf{k}_s$  apunta en la dirección que une el difusor de salida con el difusor de llegada, es decir en la dirección  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ .

Utilizando la definición del vértice reducible  $\Gamma$  junto a la ecuación (3.28), y que

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sigma(\mathbf{r}_1) \delta_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2}$$

llegamos a que

$$\begin{aligned} \langle G(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}') G^*(\mathbf{r}_b, \mathbf{r}') \rangle &\simeq \frac{\exp(i\mathbf{k}_0 \cdot (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b))}{4\pi r_a r_b} + \\ &\frac{\exp(i\mathbf{k}_0 \cdot (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b))}{4\pi r_a r_b} \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \sigma(\mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_2) \\ &\times \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)) \exp(i\mathbf{k}_s \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)) + \dots \end{aligned} \quad (4.32)$$



Analizando el segundo término de la ecuación anterior, vemos que el integrando puede escribirse en la forma

$$\exp(i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_s) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)) = \exp(i\Delta\mathbf{k} \cdot \Delta\mathbf{r})$$

donde hemos definido  $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_s$  y  $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . De esta forma tenemos que el segundo término de (4.32) resulta

$$\frac{\exp(i\mathbf{k}_0 \cdot (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b))}{(4\pi)^2 r_a r_b} \int d\Delta\mathbf{r} \left[ \int d\mathbf{r}_2 \sigma(\mathbf{r}_2) \sigma(\mathbf{r}_2 + \Delta\mathbf{r}) \right] \exp(i\Delta\mathbf{k} \cdot \Delta\mathbf{r})$$

Vemos en la expresión anterior que la cantidad entre paréntesis recto es la correlación espacial entre difusores, la que llamaremos  $\psi(\Delta\mathbf{r})$ . Además, la expresión obtenida resulta ser la transformada de Fourier de la función de correlación, que llamaremos  $\tilde{\psi}$ .

Finalmente, despreciando los términos de orden superior, obtenemos la expresión que estábamos buscando

$$\langle G(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}') G^*(\mathbf{r}_b, \mathbf{r}') \rangle = \frac{\exp(i\mathbf{k}_0 \cdot (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b))}{(4\pi)^2 r_a r_b} \left( 1 + \tilde{\psi}(\Delta\mathbf{k}) \right) \quad (4.33)$$

Lo que finalmente muestra la relación entre la inversión temporal y la correlación espacial entre difusores.

De esta ecuación podemos ver que, como se calculó anteriormente en la formalidad de sistemas lineales, la función  $\langle GG^* \rangle$  puede interpretarse como la inversión temporal en el punto central (es decir,  $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_b$ ). Ya vimos antes que la inversión temporal es autopromediante, por lo que no hay inconvenientes. Bajo esta interpretación es evidente que el ancho espacial de la focalización por inversión temporal depende explícitamente de la distancia característica de decorrelación.

Vemos que la longitud de onda juega un rol en la focalización. Cuando  $\mathbf{k}_0 \cdot [\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b] \gg 1$  la fase fluctúa rápidamente lo que produce el ruido de fondo. Cuando  $\mathbf{r}_a$  y  $\mathbf{r}_b$  se acercan, el término fuera del paréntesis se acerca a 1 y la focalización queda determinada por la función de correlación de los difusores en el interior del medio.

## 4.4. Discusión de resultados

En esta sección se muestran los resultados obtenidos a lo largo del presente capítulo.

Se verificó la existencia de un proceso de difusión utilizando el efecto de backscattering coherente. Como consecuencia de esta experiencia, logró verificarse además que el medio no homogéneo utilizado cumple con la reciprocidad. Además se determinó la constante de difusión y la velocidad de transporte dentro del medio difusivo. Los resultados obtenidos fueron

$$\begin{cases} D = (7.7 \pm 1.4) \text{ mm}^2/\mu\text{s} \\ v_t = (1.30 \pm 0.26) \text{ mm}/\mu\text{s} \end{cases} \quad (4.34)$$

Debido a que la onda coherente se extinguió por completo, no hay caminos acústicos que viajen directamente desde la fuente hacia el receptor. Es esperable que la velocidad de transporte se inferior a la velocidad en el medio homogéneo de fondo (en nuestro caso, agua), dado que el camino acústico será mayor debido a los eventos de scattering.

Finalmente, se analizó la inversión temporal en este tipo de medios. Por un lado, el carácter autopromediante de la inversión temporal; por otro se estudió el retorno temporal en función del tiempo de arribo de las señales.

Se obtuvo que, en un entorno espacio temporal del foco, la inversión temporal promediada en el ensemble coincide con la realización en una única configuración de desorden. Sin embargo, a medida que nos alejamos de esta región, el ruido de fondo resulta menor en el promedio sobre las configuraciones.

El análisis de la inversión temporal en función del tiempo de arribo de las coda muestra que mientras más tarde el tiempo de arribo mejor la focalización espacio-temporal. Esto es debido a que las señales que son recepcionadas más tarde recorrieron más superficie del medio difusivo. Por tanto, poseen mayor peso las componentes transversales del vector de onda y la focalización espacial mejora notablemente.

Sin embargo los valores hallados indican que la focalización converge a un valor fijo. Considerando las señales que arriban al receptor luego de  $100\mu\text{s}$ , la focalización espacial es la misma para todas ellas. Como se mostró en la sección anterior (4.3.2) el valor al que converge la focalización está estrechamente vinculado con la distancia de decorrelación entre difusores, i.e. la dimensión de los mismos.

Focalización por inversión temporal	
Tiempo de arribo	Ancho espacial (mm)
$0\mu s$	0,90
$\geq 100\mu s$	0,79

## Capítulo 5

# Conclusiones y trabajos futuros

Conseguimos mostrar que en medios homogéneos la focalización espacial por ley de retardos y por la inversión temporal difieren muy poco. Ambos métodos presentan tanto ventajas como desventajas. Por un lado, la focalización sintética resulta útil en medios homogéneos únicamente. Además el ancho espacial depende de disposición geométrica del emisor, la cual no es posible alterar. Sin embargo tiene la ventaja de que, solamente sabiendo la distancia a la que se ubica el objetivo, es posible focalizar la energía en un entorno del mismo. Por otro lado, la inversión temporal resulta de mayor utilidad a la hora de concentrar la energía acústica en una región del espacio. La resolución espacial es menor, hecho que permitiría mejorar la calidad de sistemas de imaginería acústica. La contraparte de este método es que, como su nombre lo indica, es un retorno en el tiempo. Es decir que la energía acústica se concentrara en la región del espacio donde fue emitida en un principio. Por ello es necesario obtener una señal emitida desde el punto donde deseamos focalizar antes de poder hacerlo. Esto presenta un contratiempo en ciertas aplicaciones, donde no es deseable o posible intervenir en la muestra. Un ejemplo de esto es lo que ocurre en litotricia. Se busca focalizar energía acústica en el cálculo renal para destruirlo; sin embargo de ser necesario realizar una intervención se vuelve preferible otro método de tratamiento.

Uno de los resultados novedosos de este trabajo recae en el estudio de la inversión temporal en función de la densidad de difusores. Esto ofrece información de utilidad a la hora de trabajar con experiencias de retorno temporal con medios de scattering múltiple. Los resultados obtenidos permitieron el uso de un medio inhomogéneo aleatorio basándose en una grilla discreta con espacios

ubicados en forma regular. Es decir, se obtuvo un rango de densidad de difusores donde el sistema es lo suficiente robusto como para realizar experiencias de scattering múltiple, sin alcanzar el régimen en que el medio es periódico.

Al utilizar el bosque de alambres (incluso con la profundidad más fina considerada) la inversión temporal mejora notoriamente. Es claro que la apertura aparente se ve modificada por la presencia del medio de múltiple scattering, lo que conduce a una mejora en la focalización espacial. No solo la apertura aparente que introduce el sistema, sino que también la profundidad del mismo provoca mejoras en la definición del foco. Cuando la parte coherente de la señal se extingue, lo que se obtiene es únicamente la parte incoherente. Esta incoherencia implica componentes del vector de onda incidente sobre el receptor que antes de perder la coherencia no estaban.

En conclusión, contrariamente a lo que se pensaría de que el bosque de alambres empobrece la focalización por inversión temporal, este la mejora tanto en resolución espacial como en relación señal-ruido. Además, como vimos al final de este trabajo de tesis, es posible relacionar el ancho de la focalización para codas tardías con la distancia característica de correlación entre difusores. Por esto, la inversión temporal no solo funciona como método de focalización de energía acústica, sino que además puede utilizarse para obtener información acerca de los difusores presentes en el medio de scattering múltiple. Esto nos da pie a próximos trabajos donde se buscará relacionar la inversión temporal a través de un medio de múltiple scattering con los parámetros de transporte [41].

Como trabajos a futuro hay innumerables caminos a seguir. Entre ellos mencionaremos algunos. Durante este trabajo se estudió la dinámica de la inversión temporal. Se corroboraron experimentalmente nociones teóricas conocidas. Sin embargo es de nuestro interés ir más allá. El retorno temporal focaliza espacio-temporalmente la energía acústica, regresando a la zona de la fuente que excitó el medio. Es decir, excepto que se manejasen experiencias de super resolución, la focalización espacial es del orden del emisor que excitó el sistema. Un problema que nos hemos planteado es realizar la experiencia de retorno temporal, utilizando como emisor una fuente extendida, y previo al momento de invertir la señal adquirida realizar una manipulación adecuada, para que la señal del retorno temporal focalice en una región más pequeña que el tamaño del emisor inicial. Esto es difícil de lograr hoy en día, ya que se desconoce la manipulación necesaria en las señales de coda para conseguirlo. Sin

embargo, creemos que sería posible mediante una inversión temporal iterativa, similar a la que se utiliza en acústica submarina.

Otra experiencia a realizar es utilizar los conceptos de la inversión temporal para lograr concentrar suficiente energía acústica como para modificar localmente las propiedades del medio de propagación. Esta experiencia ya comenzó a ser trabajada en 2016 en el *Institut Langevin : Ondes et Images* junto a Arnoud Tourin y Xiaoping Jia. En estas experiencias se busca realizar el proceso de inversión temporal emitiendo mayores amplitudes desde el EIT para lograr maximizar la energía en el foco. Sin embargo, tener control respecto a los cambios producidos en las diferentes regiones del medio resulta complejo. En el futuro se planea seguir estudiando esta línea de trabajo, de forma tal que sea posible controlar en forma rigurosa los cambios provocados localmente en el medio multidifusor.

# Referencias bibliográficas

- [1] Mathias Fink. Time reversal of ultrasonic fields. i. basic principles. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 39(5):555–566, 1992.
- [2] Francois Wu, J-L Thomas, and Mathias Fink. Time reversal of ultrasonic fields. ii. experimental results. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 39(5):567–578, 1992.
- [3] Didier Cassereau and Mathias Fink. Time-reversal of ultrasonic fields. iii. theory of the closed time-reversal cavity. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 39(5):579–592, 1992.
- [4] Mickaël Tanter, Jean-Louis Thomas, François Coulouvrat, and Mathias Fink. Breaking of time reversal invariance in nonlinear acoustics. *Physical review E*, 64(1):016602, 2001.
- [5] Vincent Bertaix, Julien Garson, Nicolas Quieffin, Stefan Catheline, Julien Derosny, and Mathias Fink. Time-reversal breaking of acoustic waves in a cavity. *American Journal of Physics*, 72(10):1308–1311, 2004.
- [6] Ph Roux and M Fink. Experimental evidence in acoustics of the violation of time-reversal invariance induced by vorticity. *EPL (Europhysics Letters)*, 32(1):25, 1995.
- [7] Mathias Fink, Gabriel Montaldo, and Mickael Tanter. Time-reversal acoustics in biomedical engineering. *Annual review of biomedical engineering*, 5(1):465–497, 2003.
- [8] Serge Dos Santos and Zdenek Prevorovsky. Imaging of human tooth using ultrasound based chirp-coded nonlinear time reversal acoustics. *Ultrasonics*, 51(6):667–674, 2011.

- [9] Chun H Wang, James T Rose, and Fu-Kuo Chang. A synthetic time-reversal imaging method for structural health monitoring. *Smart materials and structures*, 13(2):415, 2004.
- [10] Najet Chakroun, Mathias A Fink, and François Wu. Time reversal processing in ultrasonic nondestructive testing. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 42(6):1087–1098, 1995.
- [11] Geoffrey F Edelmann, T Akal, William S Hodgkiss, Seongil Kim, William A Kuperman, and Hee Chun Song. An initial demonstration of underwater acoustic communication using time reversal. *IEEE journal of oceanic engineering*, 27(3):602–609, 2002.
- [12] WA Kuperman, William S Hodgkiss, Hee Chun Song, T Akal, C Ferla, and Darrell R Jackson. Phase conjugation in the ocean: Experimental demonstration of an acoustic time-reversal mirror. *The journal of the Acoustical Society of America*, 103(1):25–40, 1998.
- [13] Kees Wapenaar, Deyan Draganov, and Johan OA Robertsson. *Seismic interferometry: History and present status*. Society of Exploration Geophysicists, 2008.
- [14] Jeroen Tromp, Carl Tape, and Qinya Liu. Seismic tomography, adjoint methods, time reversal and banana-doughnut kernels. *Geophysical Journal International*, 160(1):195–216, 2005.
- [15] Julien de Rosny and Mathias Fink. Overcoming the diffraction limit in wave physics using a time-reversal mirror and a novel acoustic sink. *Physical review letters*, 89(12):124301, 2002.
- [16] George W Drach, Stephen Dretler, William Fair, Birdwell Finlayson, Jay Gillenwater, Donald Griffith, James Lingeman, Daniel Newman, et al. Report of the united states cooperative study of extracorporeal shock wave lithotripsy. *The Journal of urology*, 135(6):1127–1133, 1986.
- [17] Hitoshi Kawakatsu and Jean-Paul Montagner. Time-reversal seismic-source imaging and moment-tensor inversion. *Geophysical Journal International*, 175(2):686–688, 2008.
- [18] SV Egerev. In search of a noncontact underwater acoustic source. *Acoustical Physics*, 49(1):51–61, 2003.



- [19] Gabriel Montaldo, Phillippe Roux, Arnaud Derode, Carlos Negreira, and Mathias Fink. Generation of very high pressure pulses with 1-bit time reversal in a solid waveguide. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 110(6):2849–2857, 2001.
- [20] G Montaldo, N Perez, C Negreira, and M Fink. The spatial focusing of a leaky time reversal chaotic cavity. *Waves in Random and Complex Media*, 17(1):67–83, 2007.
- [21] N Pérez, Orientador Dr Carlos Negreira, Tribunal Dr Carlos Negreira, Julio Adamowski, Hugo Fort, Stefan Catheline, and Rafael Canetti. *Inversión Temporal de Ondas Ultrasónicas en Cavidades Acústicas*. PhD thesis, PhD. thesis in physics. University of the Republic, Uruguay, 2006.
- [22] S Catheline, N Benech, J Brum, and C Negreira. Time reversal of elastic waves in soft solids. *Physical review letters*, 100(6):064301, 2008.
- [23] Nicolas Benech, Stefan Catheline, Javier Brum, Thomas Gallot, and Carlos A Negreira. 1-d elasticity assessment in soft solids from shear wave correlation: the time-reversal approach. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 56(11):2400–2410, 2009.
- [24] N Benech, J Brum, S Catheline, T Gallot, and C Negreira. Near-field effects in green’s function retrieval from cross-correlation of elastic fields: Experimental study with application to elastography. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 133(5):2755–2766, 2013.
- [25] J Brum, S Catheline, N Benech, and C Negreira. Shear elasticity estimation from surface wave: the time reversal approach. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 124(6):3377–3380, 2008.
- [26] Akira Ishimaru. *Wave propagation and scattering in random media*, volume 2. Academic press New York, 1978.
- [27] Guillermo A Cortela, Marco A von Krüger, Carlos A Negreira, and Wagner CA Pereira. Influence of ultrasonic scattering in the calculation of thermal dose in ex-vivo bovine muscular tissues. *Ultrasonics*, 65:121–130, 2016.
- [28] Guillermo A Cortela, Wagner CA Pereira, and Carlos A Negreira. Ex vivo determined experimental correction factor for the ultrasonic source term in the bioheat equation. *Ultrasonics*, 82:72–78, 2018.

- [29] Arnaud Tourin. *Diffusion multiple et renversement du temps des ondes ultrasonores*. PhD thesis, Université Paris, 1999.
- [30] Arnaud Derode, Arnaud Tourin, and Mathias Fink. Ultrasonic pulse compression with one-bit time reversal through multiple scattering. *Journal of applied physics*, 85(9):6343–6352, 1999.
- [31] Arnaud Tourin, Arnaud Derode, and Mathias Fink. Sensitivity to perturbations of a time-reversed acoustic wave in a multiple scattering medium. *Physical review letters*, 87(27):274301, 2001.
- [32] Meint P Van Albada and Ad Lagendijk. Observation of weak localization of light in a random medium. *Physical review letters*, 55(24):2692, 1985.
- [33] Philip McCord Morse and K Uno Ingard. *Theoretical acoustics*. Princeton university press, 1968.
- [34] Gordon SGS Kino. *Acoustic waves: devices, imaging and analog signal processing*. Number 43 KIN. 1987.
- [35] Robert J Urick. The noise background of the sea: ambient noise level. *Principles of Underwater Sound (ed. RJ Urick)*, pages 202–236, 1983.
- [36] K Aki and PG Richards. Quantitative seismology, theory and methods, vol. 1 wh freeman & co. *New York*, 1980.
- [37] Claire Prada, Francois Wu, and Mathias Fink. The iterative time reversal mirror: A solution to self-focusing in the pulse echo mode. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 90(2):1119–1129, 1991.
- [38] Ping Sheng. *Introduction to wave scattering, localization and mesoscopic phenomena*, volume 88. Springer Science & Business Media, 2006.
- [39] Xiaoping Jia, C Caroli, and B Velicky. Ultrasound propagation in externally stressed granular media. *Physical Review Letters*, 82(9):1863, 1999.
- [40] Arnaud Tourin, Arnaud Derode, Philippe Roux, Bart A Van Tiggelen, and Mathias Fink. Time-dependent coherent backscattering of acoustic waves. *Physical review letters*, 79(19):3637, 1997.
- [41] BA Van Tiggelen. Green function retrieval and time reversal in a disordered world. *Physical review letters*, 91(24):243904, 2003.

# APÉNDICES

# Apéndice 1

## Formalismo de Green para propagación de ondas

### 1.1. Formalismo de Green

La función de Green es solución de la ecuación de ondas cuando el término inhomogéneo es una delta de Dirac  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . Podemos utilizarla entonces cuando la ecuación presenta un término correspondiente a una fuente arbitraria en la ecuación diferencial [38]

$$(\nabla^2 + k_0^2) \phi(\omega, \mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$$

Utilizando el método de Green la solución de esta ecuación diferencial es

$$\phi(\omega, \mathbf{r}) = \phi_0(\omega, \mathbf{r}) + \int G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (1.1)$$

donde la función  $\phi_0$  es la solución para la ecuación homogénea (es decir,  $f(\mathbf{r}) = 0$ ).

Alcanza con notar que al sustituir esta solución en la ecuación diferencial se satisface la igualdad.

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k_0^2) \phi(\omega, \mathbf{r}) &= (\nabla^2 + k_0^2) \left[ \phi_0(\omega, \mathbf{r}) + \int G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right] \\ &= (\nabla^2 + k_0^2) \phi_0(\omega, \mathbf{r}) + (\nabla^2 + k_0^2) \int G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \end{aligned}$$

El primer término vale 0, dado que  $\phi_0$  es la solución de la ecuación homogénea. El operador  $\nabla^2$  actúa únicamente sobre la variable  $\mathbf{r}$ , por lo tanto conmuta con la integral en  $\mathbf{r}'$ . Utilizando la ecuación (3.1) y operando llegamos al resultado.

$$\int (\nabla^2 + k_0^2) G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = f(\mathbf{r})$$

Cuando  $k$  es de la forma (2.3) la ecuación de Green resulta

$$(\nabla^2 + k_0^2) G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \sigma(\mathbf{r}) G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

donde, por analogía con la ecuación (1.1), tenemos que la solución es

$$G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}_1 G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_1) G(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \quad (1.2)$$

Sustituyendo en forma iterativa, obtenemos una expresión para (1.2)

$$\begin{aligned} G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}_1 G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_1) \\ &\times \left[ G_0(\omega, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}_2 G_0(\omega, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \sigma(\mathbf{r}_2) [\dots] \right] \end{aligned}$$

Reordenando términos

$$\begin{aligned} G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}_1 G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_1) G_0(\omega, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') \\ &+ \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_1) G_0(\omega, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \sigma(\mathbf{r}_2) G_0(\omega, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}') + \dots \\ &\int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{r}_3 G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_1) G_0(\omega, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ &\sigma(\mathbf{r}_2) G_0(\omega, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \sigma(\mathbf{r}_3) G_0(\omega, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}') + \dots \end{aligned}$$

Utilizando la notación de Dirac

$$\begin{cases} \langle \mathbf{r} | \mathbf{G} | \mathbf{r}' \rangle = G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \langle \mathbf{r} | \mathbf{G}_0 | \mathbf{r}' \rangle = G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \langle \mathbf{r} | \mathbf{V} | \mathbf{r}' \rangle = \sigma(\mathbf{r}) \delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \end{cases} \quad (1.3)$$

y análogamente

$$\begin{cases} \langle \mathbf{k} | \mathbf{G} | \mathbf{k}' \rangle = \tilde{G}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}') \\ \langle \mathbf{k} | \mathbf{G}_0 | \mathbf{k}' \rangle = \tilde{G}_0(\omega, \mathbf{k}) \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \end{cases} \quad (1.4)$$

La solución dada por la ecuación (1.2) para la función de Green del espacio no homogéneo puede escribirse como

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{G} | \mathbf{r}' \rangle = \langle \mathbf{r} | \mathbf{G}_0 | \mathbf{r}' \rangle + \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \langle \mathbf{r} | \mathbf{G}_0 | \mathbf{r}_1 \rangle \langle \mathbf{r}_1 | \mathbf{V} | \mathbf{r}_2 \rangle \langle \mathbf{r}_2 | \mathbf{G} | \mathbf{r}' \rangle$$

Procediendo como antes

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} | \mathbf{G} | \mathbf{r}' \rangle &= \langle \mathbf{r} | \mathbf{G}_0 | \mathbf{r}' \rangle + \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \langle \mathbf{r} | \mathbf{G}_0 | \mathbf{r}_1 \rangle \langle \mathbf{r}_1 | \mathbf{V} | \mathbf{r}_2 \rangle \langle \mathbf{r}_2 | \mathbf{G}_0 | \mathbf{r}' \rangle \\ &+ \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{r}_3 \int d\mathbf{r}_4 \langle \mathbf{r} | \mathbf{G}_0 | \mathbf{r}_1 \rangle \langle \mathbf{r}_1 | \mathbf{V} | \mathbf{r}_2 \rangle \times \\ &\langle \mathbf{r}_2 | \mathbf{G}_0 | \mathbf{r}_3 \rangle \langle \mathbf{r}_3 | \mathbf{V} | \mathbf{r}_4 \rangle \langle \mathbf{r}_4 | \mathbf{G}_0 | \mathbf{r}' \rangle + \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

Reescribiendo la ecuación anterior

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{G} | \mathbf{r}' \rangle = \langle \mathbf{r} | \mathbf{G}_0 | \mathbf{r}' \rangle + \langle \mathbf{r} | \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 | \mathbf{r}' \rangle + \langle \mathbf{r} | \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 | \mathbf{r}' \rangle + \dots \quad (1.6)$$

Así, llegamos a la notación operacional que nos da la solución a la ecuación inhomogénea.

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G} \quad (1.7)$$

Desarrollando esta expresión sustituyendo  $\mathbf{G}$  en forma reiterada

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 + \dots$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 (\mathbf{V} + \mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V} + \dots) \mathbf{G}_0$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{T} \mathbf{G}_0 \quad (1.8)$$

Si consideramos que a medida que aumenta el número de eventos de scattering la contribución a la función de Green es más pequeña, podemos expresar la serie que define a la matriz  $\mathbf{T}$  como una serie geométrica.

$$\mathbf{T} = \mathbf{V} + \mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V} + \mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V} + \dots$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{V} \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{G}_0 \mathbf{V})^n = \mathbf{V} (\mathbf{I} - \mathbf{G}_0 \mathbf{V})^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{V} \mathbf{G}_0)^{-1} \mathbf{V} \quad (1.9)$$

De esta forma, la solución general para la propagación de ondas en medios inhomogéneos con el formalismo de Green es

$$(\nabla^2 + k_0^2 - \sigma(\mathbf{r})) \phi(\omega, \mathbf{r}) = 0$$

$$|\phi\rangle = |\phi_0\rangle + \mathbf{G}_0 \mathbf{V} |\phi\rangle = |\phi_0\rangle + \mathbf{G}_0 \mathbf{V} |\phi_0\rangle + \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V} |\phi_0\rangle + \dots$$

$$|\phi\rangle = |\phi_0\rangle + \mathbf{G}_0 \mathbf{T} |\phi_0\rangle \quad (1.10)$$

## 1.2. Sección eficaz de scattering y teorema óptico

El teorema óptico relaciona la sección eficaz total de un dispersor con la amplitud dispersa en la dirección de propagación de la onda incidente. Partiendo de la definición de la sección eficaz diferencial de scattering

$$\sigma_d = \frac{I_s(\theta, \varphi)}{I_0} \quad (1.11)$$

La sección eficaz total se obtiene al integrar la expresión (1.11) para  $\sigma_d$  en todo el ángulo sólido.

$$\sigma_T = \int \frac{I_s}{I_0} d\Omega \quad (1.12)$$

La función de forma se define como el coeficiente que indica la directividad de la onda esparcida por un dispersor. Partiendo de la ecuación (1.10) y multiplicando por izquierda por  $\langle \mathbf{r} |$ , obtenemos

$$\langle \mathbf{r} | \phi \rangle = \langle \mathbf{r} | \phi_0 \rangle + \langle \mathbf{r} | \mathbf{G}_0 \mathbf{T} | \phi_0 \rangle$$

$$\phi(\omega, \mathbf{r}) = \phi_0(\omega, \mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \langle \mathbf{r} | \mathbf{G}_0 | \mathbf{r}_1 \rangle \langle \mathbf{r}_1 | \mathbf{T} | \mathbf{r}_2 \rangle \langle \mathbf{r}_2 | \phi_0 \rangle$$

$$= \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \langle \mathbf{r}_1 | \mathbf{T} | \mathbf{r}_2 \rangle \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_2) \quad (1.13)$$

El producto  $\langle \mathbf{r}_1 | \mathbf{T} | \mathbf{r}_2 \rangle$  es distinto de cero únicamente en la región  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 < R$ , siendo  $R$  el radio mínimo de una esfera que encierra por completo la región de scattering.

Consideremos regiones del espacio que satisfacen  $r \gg R$ . En este límite la cantidad  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$  puede aproximarse por  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \simeq r - r_1 \cos \theta$ , siendo  $\theta$  el ángulo entre  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}_1$ . En el caso 3D obtenemos

$$G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \simeq -\frac{\exp(ik_0 r)}{4\pi r} \exp(-i\mathbf{k}'_0 \cdot \mathbf{r}_1)$$

Podemos sustituir esta expresión en (1.13)

$$\phi(\omega, \mathbf{r}) \simeq \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) -$$

$$\frac{\exp(ik_0 r)}{4\pi r} \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \exp(-i\mathbf{k}'_0 \cdot \mathbf{r}_1) \langle \mathbf{r}_1 | \mathbf{T} | \mathbf{r}_2 \rangle \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_2)$$

Identificando además que  $\langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ , llegamos a que

$$\phi(\omega, \mathbf{r}) \xrightarrow[r \gg R]{3D} \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) - \langle \mathbf{k}'_0 | \mathbf{T} | \mathbf{k}_0 \rangle \frac{\exp(ik_0 r)}{4\pi r} \quad (1.14)$$



En el caso más general, se define la amplitud de scattering  $f(\mathbf{k}'_0, \mathbf{k}_0)$  en la forma

$$\phi(\omega, \mathbf{r}) \xrightarrow{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) + f(\mathbf{k}'_0, \mathbf{k}_0) \frac{\exp(ik_0 r)}{r^{\frac{(d-1)}{2}}} \quad (1.15)$$

donde la forma explícita de la función depende de la dimensión  $d$  del espacio.

$$f(\mathbf{k}'_0, \mathbf{k}_0) = \begin{cases} -\frac{\langle \mathbf{k}'_0 | \mathbf{T} | \mathbf{k}_0 \rangle}{4\pi} & , d = 3 \\ -\frac{1+i}{4\sqrt{\pi}k_0} \langle \mathbf{k}'_0 | \mathbf{T} | \mathbf{k}_0 \rangle & , d = 2 \\ -\frac{i}{2k_0} \langle \mathbf{k}'_0 | \mathbf{T} | \mathbf{k}_0 \rangle & , d = 1 \end{cases} \quad (1.16)$$

La sección eficaz de scattering se relaciona con la función de forma según la siguiente expresión

$$\sigma_d = |f(\theta, \phi)|^2 \quad (1.17)$$

Por tanto, la sección eficaz total es

$$\sigma_T = \int |f(\theta, \phi)|^2 d\Omega \quad (1.18)$$

Consideremos que la dirección de señal observada coincide con la de la onda incidente, es decir,  $\mathbf{k}'_0 = \mathbf{k}_0$ . Si sustituimos (1.16) obtenemos la expresión general para el teorema óptico

$$\sigma_T = \frac{1}{k_0} \text{Im} [\langle \mathbf{k}_0 | \mathbf{T} | \mathbf{k}_0 \rangle] \quad (1.19)$$

### 1.3. Promedio en las configuraciones y el operador energía propia

Partiendo de la ecuación (1.7)

$$\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{G}_0^{-1} - \mathbf{V} \quad (1.20)$$

donde vemos cómo se relacionan las inversas de la función de Green y la solución en el espacio homogéneo con el operador  $\mathbf{V}$ .

Por otro lado, si partimos de la ecuación (1.8), el promedio sobre las distintas configuraciones de desorden de la solución  $\mathbf{G}$  es

$$\langle \mathbf{G} \rangle = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \langle \mathbf{T} \rangle \mathbf{G}_0 \quad (1.21)$$

Dado que la función de Green en el medio homogéneo no depende de  $\sigma(\mathbf{r})$ , el promedio configuracional no actúa sobre ella.

En forma similar, se define el operador energía propia como el término que relaciona los inversos de las funciones de Green promediadas en las configuraciones, análogo a la ecuación (1.20). Partiendo de la ecuación (1.21) encontramos una relación para las inversas de las funciones de Green promediadas

$$\langle \mathbf{G} \rangle = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \langle \mathbf{T} \rangle \mathbf{G}_0 = (\mathbf{I} + \mathbf{G}_0 \langle \mathbf{T} \rangle) \mathbf{G}_0$$

Invirtiéndolo la igualdad anterior y multiplicando por el factor  $(\mathbf{I} + \mathbf{G}_0 \langle \mathbf{T} \rangle)$  por derecha

$$\langle \mathbf{G} \rangle^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{G}_0 \langle \mathbf{T} \rangle) = \mathbf{G}_0^{-1}$$

Reescribimos ahora el segundo miembro de la igualdad

$$\langle \mathbf{G} \rangle^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{G}_0 \langle \mathbf{T} \rangle) = \mathbf{G}_0^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{G}_0 \langle \mathbf{T} \rangle) - \langle \mathbf{T} \rangle$$

Finalmente, multiplicando por  $(\mathbf{I} + \mathbf{G}_0 \langle \mathbf{T} \rangle)^{-1}$  por derecha

$$\langle \mathbf{G} \rangle^{-1} = \mathbf{G}_0^{-1} - \langle \mathbf{T} \rangle (\mathbf{I} + \mathbf{G}_0 \langle \mathbf{T} \rangle)^{-1}$$

$$\langle \mathbf{G} \rangle^{-1} = \mathbf{G}_0^{-1} - \Sigma \quad (1.22)$$

donde el operador energía propia está definido como

$$\Sigma = \langle \mathbf{T} \rangle (\mathbf{I} + \mathbf{G}_0 \langle \mathbf{T} \rangle)^{-1} \quad (1.23)$$

## 1.4. Medio efectivo y la aproximación de potencial coherente (CPA)

Despejando de (1.22) obtenemos

$$\langle \tilde{G} \rangle = \frac{1}{k_0^2(\omega) - k^2 - \Sigma(\omega, \mathbf{k})} \quad (1.24)$$

En aquellos casos en que la energía propia no depende del vector de onda, es decir  $\Sigma = \Sigma(\omega)$ , el efecto de este término es simplemente la renormalización del vector de onda en el medio homogéneo  $k_0$ .

$$\Sigma(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') = \Sigma'(\omega) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.25)$$

De este modo, definimos entonces el vector de onda efectivo  $k_e$  como el valor de  $k_0$  renormalizado por la energía propia del sistema.

$$k_e^2(\omega) = k_0^2(\omega) - \Sigma'(\omega) \quad (1.26)$$

La función de Green promedio tendrá la misma forma que  $G_0$ , sustituyendo el vector de onda  $k_0$  por el valor efectivo  $k_e$ . Por ejemplo, para el caso 3D tenemos que

$$\langle G \rangle = -\frac{\exp(ik_e |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

En analogía con el medio homogéneo, podemos renormalizar las ecuaciones respecto al valor de la energía propia  $\Sigma$ , de forma tal de pasar de trabajar con  $G_0$  a definir una nueva función  $G_e$ , siendo esta última la función de Green para el medio efectivo.

Utilizando la noción de medio efectivo, es posible reescribir la ecuación (1.22) en términos de  $G_e$

$$\langle \mathbf{G} \rangle^{-1} = \mathbf{G}_e^{-1} - \bar{\Sigma} \quad (1.27)$$

donde se tiene que, necesariamente, la función  $\bar{\Sigma}$  debe anularse en la renormalización del medio efectivo.

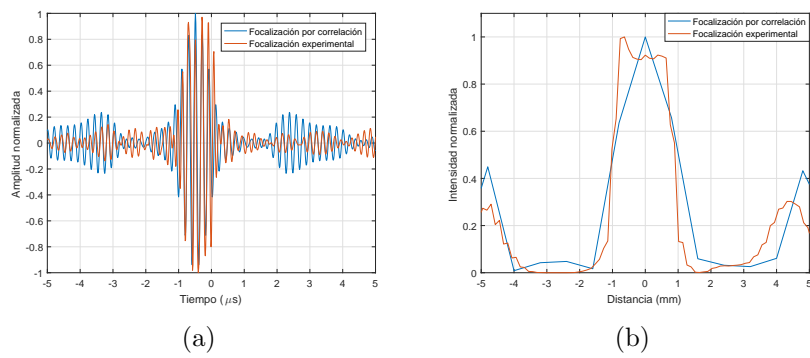
De las ecuaciones (1.21), (1.23) y (1.27), y utilizando que  $\bar{\Sigma} = 0$ , se obtiene

$$\begin{cases} \langle \bar{\mathbf{T}} \rangle = 0 \\ \mathbf{G} = \mathbf{G}_e + \mathbf{G}_e \bar{\mathbf{T}} \mathbf{G}_e \\ \langle \mathbf{G} \rangle = \mathbf{G}_e \end{cases} \quad (1.28)$$

## Apéndice 2

# Modelado de la inversión temporal utilizando la teoría de sistemas lineales

La ecuación (2.19) en el capítulo (2) expresa el hecho de que la inversión temporal se puede interpretar como una correlación entre señales temporales en diferentes posiciones espaciales. En particular si  $\Delta r$  es cero en (2.19), el retorno temporal es equivalente a la autocorrelación. En la figura (2.1a) se compara la focalización temporal obtenida por inversión temporal con la autocorrelación de la señal de coda en el punto focal. Como se puede ver ambas señales coinciden en fase aproximadamente sobre todos los puntos. Presentan diferencias en las regiones donde la interferencia debería de ser destructiva. La figura (2.1b) muestra la comparación entre la focalización espacial por inversión temporal y la correlación cruzada de señales de coda, es decir para  $\Delta r$  distinto de cero en la ecuación (2.19). Estos resultados muestran que el modelo de sistema lineal utilizado para describir el proceso de inversión temporal es adecuado para las experiencias planteadas.



**Figura 2.1:** Comparación de la inversión temporal experimental (curva anaranjada) con el modelo de sistemas lineales (curva azul). (a) Focalización temporal. (b) Focalización espacial.

## Apéndice 3

# Ecuación de transporte de Boltzmann

Partimos de la ecuación para la intensidad acústica, dada por el módulo de la función de Green al cuadrado

$$P(t; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = |G(t; \mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2 = G(t; \mathbf{r}, \mathbf{r}') G^*(t; \mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad (3.1)$$

Trabajando en el dominio de la frecuencia, podemos escribir la función de Green en la forma

$$\begin{cases} G(t; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \int G(\omega_1; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \exp[-i\omega_1 t] d\omega_1 \\ G^*(t; \mathbf{r}', \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int G^*(\omega_2; \mathbf{r}', \mathbf{r}) \exp[i\omega_2 t] d\omega_2 \end{cases} \quad (3.2)$$

Sustituyendo

$$P(t; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int G(\omega_1) G^*(\omega_2) \exp[-i\Delta\omega t] d\omega_1 d\omega_2 \quad (3.3)$$

donde  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$  y hemos omitido por el momento en la notación la dependencia espacial.

Pasando al espacio de las frecuencias la función  $P(t; \mathbf{r}, \mathbf{r}')$  transformando la expresión anterior

$$P(\bar{\omega}; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int \int G(\omega_1) G^*(\omega_2) \exp[i(\bar{\omega} - \Delta\omega)t] dt d\omega_1 d\omega_2 \quad (3.4)$$

Integrando en la variable temporal la exponencial obtenemos  $2\pi\delta(\bar{\omega} - \Delta\omega)$ .

Realizando el cambio de variable  $\omega = (\omega_1 + \omega_2) / 2$

$$P(\Delta\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \int G(\omega_+) G^*(\omega_-) d\omega \quad (3.5)$$

donde definimos  $\omega_{\pm} = \omega \pm \Delta\omega/2$ .

Continuando con el razonamiento, es conveniente para nosotros tomar el promedio en las configuraciones. Procediendo

$$\langle P(\Delta\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle = \frac{1}{2\pi} \int \langle G(\omega_+) G^*(\omega_-) \rangle d\omega \quad (3.6)$$

Donde el integrando se define como la función

$$S(\Delta\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle G(\omega_+; \mathbf{r}, \mathbf{r}') G^*(\omega_-; \mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle \quad (3.7)$$

Desarrollando  $S$  en términos de los operadores asociados podemos escribir

$$S(\Delta\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^{3d}} \int \int \int \langle \langle \mathbf{k}_+ | \mathbf{G}(\omega_+) | \mathbf{k}'_+ \rangle \langle \mathbf{k}'_- | \mathbf{G}^*(\omega_-) | \mathbf{k}_- \rangle \rangle \\ \times \exp[i\Delta\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d\mathbf{k} d\mathbf{k}' d\Delta\mathbf{k}$$

donde tenemos que  $\mathbf{k}_{\pm} = \mathbf{k} \pm \Delta\mathbf{k}/2$  y de forma análoga para  $\mathbf{k}'_{\pm}$ . De esta expresión es claro que la componente de  $S$  en el espacio recíproco es

$$S(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int \int \langle \langle \mathbf{k}_+ | \mathbf{G}(\omega_+) | \mathbf{k}'_+ \rangle \langle \mathbf{k}'_- | \mathbf{G}^*(\omega_-) | \mathbf{k}_- \rangle \rangle d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \\ = \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int \int \phi_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \quad (3.8)$$

En el límite cuando  $\Delta\omega, |\Delta\mathbf{k}| \rightarrow 0$ , los productos externos de la función de Green convergen a  $\phi_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$  como se muestra en (4.13). De esta forma, la ecuación (4.12) queda

$$\phi_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = (G_e G_e^*)_{\mathbf{k}} \left[ \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} + \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{k}_1 U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'} \right] \quad (3.9)$$

Integrando en  $\mathbf{k}'$

$$\phi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \phi_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} d\mathbf{k}' = (G_e G_e^*)_{\mathbf{k}} \left[ 1 + \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{k}_1 U_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_1} \right] \quad (3.10)$$

Si desarrollamos la cantidad  $(G_e G_e^*)_{\mathbf{k}}$  como

$$\frac{G_e - G_e^*}{(G_e^*)^{-1} - (G_e)^{-1}}$$

y recordando que  $G_e^{-1} = k_0^2 - k^2 - \Sigma$ , podemos expresar el denominador según la expresión

$$(G_e^*)^{-1} - (G_e)^{-1} = -\frac{2\omega}{c^2} \Delta\omega + 2\mathbf{k} \cdot \Delta\mathbf{k} + \Sigma - \Sigma^* \quad (3.11)$$

donde aproximamos a primer orden la diferencia  $k_0^2(\omega_-) - k_0^2(\omega_+)$ , dado que estamos en el límite  $\Delta\omega \rightarrow 0$  y sustituimos el valor de  $k_0^2$  según la relación de dispersión (2.4).

Por otra parte, el numerador puede expresarse en el límite en el que estamos trabajando como

$$G_e - G_e^* = (\Delta G_e)_{\mathbf{k}} = 2i\mathbf{Im}(G_e)$$

donde hemos usado además que  $\mathbf{Im}(\Sigma) \rightarrow 0$ , por lo que podemos aproximar a primer orden.

Con estos resultados, la expresión que obtenemos para la ecuación de Dyson es

$$\phi_{\mathbf{k}} = \frac{(\Delta G_e)_{\mathbf{k}}}{(G_e^*)^{-1} - (G_e)^{-1}} \left[ 1 + \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{k}_1 U_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_1} \right]$$

donde, multiplicando y dividiendo entre  $(G_e^*)^{-1} - (G_e)^{-1}$

$$\left( -\frac{2\omega}{c^2} \Delta\omega + 2\mathbf{k} \cdot \Delta\mathbf{k} + \Sigma - \Sigma^* \right) \phi_{\mathbf{k}} = (\Delta G_e)_{\mathbf{k}} \left[ 1 + \int \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^d} U_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_1} \right] \quad (3.12)$$

Integrando esta expresión en  $\mathbf{k}$  y definiendo



$$\mathbf{J} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \mathbf{k} \phi_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}$$

tenemos

$$-\frac{2\omega}{c^2} \Delta\omega S + 2\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{J} + (\Sigma - \Sigma^*) \phi_{\mathbf{k}} =$$

$$2i \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \mathbf{Im}(G_e) + \int \int \frac{d\mathbf{k}d\mathbf{k}'}{(2\pi)^{2d}} (\Delta G_e)_{\mathbf{k}} U_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \phi_{\mathbf{k}'}$$

Analizando el último término del primer miembro de la ecuación anterior vemos que se cancela con el último término del segundo miembro, mostrando la identidad de Ward (4.16).

$$(\Sigma - \Sigma^*) = (\Delta\Sigma)_{\mathbf{k}} = \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^{2d}} (\Delta G_e)_{\mathbf{k}} U_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \quad (3.13)$$