

TESIS DE MAESTRÍA EN FÍSICA

---

# Cargas Conservadas y Factorización Infrarroja en campos de spin cero

---

*Autor:*

Lic. Leonardo Coito

*Director de Tesis:*

Dr. Miguel Campiglia

27 de febrero de 2018  
Universidad de la República,  
Montevideo, Uruguay.



## **Agradecimientos**

Agradezco a Miguel Campiglia por haber compartido su tiempo y experiencia conmigo y así realizar mi maestría. Fue siempre muy atento y un excelente tutor.

Al grupo de estudiantes de física teórica, con los que compartí varios cursos y buenas anécdotas.

Durante los dos años tuve la suerte de recibir muy buenos cursos y agradezco a todos los docentes por ello.

A mi familia por haberme apoyado siempre en absolutamente todo. A mis amigos de Facultad de Ciencias e Ingeniería y a mi querido grupo de Atenas.

A los miembros del tribunal de la defensa, en especial a Aureliano Skirzewski y Marcela Peláez por sus sugerencias.

Por último agradezco a PEDECIBA y a la Universidad de la República.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>9</b>
2.1. Principios básicos de QFT . . . . .	9
2.1.1. Campo de Klein-Gordon . . . . .	9
2.1.2. Relación entre Cargas y Simetrías en campos . . . . .	13
2.1.3. Matriz de Scattering . . . . .	15
2.1.4. Teoría con Interacción . . . . .	20
2.1.5. Factorización Infrarroja . . . . .	24
2.2. Infinitos de Minkowski . . . . .	26
2.3. Método de Fase Estacionaria y Campos Asintóticos . . . . .	32
2.3.1. Método de Fase Estacionaria . . . . .	32
2.3.2. Comportamientos Asintóticos . . . . .	34
<b>3. Interpretación Factorización Infrarroja como Identidad de Ward con cargas conservadas</b>	<b>36</b>
3.1. Interpretación de $Q^+$ . . . . .	39
3.2. Interpretación de $Q^-$ . . . . .	46
<b>4. Demostración <math>Q^+ = Q^-</math></b>	<b>49</b>
<b>5. Carga a partir de una densidad de corriente</b>	<b>53</b>
5.1. Carga Promediada y Densidad de Corriente . . . . .	53
5.2. Conservación en Foliación en $\tau$ . . . . .	55
5.3. Conservación en Foliación en $t$ . . . . .	58
5.4. Acción sobre los campos asintóticos . . . . .	62
<b>6. Conclusiones</b>	<b>64</b>
<b>A. Extensión a más dimensiones</b>	<b>66</b>
A.1. Expansión en el infinito nulo . . . . .	66
A.2. Relación entre $Q[\hat{x}]$ and $\sigma(\hat{x})$ . . . . .	67
A.3. Cargas y corrientes conservadas . . . . .	71
A.3.1. Foliación en $\tau$ . . . . .	71
A.3.2. Foliación en $t$ . . . . .	72
A.4. Cargas asintóticas en una teoría $\chi^3$ . . . . .	75
A.4.1. Factorización Infrarroja y Carga asociada . . . . .	75

<b>B. Algunos cálculos detallados</b>	<b>77</b>
B.1. Demostración Método Fase Estacionaria . . . . .	77
B.2. Ecuación 5.4 . . . . .	79
B.3. Ecuación 5.12 . . . . .	80
B.4. Ecuación 5.24 . . . . .	81
B.5. Operador inverso de $\mathbb{K}$ . . . . .	82
B.6. Continuidad infinito temporal-nulo . . . . .	84
B.7. Comportamiento infinito espacial en $2m+2$ . . . . .	85

## Resumen

En esta tesis se extiende la relación entre Factorización Infrarroja y Simetrías Asintóticas a una teoría de partículas con spin cero. De este modo se reproducen a nivel árbol algunos de los resultados obtenidos para partículas de spin 1 y 2. Aunque sin existir simetrías explícitas, se logra escribir la factorización infrarroja como Identidad de Ward a través de la aparición de operadores que llamamos cargas. Se muestra, a partir de las anteriores, que existen infinitas magnitudes conservadas y que derivan de densidades de corrientes conservadas. Finalmente discutimos la acción de la simetría de las cargas sobre los campos asintóticos. Esta tesis está basada en [1, 2].

# 1. Introducción

Las acciones que describen la gravedad y electromagnetismo tienen una particularidad muy interesante, ambas poseen simetrías *gauge*. Esto significa que la acción es invariante bajo ciertas transformaciones locales; en el caso de gravedad la simetría es de difeomorfismos y en electromagnetismo es la simetría local de fase. Estas simetrías *gauge* explican, entre otras cosas, porqué las partículas mediadoras de estas fuerzas son no masivas (o equivalentemente, porqué estas fuerzas decaen como  $1/r^2$  [3]).

Por otro lado, es conocido que amplitudes de scattering en teorías con partículas no masivas poseen divergencias infrarrojas [4, 5]. De esta manera, vemos que existe una asociación entre las simetrías *gauge* y las divergencias infrarrojas.

La relación entre simetrías *gauge* y dinámica infrarroja es más amplia que lo descrito anteriormente. A partir de 2014, en una serie de trabajos realizados por Strominger [6, 7], se vio que tres áreas distintas de la física podían ser asociadas a la dinámica infrarroja, como se muestra en la figura 1.

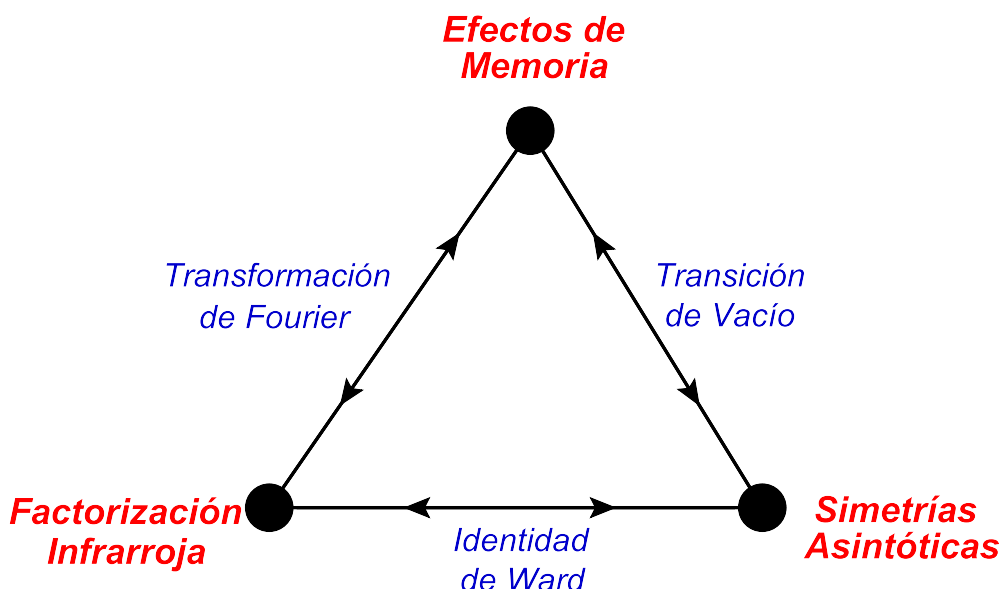


Figura 1: Diagrama Infrarrojo. Esquema que muestra las tres áreas de la dinámica infrarroja: Efectos de Memoria, Simetrías Asintóticas y Factorizaciones Infrarrojas, y sus relaciones. Los vértices representan cada una de las áreas y las flechas la relación entre las mismas. Modificado de [4].

En el primer vértice están las *Simetrías Asintóticas*, que involucran el estudio de simetrías exactas no triviales y cargas conservadas en teorías con un borde o una región asintótica. Los trabajos de Bondi, van der Burg, Metzner y Sach [8, 9] fueron los primeros desarrollos de este tipo y encontraron una extensión infinito dimensional

del grupo de Poincaré como simetría asintótica en Relatividad General en espacios asintóticamente planos. Simetrías asintóticas análogas en Electrodinámica Cuántica (QED, por sus siglas en inglés) y en teorías no Abelianas fueron descubiertas recién en estos últimos años [6, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20].

En el segundo vértice se encuentran las *Factorizaciones Infrarrojas*, que son referidas en la literatura como *Soft Theorems*. Estas refieren a ciertas propiedades de la matriz de scattering para la emisión de un gravitón o un fotón cuya energía se hace tender a cero. Las Factorizaciones Infrarrojas revelan propiedades muy importantes sobre los diagramas de Feynman de una teoría. Por ejemplo, muestran que en cada proceso físico un número infinito de partículas *soft*<sup>1</sup> son producidas, pero en maneras controladas para la consistencia global de la Teoría Cuántica de Campos (QFT, según sus siglas en inglés). Las primeras investigaciones en Factorizaciones Infrarrojas se originaron sobre QED en 1937 por Bloch y Nordsiek [21]; y tuvieron un desarrollo importante gracias a Low y otros [22, 23, 24, 25, 26] a partir de 1954. Más tarde Weinberg [27] introduce los primeros estudios en gravedad.

El tercer vértice son los *Efectos de Memoria*. El mismo trata el corrimiento permanente en las posiciones de pares de observadores inerciales generado por el pasaje de ondas gravitacionales. Los primeros trabajos también fueron en gravedad, gracias a [28, 29, 30, 31, 32, 33]. El análogo en teorías gauge apareció recientemente en [34, 35, 36].

Los Efectos de Memoria tienen una importancia particular debido a que son el único vértice del diagrama disponible para ser medido directamente. De esta forma, gracias a las relaciones encontradas entre los vértices, resulta posible observar las implicancias físicas de fenómenos más abstractos como la aparición de infinitas partículas *soft* o infinitas simetrías y cantidades conservadas.

Las tres diferentes áreas descritas poseen las conexiones mostradas en la figura 1. En QED se demostró que las factorizaciones infrarrojas son identidades de Ward de un grupo infinito-dimensional de simetrías asintóticas [12]. También se encontraron resultados similares en gravedad [7, 37, 38, 39, 40].

Por otro lado existen trabajos que relacionan efectos de memoria con simetrías asintóticas y factorizaciones infrarrojas. Estos son tanto en gravedad [41, 42] como en QED [36].

Una pregunta natural es si el triángulo infrarrojo, figura 1, se extiende a otras teorías con partículas *soft* de spin distinto a 1 (fotón) o 2 (gravitón). En esta línea existen trabajos que relacionan simetrías asintóticas y factorizaciones infrarrojas, para el caso de partículas *soft* de spin 1/2 (conocido como *photino*, ver [43]) y 3/2 (*gravitino*, ver [44, 45]). Incluso existen análisis para valores de spin altos [46, 47].

---

<sup>1</sup>Las partículas *soft* son aquellas cuyos momentos tienden a cero.

El lector notará que el caso de partículas soft de spin cero no está contemplado en ninguno de los trabajos anteriores. Esto se debe a que no existen simetrías gauge asociadas a campos escalares, por lo que este caso parecería quedar por fuera del triángulo infrarrojo. Sin embargo, como discutiremos más adelante, pueden existir teorías que exhiban factorización infrarroja de escalares soft. Más aún, existe un efecto de memoria escalar [48, 49]. ¿Podrá entonces existir un triángulo infrarrojo para escalares?

Para poder avanzar en responder esta pregunta, en este trabajo consideramos una variante del triángulo infrarrojo donde el vértice de simetrías asintóticas es reemplazado por uno de “cargas conservadas”:

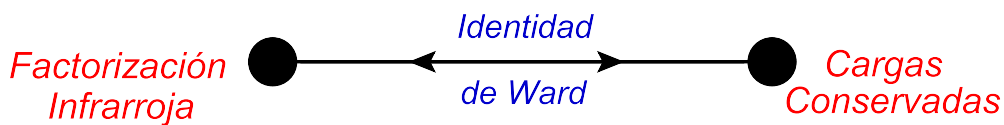


Figura 2: Representación de la relación entre Factorizaciones Infrarrojas y Cargas Conservadas.

El trabajo de esta tesis se centra en explicar esta figura para partículas soft de spin cero. La teoría escalar que estudiaremos es un modelo que realiza la conexión de la figura 2 a nivel semiclásico: nuestras consideraciones se restringen a diagramas de nivel árbol.<sup>2</sup>

Una vez obtenidas las cargas, las simetrías son en principio calculables y así se podría recuperar el triángulo original de la figura 1. Si bien realizamos un primer cálculo en esta dirección, carecemos de una interpretación de la transformación resultante. Un entendimiento más profundo de la figura 1 para el caso escalar requiere nuevas ideas y queda entonces para futuros trabajos.

La tesis está compuesta por cuatro secciones y dos apéndices como se describe a continuación.

En la sección 2 se introduce material base necesario para entender las siguientes secciones en la tesis. En la subsección 2.1 se tratan algunas nociones básicas de QFT que sirven como base para desarrollos posteriores, así como también para introducir la notación a utilizar. En la subsección 2.1.4 se presenta la teoría y la interacción particular con la que se trabajará. También se muestra cómo calcular las amplitudes de scattering a partir del Hamiltoniano considerado. En la subsección 2.1.5 encontramos la Factorización Infrarroja a partir de diagramas a nivel árbol.

<sup>2</sup>La inclusión de efectos de loops requeriría realizar el modelo como parte de una teoría con simetrías que prohíban términos de masa para el escalar. Estas simetrías a su vez podrían completar el triángulo escalar de la figura 1. Volveremos sobre este punto en la sección de conclusiones 6.



En la sección 2.2 se introduce la noción de infinitos temporal, nulo y espacial para el espacio-tiempo de Minkowski. Estas nociones son usadas en el resto de la tesis para describir el comportamiento asintótico de los campos de manera geométrica. Se presenta el método de Fase Estacionaria, subsección 2.3.1, y se describen los campos sobre los infinitos anteriores, subsección 2.3.2.

Escribimos, en la sección 3, la Factorización Infrarroja (descrita en la subsección 2.1.5) con un operador que conmuta con la matriz de scattering, que llamaremos carga, quedando en la forma de Identidad de Ward. Estrictamente este operador se entiende como dos cargas distintas según se aplica sobre estados asintóticos en el futuro o en el pasado.

Después buscamos sus interpretaciones escribiéndolas en términos de campos asintóticos. Estudiando los campos en el infinito espacial hallamos que ambas cargas cambian de una a la otra de modo continuo, ver sección 4.

En la sección 5, se define un nuevo operador llamado carga promediada a partir de las cargas anteriores y de una función arbitraria definida sobre una esfera. Se demuestra que ésta proviene de una densidad de corriente conservada y se obtiene la carga promediada como la integral de la densidad sobre cualquier superficie a tiempo constante. De esta manera mostraremos que esta teoría posee un número infinito de cargas conservadas. También se estudia cómo sería la transformación de simetría, proveniente de las cargas, sobre los campos asintóticos.

Finalmente concluimos en la sección 6 y comentamos algunas de las líneas de investigación que esta tesis abre.

La tesis se complementa con dos apéndices. En el apéndice A se extiende a más dimensiones la teoría desarrollada hasta aquí con el fin de poder analizar qué resultados son generalizables. Solo se trabaja con dimensiones pares para facilitar los cálculos.

En la subsección A.4 se estudia una teoría en dimensión par, mayor a cuatro, que contiene solo un campo sin masa con una interacción cúbica. Se encuentran resultados similares a los obtenidos en las secciones previas.

Por último, en la sección B se agregan algunos cálculos en detalle que no se desarrollaron anteriormente sobre la tesis.

## 2. Preliminares

### 2.1. Principios básicos de QFT

La Teoría Cuántica de Campos (QFT) es el esquema o marco básico que se utiliza para describir a la dinámica de partículas elementales. Su increíble poder de predicción lo hace un paradigma de la ciencia moderna.

La necesidad de este modelo yace en el deseo de entender fenómenos que ocurren a escalas muy pequeñas y a altas energías. Así el objetivo de QFT es marcar una unión entre fenómenos cuánticos y relativistas a modo de superar ciertos obstáculos como problemas de causalidad o inclusión de creación y aniquilación de partículas, por nombrar algunos.

Veremos aquí algunos de los principios que construyen este marco.

#### 2.1.1. Campo de Klein-Gordon

En esta tesis trabajaremos solo con campos de tipo Klein-Gordon, por lo tanto haremos una breve introducción aquí. Un campo de Klein-Gordon  $\phi$  es un operador que satisface la ecuación de Klein-Gordon:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\phi = 0 \quad \text{o} \quad (-\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi = 0 \quad (2.1)$$

Y además es cuantizado por las relaciones de conmutación canónicas, en el marco de *Schrödinger*:

$$[\phi(x), \pi(y)] = i\delta^3(x - y) \quad ; \quad [\phi(x), \phi(y)] = [\pi(x), \pi(y)] = 0 \quad (2.2)$$

donde  $\pi(x)$  es la densidad de momento, definida como:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} \quad (2.3)$$

y  $\mathcal{L}$  es la densidad lagrangiana asociada a la ecuación de Klein-Gordon:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \quad (2.4)$$

La densidad lagrangiana se corresponde con un *Langrangiano*  $L$  y una acción  $S$  de la forma,

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L} d^4x \quad (2.5)$$

Y el *hamiltoniano* se define como

$$H = \int d^3x [\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}] \quad (2.6)$$

A lo largo de este trabajo se utiliza la métrica de Minkowski con signatura positiva,  $diag = (-1, 1, 1, 1)$ . Veamos entonces cuáles son las características de un campos de Klein-Gordon. Si expandimos el campo  $\phi$  usando la transformada de Fourier <sup>3</sup> tenemos,

$$\phi(x, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot x} \phi(p, t)$$

Luego 2.1 se escribe en términos del campo transformado  $\phi(p, t)$  como,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (p^2 + m^2) \right) \phi(p, t) = 0 \quad (2.7)$$

Entonces  $\phi(p, t)$  satisface la ecuación del oscilador armónico simple 2.7 de frecuencia:  $E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$ . Luego podemos escribir  $\phi$  y  $\pi$  usando, los que llamaremos *operadores de Fock*, análogamente al oscilador armónico,  $a_p$  y  $a_p^*$ :

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (A a_p e^{ip \cdot x} + B a_p^* e^{-ip \cdot x}) \quad (2.8)$$

donde  $p \cdot x = p_\mu x^\mu$  y  $p^0 = E_p$ . Usando la definición 2.3 para el campo  $\pi$  tenemos:

$$\pi(x) = \dot{\phi}(x) \quad (2.9)$$

entonces,

$$\pi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) E_p (A a_p e^{ip \cdot x} - B a_p^* e^{-ip \cdot x}) \quad (2.10)$$

Para hallar  $A$  y  $B$  planteamos que la relación de conmutación entre los operadores de Fock, derivada de 2.2, sea:

$$[a_p, a_q^*] = (2\pi)^3 \delta^3(p - q) 2E_p \quad (2.11)$$

Quedándonos así solo con un grado de libertad y luego podemos elegir  $A = B = (1/2)E_p$ :

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (a_p e^{ip \cdot x} + a_p^* e^{-ip \cdot x}) \quad (2.12)$$

$$\pi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{-i}{2} (a_p e^{ip \cdot x} - a_p^* e^{-ip \cdot x}) \quad (2.13)$$

---

<sup>3</sup>Con  $\phi(x)$  como campo real se satisface  $\phi^*(p) = \phi(-p)$ .

En términos de los operadores de Fock el hamiltoniano se escribe,

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \left( a_p^* a_p + \frac{1}{2} [a_p, a_p^*] \right) \quad (2.14)$$

Dado el hamiltoniano escrito como en 2.14, podemos hacer la conmutación con los operadores de Fock,

$$[H, a_p^*] = E_p a_p^* \quad ; \quad [H, a_p] = -E_p a_p$$

Porque la energía en 2.14 tiene un término que es infinito,  $\delta(0)$ , se define la energía de los estados como los valores propios del operador:

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p a_p^* a_p$$

Luego se define el estado vacío  $|0\rangle$  tal que  $a_p |0\rangle = 0$  para todo  $\vec{p}$ . De este modo el vacío tiene energía cero y el estado  $a_p^* |0\rangle$  tiene energía  $E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$ , que correspondería a una partícula con dicha energía.

Esta asociación nos permitiría escribir el estado de una partícula con momento  $k^\mu$  como  $|k\rangle$ , siendo  $|k\rangle = a_k^* |0\rangle$ . Por último, se define entonces el espectro del hamiltoniano de Klein-Gordon como el vacío más todos los estados resultantes tras aplicar el operador  $a_p^*$ , para algún momento  $p^\mu$ .

Según el marco de Heisenberg la dependencia temporal del campo  $\phi$  estaría dada de la forma,

$$\phi(x) = \phi(\vec{x}, t) = e^{iHt} \phi(\vec{x}) e^{-iHt}$$

Luego,

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (a(p) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a(p)^* e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}) \quad (2.15)$$

Con los operadores de Fock y sus relaciones de conmutación, ecuaciones 2.8 y 2.11, podemos calcular la amplitud de propagación de una partícula desde  $x$  hasta  $y$ :  $\langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$ . Donde  $T$  es el operador *orden-temporal*. Definiremos  $D_F(x - y)$  como el valor de esta amplitud y se puede demostrar que su valor es <sup>4</sup>,

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (2.16)$$

Si hacemos la integral en cuatro dimensiones y usamos la prescripción de Feynman,

---

<sup>4</sup>Ver capítulo 2 del libro [5].

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (2.17)$$

Luego su transformada de Fourier sería,

$$\boxed{D_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}} \quad (2.18)$$

La función  $\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle$  es llamada función de correlación a dos puntos. Su cálculo será muy importante en secciones siguientes.

### 2.1.2. Relación entre Cargas y Simetrías en campos

El objetivo de esta sección es desarrollar qué relación existe entre las cargas conservadas en una teoría de campos y las simetrías en la misma. Desarrollaremos aquí una versión modificada de la primera expresión en el tema, descrita en el *Teorema de Noether* de 1918, [50]. Se definen las *simetrías* en una teoría como aquellas transformaciones en los campos  $\hat{\delta}\phi$  que dejan invariante a las ecuaciones de movimiento  $E(\phi)$ .

Cabe mencionar primero que para una teoría clásica de campos, la ecuación de movimiento  $E(\phi)$  siempre puede ser obtenida a partir de la densidad langrangiana  $\mathcal{L}$  usando las ecuaciones de *Euler-Lagrange*,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \quad (2.19)$$

Dichas ecuaciones de Euler-Lagrange se obtienen tras hacer una variación de la acción  $S$  después de permitir un cambio en los campos  $\delta\phi$ , ver [5],

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta\phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Suponiendo que la variación de  $S$  es un extremo en la solución  $\phi$ , se iguala a cero la ecuación 2.20:  $0 = \delta S$ . Si consideramos solo las variaciones  $\delta\phi$  que son cero en el borde de la región de integración, encontramos las ecuaciones de Euler-Lagrange 2.19.

Entonces una transformación de simetría  $\hat{\delta}\phi$  puede cambiar la acción sólo por un término de borde:

$$S[\phi + \hat{\delta}\phi] = S[\phi] + \int d^4x \partial_\mu K^\mu$$

siendo  $K^\mu$  un campo definido en el espacio-tiempo. La condición anterior es equivalente a decir que la densidad langrangiana sólo puede cambiar por un término que sea una divergencia,

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x) + \partial_\mu K^\mu(x)$$

Utilizando la variación en  $S$  dada por la ecuación 2.20 para una variación cualquiera  $\delta\phi$  tenemos,

$$\delta S = \int d^4x (-E(\phi)\delta\phi + \partial_\mu \theta^\mu(\phi, \partial_\mu \phi)) \quad (2.21)$$

donde  $\theta^\mu$  es la *densidad de corriente simpléctica* en [51]. Considerando la variación de simetría  $\hat{\delta}\phi$  en 2.21 obtenemos,

$$\partial_\mu j^\mu = E(\phi)\hat{\delta}\phi \stackrel{w}{=} 0 \quad ; \quad j^\mu := \theta^\mu - K^\mu \quad (2.22)$$

donde  $\stackrel{w}{=}$  corresponde a una igualdad bajo la condición que  $\phi$  satisface  $E(\phi) = 0$ , usando la notación de [52]; y  $j^\mu$  es llamada *corriente de Noether*. Entonces el resultado es que por cada simetría  $\hat{\delta}$  en la teoría existe una corriente conservada  $j^\mu$ :

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0} \quad (2.23)$$

Dicha corriente permite definir cargas  $Q$  a partir de su integral sobre una superficie  $\Sigma$ :

$$Q = \int_\Sigma dS_\mu j^\mu$$

### 2.1.3. Matriz de Scattering

En el marco de QFT se modela la interacción entre partículas como la evolución en un estado inicial a un estado final de las mismas. Donde ambos estados son considerados como estados libres en el pasado y futuro remotos. Y la evolución estaría dada por la acción del hamiltoniano de interacción.

Es decir se consideran estados iniciales de partículas, situadas en un tiempo  $-t$ , que interactúan cuando se las hace evolucionar por el operador  $\exp(-iHt)$ , hasta un tiempo  $t$  después. Al estado resultante se lo superpone con un cierto estado de partículas que habrían evolucionado bajo  $\exp(iHt)$  desde un estado en un tiempo futuro  $t$ . Finalmente, para que las partículas sean libres en el estado inicial y final se hace el límite cuando  $t$  va a infinito, suponiendo que de esta manera las partículas en cada estado estarían muy lejos unas de otras para interactuar.

Llamaremos al estado inicial, que es asociado al hamiltoniano libre, como  $|in\rangle$ , mientras que el estado en el futuro como  $\langle out|$ .

De este modo se define la matriz de scattering  $S$  como el operador evolución,  $\exp(-iHt)$ , en el límite  $t \rightarrow \infty$  aplicado sobre los estados  $|in\rangle$  y  $\langle out|$ ,

$$\langle out| S |in\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle out| e^{-iH(2t)} |in\rangle \quad (2.24)$$

Así se obtiene la probabilidad de scattering en experimentos reales usando esta idealización a estados asintóticos.

La matriz de scattering se puede descomponer como  $S = 1 + iT$ , definiendo la matriz  $T$ . De esta forma se separa la componente de  $S$  con la cual obtendríamos la probabilidad que se mantenga igual el estado inicial de partículas. A su vez se define el elemento de matriz  $A$  como:

$$\langle p_1 p_2 \dots | iT | k_A k_B \dots \rangle = (2\pi)^4 \delta^4 \left( \sum k_i - \sum p_f \right) iA(k_i \rightarrow p_f) \quad (2.25)$$

siendo  $\langle out| = \langle p_1 p_2 \dots |$  y  $|in\rangle = |k_A k_B \dots\rangle$ , y todos los momentos están *on-shell*:  $p^0 = E_p$ ,  $k^0 = E_k$ . La matriz  $T$  es proporcional a la delta de Dirac  $\delta^4$  debido a la conservación del 4-momento. Pasemos ahora a obtener el método para calcular  $A(k_i \rightarrow p_f)$ .

Consideremos un hamiltoniano  $H$  como un hamiltoniano libre  $H_0$  más un término de interacción  $gH_{int}$ , es decir,  $H = H_0 + gH_{int}$ . La variable  $g$  es una constante pequeña que llamaremos *constante de acoplamiento*. Cuando mencionamos hamiltoniano libre nos referimos en este trabajo a un hamiltoniano como el de Klein-Gordon, ver ecuaciones 2.4 y 2.6.

Supongamos ahora que tenemos un campo  $\phi(x)$  para cierto tiempo  $t_0$  y lo escribimos en términos de los operadores de Fock:



$$\phi(t_0, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{ip \cdot x} + a_p^* e^{-ip \cdot x}) \quad (2.26)$$

Luego, en el marco de Heisenberg, la evolución del campo  $\phi$  en el tiempo está dada por,

$$\phi(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH(t-t_0)}$$

Definimos como  $\phi_I(t, \vec{x})$  al campo obtenido tras hacer la evolución de  $\phi(t_0, \vec{x})$  en la teoría libre:

$$\phi_I(t, \vec{x}) := e^{iH_0(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH_0(t-t_0)} \quad (2.27)$$

Luego  $\phi_I(t, \vec{x})$  coincide con  $\phi(t, \vec{x})$  cuando  $g = 0$ . Porque  $\phi_I(t, \vec{x})$  pertenece a la teoría libre podemos escribirlo como,

$$\phi_I(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{ip \cdot x} + a_p^* e^{-ip \cdot x}) \quad \text{con } x^0 = t - t_0$$

Por otro lado podemos escribir el campo  $\phi(t, \vec{x})$  en términos de  $\phi_I(t, \vec{x})$  como:

$$\phi(t, \vec{x}) = U^*(t, t_0) \phi_I(t, \vec{x}) U(t, t_0)$$

donde  $U(t, t_0)$  es el operador unitario:

$$U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH_0(t-t_0)}$$

que también puede ser escrito como:

$$U(t, t_0) = T \left\{ -ig \int_{t_0}^t dt' H_{int}(t') \right\} \quad (2.28)$$

siendo  $T$  el operador *orden-temporal*. Antes de calcular la amplitud  $A$  necesitamos calcular la *función de correlación a dos puntos* para un hamiltoniano con interacción. Dicho cálculo se realiza con teoría de perturbaciones sobre el hamiltoniano libre, por lo que usaremos el resultado 2.16.

$$\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle$$

necesitamos escribir  $\langle \Omega |$ , el vacío en la teoría con interacción, en función del vacío de la teoría libre  $\langle 0 |$ . En la teoría libre teníamos:

$$\langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = D_F(x - y) := \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

donde la función  $D_F(x - y)$  se conoce como *propagador de Feynman*. Para escribir el estado  $\langle \Omega |$  en términos de  $\langle 0 |$  suponemos que el conjunto de estados propios del hamiltoniano de interacción  $|n\rangle$  satisfacen:  $E_n > E_0$ ; siendo  $E_n = \langle n | H | n \rangle$  y  $E_0 = \langle \Omega | H | \Omega \rangle$ . Por otro lado se debe satisfacer  $E_0 > 0$ , es decir el estado vacío de  $H$  tiene valor propio mayor que el de la teoría libre:  $H_0 |0\rangle = 0$ . Consideremos que tenemos el estado vacío de  $H_0$  y lo hacemos evolucionar con  $H$  por un tiempo  $T$ :

$$e^{-iHT} |0\rangle = e^{-iHT} |\Omega\rangle \langle \Omega | 0 \rangle + \sum_{n \neq 0} e^{-iE_n T} |n\rangle \langle n | 0 \rangle$$

Haciendo que  $T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)$  tenemos

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0 T} \langle \Omega | 0 \rangle)^{-1} e^{-iHT} |0\rangle$$

En el límite podemos cambiar  $T$  por  $T + t_0$ , luego:

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega | 0 \rangle)^{-1} U(t_0, -T) |0\rangle$$

Finalmente escribimos la función de correlación como:

$$\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \left\{ \phi_I(x) \phi_I(y) \exp[-ig \int_{-T}^T dt H_{int}(t)] \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left\{ \exp[-ig \int_{-T}^T dt H_{int}(t)] \right\} | 0 \rangle} \quad (2.29)$$

donde fue necesario dividir entre  $\langle \Omega | \Omega \rangle$  para eliminar factores no importantes. Una fórmula análoga a 2.29 puede ser usada para calcular funciones de correlación a más puntos.

Con el objetivo de calcular la expresión 2.29, para un número arbitrario  $n$  de puntos en la función de correlación, estudiamos cómo calcular el valor esperado:

$$\langle 0 | T \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \dots \phi_I(x_n) | 0 \rangle \quad (2.30)$$

Escribiendo  $\phi_I(x)$  en términos de los operadores de Fock:  $\phi_I(x) = \phi_I^+(x) + \phi_I^-(x)$ ;

$$\phi_I^+(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_p e^{-ip \cdot x} \quad ; \quad \phi_I^-(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_p^* e^{ip \cdot x}$$

Podemos aprovechar entonces la propiedad de los operadores de Fock:

$$\phi_I^+(x) |0\rangle = 0 \quad , \quad \langle 0 | \phi_I^-(x) = 0 \quad (2.31)$$

Suponiendo, por ejemplo,  $x_1^0 > x_2^0$  tenemos para la función a dos puntos,

$$\begin{aligned} T\phi_I(x_1)\phi_I(x_2) &= \phi_I^+(x_1)\phi_I^+(x_2) + \phi_I^-(x_2)\phi_I^+(x_1) + \phi_I^-(x_1)\phi_I^+(x_2) \\ &\quad + \phi_I^-(x_1)\phi_I^-(x_2) + [\phi_I^+(x_1), \phi_I^-(x_2)] \end{aligned} \quad (2.32)$$

Definimos la contracción de dos campos como:

$$\overline{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)} := \begin{cases} [\phi_I^+(x_1), \phi_I^-(x_2)] & \text{si } x_1^0 > x_2^0 \\ [\phi_I^+(x_2), \phi_I^-(x_1)] & \text{si } x_2^0 > x_1^0 \end{cases} \quad (2.33)$$

Luego se puede ver, usando ecuación 2.16,

$$\overline{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)} = D_F(x_1 - x_2) \quad (2.34)$$

Por lo tanto 2.32 es igual a,

$$\langle 0 | T\phi_I(x_1)\phi_I(x_2) | 0 \rangle = \overline{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)}$$

$$\langle 0 | T\phi_I(x_1)\phi_I(x_2) | 0 \rangle = D_F(x_1 - x_2)$$

Es decir solamente sobreviven los términos contraídos de 2.32. Para el caso con una función de correlación a cuatro puntos tenemos más posibles contracciones:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\phi_I(x_4) | 0 \rangle &= D_F(x_1 - x_2)D_F(x_3 - x_4) + \\ &\quad D_F(x_1 - x_3)D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4)D_F(x_2 - x_3) \end{aligned}$$

Se puede demostrar que este resultado, donde solo sobreviven los términos contraídos, se cumple para un número arbitrario de campos y se conoce como *teorema de Wick*:

$$\boxed{\langle 0 | T\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\dots\phi_I(x_n) | 0 \rangle = \{\text{todas las posibles contracciones}\}} \quad (2.35)$$

Entonces el teorema de Wick nos permite escribir funciones de correlación como suma de productos de propagadores de Feynman. Una representación diagramática de esto es llamada *diagramas de Feynman*, donde cada punto  $x_i$  es representado por un punto y cada propagador  $D_F(x_i - x_j)$  por una línea desde  $x_i$  a  $x_j$ . Para la función a cuatro puntos sería:

$$\langle 0|T\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4|0\rangle =$$

$$(2.36)$$

Finalmente podemos calcular el numerador de 2.29 si usamos teoría de perturbaciones. Luego hacemos el límite en que la constante de acoplamiento es muy pequeña y escribimos la exponencial como

$$\langle 0|T\left\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2) + \phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\left[-ig\int dtH_{int}(t)\right] + \dots\right\}|0\rangle \quad (2.37)$$

donde cada sumando es evaluado usando 2.35. De este modo el primer término de 2.37 sería:  $\langle 0|T\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)|0\rangle = D_F(x_1 - x_2)$ .

Los diagramas de Feynman desarrollados en 2.36 están escritos en función de puntos en el espacio-tiempo  $x^\mu$ , por lo que son muchas veces llamados diagramas en el espacio de posiciones. Por otro lado también pueden ser escritos en el espacio de momentos, es decir, se escriben en función de los momentos  $p^\mu$ . Observemos que la amplitud  $A$ , ecuación 2.25, está escrita de esta manera.

Para pasar de diagramas en el espacio de momentos a posición necesitamos escribir los propagadores como en 2.17. Veremos a continuación un ejemplo de esto.

### 2.1.4. Teoría con Interacción

Consideremos en esta sección una teoría donde solamente existen dos partículas, un bosón masivo y otro no masivo, que se describen por campos de Klein-Gordon. El primero es descrito por el campo  $\phi$ , el cual es real y posee masa  $m$ , y el segundo por el campo  $\chi$ , también real. Pensemos que entre estos dos campos existe un acoplamiento, es decir interactúan, de la forma:

$$L^{int} = -\frac{g}{2}\chi\phi^2 \quad (2.38)$$

Luego, el langrangiano completo sería:  $L = L_{\phi}^{free} + L_{\chi}^{free} + L^{int}$ .

$$L_{\phi}^{free} = +\frac{(\partial_{\mu}\phi)^2}{2} - \frac{m^2\phi^2}{2} \quad (2.39)$$

$$L_{\chi}^{free} = \frac{(\partial_{\mu}\chi)^2}{2} \quad (2.40)$$

donde  $(\partial_{\mu}\phi)^2 = \eta_{\mu\nu}\partial^{\mu}\phi\partial^{\nu}\phi$ .

Consideremos la función de correlación a cuatro puntos y usemos el desarrollo de la sección 2.1 para esta teoría. Expandimos primero la exponencial usando que la constante  $g$  es muy pequeña,

$$\langle\Omega|T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)|\Omega\rangle \propto \langle 0|T\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 \exp\left(-i\frac{g}{2}\int d^4z\chi(z)\phi^2(z)\right)|0\rangle \quad (2.41)$$

$$= \langle 0|T\left\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\left(1 - i\frac{g}{2}\int d^4z\chi\phi^2 + \dots\right)\right\}|0\rangle \quad (2.42)$$

El primer término sería  $\langle 0|T\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4|0\rangle$ , cuyo resultado aparece en 2.36. El segundo término, primer orden en  $g$ , va a cero tras aplicar el teorema de Wick ya que siempre quedan campos sin contraer. No sucede esto en el tercer término, que sería de la forma:

$$\frac{1}{2!}\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\left(\frac{-ig}{2}\right)^2\int d^4z\chi\phi^2\int d^4w\chi\phi^2|0\rangle \quad (2.43)$$

Aplicando el teorema de Wick tenemos las siguientes contracciones,

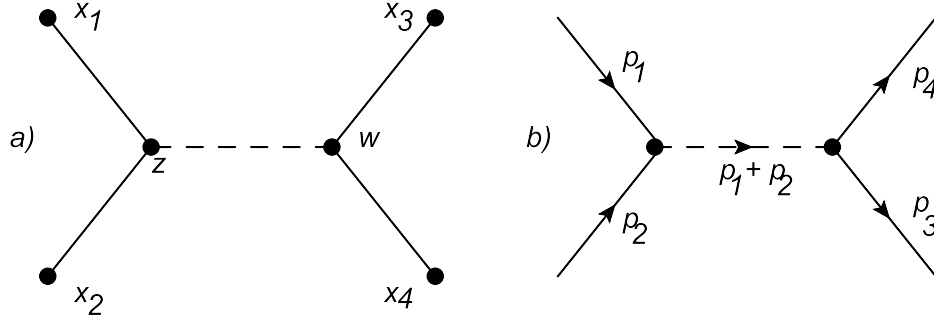


Figura 3: Representación de los diagramas de Feynman de orden  $O(g^2)$  de la función de correlación a cuatro puntos. La línea a trazos corresponde al bosón sin masa y las líneas continuas al bosón masivo. A la izquierda, a), es el diagrama en el espacio de posiciones y a la derecha, b), en el espacio de momentos.

$$\langle 0 | \phi\phi\phi\phi \left( \frac{-ig}{2} \right)^2 \int d^4z \chi\phi\phi \int d^4w \chi\phi\phi | 0 \rangle \quad (2.44)$$

luego un posible conjunto de contracciones para 2.43 nos da un valor igual a,

$$= \frac{(-ig)^2}{2!4} \int d^4z \int d^4w D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z) D_F(x_3 - w) D_F(x_4 - w) D'_F(z - w) \quad (2.45)$$

donde  $1/2!$  salió de la expansión de la exponencial,  $D_F$  es el propagador asociado al campo  $\phi$  y  $D'_F$  es del campo  $\chi$ . El diagrama de Feynman asociado a 2.45, donde  $x_1$  y  $x_2$  se contraen con  $z$ , puede verse en la figura 3a.

Si queremos escribir la función a cuatro puntos en el espacio de momentos, debemos escribir la transformada de Fourier de cada propagador en 2.45. Luego,

$$= \frac{(-ig)^2}{2!4} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \dots \int \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \int d^4z \int d^4w e^{-iz(p_1+p_2)} e^{-iw(p_3+p_4)} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iq(z-w)} \frac{ie^{p_1x_1}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \dots \frac{ie^{p_4x_4}}{p_4^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{q^2 + i\epsilon} \quad (2.46)$$

entonces,

$$= \frac{(-ig)^2}{2!4} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \dots \int \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + q) \delta^4(p_3 + p_4 - q)$$

$$\frac{ie^{p_1 x_1}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \cdots \frac{ie^{p_4 x_4}}{p_4^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{q^2 + i\epsilon} \quad (2.47)$$

En el espacio de momentos este diagrama es de la forma:

$$= \frac{(-ig)^2}{2!4} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \cdots \int \frac{d^4 p_4}{(2\pi)^4} \frac{ie^{p_1 x_1}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \cdots \frac{ie^{p_4 x_4}}{p_4^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_1 + p_2)^2 + i\epsilon} \quad (2.48)$$

El diagrama correspondiente con 2.48 puede verse en la figura 3b.

Para tener la función de correlación a cuatro puntos debemos sumar dos diagramas más, que son los que aparecen en la figura 4. Por último debería multiplicarse por un factor de 8 a cada diagrama si queremos sumar todas las contribuciones de pensar que podemos distinguir entre distintos  $z$ 's y  $w$ 's.

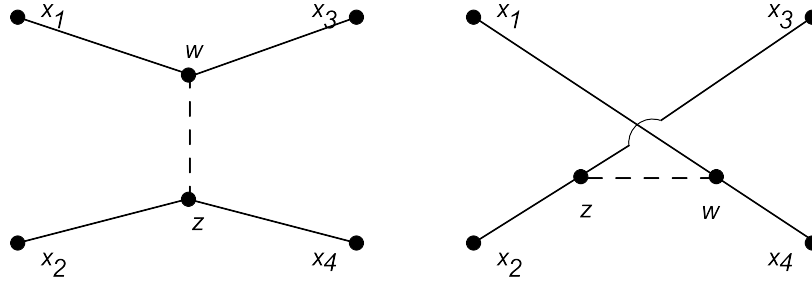


Figura 4: Representación de diagramas de Feynman a nivel árbol de la función de correlación a cuatro puntos.

De esta manera para calcular los siguientes términos en la expansión 2.42 o funciones de correlación a más puntos, se pueden seguir las siguientes pasos, que llamaremos *reglas de Feynman*,

1. Por cada propagador con momento  $p^\mu = i/(p_1^2 - m^2 + i\epsilon)$
2. Por cada vertice  $= -ig$
3. Por cada momento  $p^\mu$  externo  $= e^{p \cdot x}$
4. Dividir por el factor de simetría

Dividir por el factor de simetría refiere a dividir por el número de formas posibles de intercambiar componentes en el diagrama sin que este cambie. En el diagrama de la figura 3 el factor de simetría fue simplemente 1.

Necesitamos ahora hallar la relación entre la amplitud  $A$  y las funciones de correlación con hamiltoniano  $H_{int}$ . Para eso podemos calcular el lado izquierdo de la ecuación 2.25. Empecemos considerando el caso de un scattering 2-2, es decir el estado inicial es  $|k_1 k_2\rangle = a_{k_2}^* a_{k_1}^* |0\rangle$  y el final es  $\langle p_1 p_2| = a_{p_2} a_{p_1} \langle 0|$ .

Luego se puede observar que los estados iniciales y finales se contraen con los campos de la forma:

$$\overline{\phi(x)} |p\rangle = e^{-ip \cdot x} \quad ; \quad \langle p| \phi(x) = e^{+ip \cdot x} \quad (2.49)$$

Tenemos,

$$\langle p_1 p_2 \dots | S | k_1 k_2 \dots \rangle = \langle p_1 p_2 \dots | T \left\{ \exp \left( -i \frac{g}{2} \int d^4 z H_{int} \right) \right\} | k_1 k_2 \dots \rangle \quad (2.50)$$

Expandiendo la exponencial tenemos el mismo resultado que en  $\langle \Omega | T \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) | \Omega \rangle$  (en espacio de momentos) con la diferencia que los momentos externos solo contribuyen con un factor igual a  $e^{\pm ip \cdot x}$ , gracias a la ecuación 2.49. Es importante observar, a partir de 2.49, que los momentos entrantes, o iniciales, aportan un factor  $e^{-ip \cdot x}$ ; mientras que los momentos salientes, o finales, aportan el factor  $e^{+ip \cdot x}$ . Finalmente:

$$\langle p_1 p_2 \dots | iT | k_1 k_2 \dots \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \left\{ +3(-ig)^2 \frac{i}{(p_1 + p_2)^2 + i\epsilon} \right\} \quad (2.51)$$

Con lo que se obtiene la amplitud  $A$  de la ecuación 2.51.



### 2.1.5. Factorización Infrarroja

El sistema a estudiar será el expuesto en la sección 2.1.4, donde un campo escalar masivo  $\phi$ , real, se acopla a un campo escalar sin masa  $\chi$  a través de un langrangiano de interacción de la forma,

$$L^{int} = -\frac{g}{2}\chi\phi^2 \quad (2.52)$$

De este modo tenemos dos campos de Klein-Gordon con una interacción similar a la existente en la teoría de Yukawa <sup>5</sup>. En este trabajo llamaremos partículas a los cuantos asociados con el campo  $\phi$  y fotones a los asociados con el campo  $\chi$ .

Estudiaremos aquí primero cómo es la Factorización Infrarroja a nivel árbol correspondiente con este sistema. Para eso consideremos el proceso en que interactúan  $n$  partículas ( $m$  de ellas son entrantes y el resto salientes) y un fotón de momento  $q = w\hat{q}$ , donde  $w$  sería el valor de la energía. Además solo consideramos los diagramas en que el fotón es saliente, ver figura 5.

A la suma de todos los diagramas que contribuyen a dicho proceso llamamos  $A_{n+1}(k_1, \dots, k_n, q)$ , donde los  $k$ 's representan los momentos de las partículas.<sup>6</sup> Luego estudiamos la Factorización Infrarroja para este proceso al fijar los momentos de las partículas y hacer el límite  $w \rightarrow 0$ .

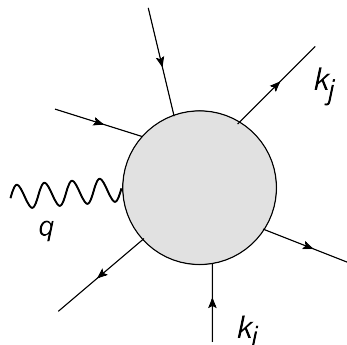


Figura 5: Representación de los diagramas de Feynman en que una partícula soft, con momento  $q^\mu$ , interactúa con partículas masivas con momentos  $k_i^\mu$ .

Cuando consideramos el límite en que la energía del fotón tiende a cero, los diagramas que predominan son aquellos en que el fotón interactúa con las partículas externas. Según la figura 6 dichos diagramas contribuyen como:

<sup>5</sup>En la teoría de Yukawa existe un vértice donde dos fermiones interactúan con un bosón.

<sup>6</sup>Para ser más general el proceso tomamos que las partículas masivas tienen alguna distribución fija de momentos entrantes y salientes y llamamos a dicha amplitud  $A_{n+1}(k_1, \dots, k_n, q)$ , es decir con

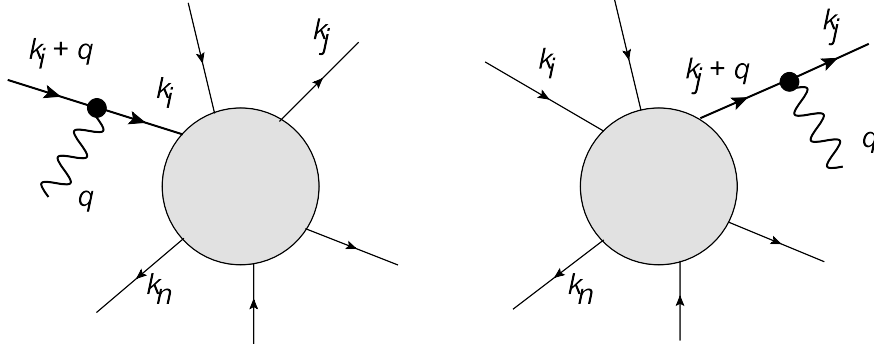


Figura 6: Representación de los diagramas de Feynman en que una partícula externa interactúa con un fotón. La partícula  $i$ -ésima es entrante mientras que la partícula  $j$ -ésima es saliente.

$$= g \frac{A_n(k_1, \dots, k_i - q, \dots, k_n)}{(k_i - q)^2 - m^2} + g \frac{A_n(k_1, \dots, k_j - q, \dots, k_n)}{(k_j + q)^2 - m^2}$$

donde las partículas  $i$ -ésima y  $j$ -ésima corresponden a partículas entrantes y salientes respectivamente. Suponiendo que las partículas se encuentran on-shell, en el límite  $w \rightarrow 0$  el denominador es  $k^2 - 2kq + q^2 - m^2 \sim -2kq$ . Por lo tanto se observa que las partículas entrantes contribuyen con signo negativo, mientras que las salientes con signo positivo. Esto se debe a que el fotón siempre está saliendo, luego

$$= -\frac{g}{2k_i q} A_n(k_1, \dots, k_j, \dots, k_n) + \frac{g}{2k_j q} A_n(k_1, \dots, k_j, \dots, k_n)$$

Por lo tanto los diagramas representados en la figura 6 son del orden  $O(q^{-1})$ ; mientras que los demás diagramas que pueden contribuir a  $A_{n+1}(k_1, \dots, k_n, q)$  son del orden  $O(q^0)$ . Entonces tenemos la siguiente relación, conocida como Factorización Infrarroja:

$$\lim_{w \rightarrow 0} A_{n+1}(k_1, \dots, k_n, q) = \sum_j -\frac{g}{2k_j q} A_n(k_1, \dots, k_j, \dots, k_n) + O(1) \quad (2.53)$$

Con la convención, en la ecuación 2.53, que los momentos entrantes se escriben  $k^\mu$  y los salientes  $-k^\mu$  tenemos:

$$\boxed{\lim_{w \rightarrow 0} w A_{n+1}(k_1, \dots, k_n, q) + \sum_j \frac{g}{2k_j \cdot (1, \hat{q})} A_n(k_1, \dots, k_j, \dots, k_n) = 0} \quad (2.54)$$

todos los momentos positivos.

## 2.2. Infinitos de Minkowski

En esta sección introducimos el concepto de diferentes infinitos sobre el espacio-tiempo de Minkowski. Para esto describimos inicialmente los diagramas conformes que nos ayudará a definir el infinito nulo. Luego extendemos esta construcción para poder tener una descripción no-singular de los infinitos temporales y espaciales.

Los diagramas conformes, también conocidos como *diagramas de Penrose*, son una estrategia para representar propiedades globales o simetrías sobre espacio-tiempos curvos. Principalmente son diagramas en los que se manifiesta explícitamente la estructura causal del espacio-tiempo. De esta forma, los mismos surgen a partir de astutos cambios de coordenadas que satisfacen algunas condiciones. Debe existir una coordenada “temporal” y otra “radial”; los conos de luz deben estar a 45 grados y, por último, el infinito debe estar asociado a un valor finito en alguna coordenada.

Resulta conveniente que entren en juegos las transformaciones conformes, las cuales se definen como aquellas transformaciones en las que la métrica cambia en un factor dependiente del espacio-tiempo:

$$\bar{g}_{\mu\nu} = w^2(x)g_{\mu\nu} \quad (2.55)$$

donde  $w(x)$  es una función real del espacio-tiempo que no se anula en ningún punto. Así las transformaciones conformes no son más que cambios de escala locales y la ventaja en utilizarlas radica en que mantienen a los conos de luz invariantes.

Veamos ahora una serie de transformaciones del espacio-tiempo de Minkowski de modo que se cumplan las condiciones mencionadas arriba, y a través de las cuales llegaremos a la definición de infinito nulo. La métrica de Minkowski tiene la forma:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.56)$$

con  $-\infty < t < +\infty$ ,  $0 \leq r < +\infty$  y  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2$ . Primero realizamos el cambio coordenadas a las variables  $u$  y  $v$ , conocidas como coordenadas nulas,

$$\begin{cases} u = t - r \\ v = t + r \end{cases} \quad (2.57)$$

Estas coordenadas pueden tomar los valores,

$$-\infty < u < +\infty, \quad -\infty < v < +\infty, \quad u \leq v$$

La métrica se escribe ahora como:

$$ds^2 = -\frac{1}{2}(dudv + dvdu) + \frac{1}{4}(v - u)^2 d\Omega^2 \quad (2.58)$$

Luego hacemos un cambio de coordenadas para traer al infinito a un valor finito,

$$\begin{cases} U = \arctan(u) \\ V = \arctan(v) \end{cases} \quad (2.59)$$

Así el rango de estas variables es:  $-\pi/2 < U < \pi/2$ ,  $-\pi/2 < V < \pi/2$ ,  $U \leq V$ .  
Tenemos,

$$ds^2 = \frac{1}{4\cos^2(U)\cos^2(V)} [-2(dUdV + dVdU) + \text{sen}^2(V - U)d\Omega^2]$$

Para hacer la métrica más simple agregamos otro cambio más de coordenadas,

$$\begin{cases} T = V + U \\ R = V - U \end{cases} \quad (2.60)$$

La región de definición de estas nuevas variables es:  $0 \leq R < \pi$ ,  $|T| + R < \pi$ .  
Ahora la métrica ha quedado de la forma,

$$ds^2 = w^{-2}(T, R) (-dT^2 + dR^2 + \text{sen}^2(R)d\Omega^2) \quad (2.61)$$

donde

$$w = \cos(T) + \cos(R) \quad (2.62)$$

Luego  $w(R, T)$  es el factor conforme que relaciona la métrica de Minkowski y la métrica no-física,

$$\bar{d}s^2 = -dT^2 + dR^2 + \text{sen}^2(R)d\Omega^2 \quad (2.63)$$

definida sobre el espacio  $\mathbb{R} \times S^3$ . La métrica en 2.63 es conocida como *Universo Estático de Einstein*, ya que es una solución a las ecuaciones de Einstein para un fluido perfecto y con constante cosmológica distinta de cero.

El espacio  $\mathbb{R} \times S^3$  es dibujado como un cilindro, mientras que el espacio de Minkowski es parametrizado a un subespacio de éste, ver figura 7. Cada círculo con  $T$  constante representa una esfera  $S^3$ , y cada punto una esfera  $S^2$ .

Es importante observar que el espacio-tiempo de Minkowski está asociado al interior de la región oscura de la figura 7, es decir sin los bordes. La unión del interior y el borde es conocida como *compactificación conforme*; mientras que solo los bordes son llamados *infinitos conformes*. Los últimos se subdividen según las diferentes regiones del diagrama:

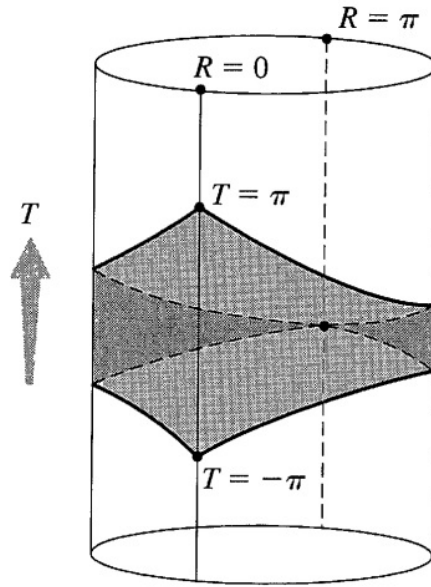


Figura 7: Representación del *Universo Estático de Einstein* a través de un cilindro. En color oscuro la región conforme al espacio tiempo de Minkowski. Extraído de [53].

$$\left\{ \begin{array}{l} i^+ - \text{Infinito Temporal Futuro} \quad (T = \pi; R = 0) \\ i^0 - \text{Infinito Espacial} \quad (T = 0; R = \pi) \\ i^- - \text{Infinito Temporal Pasado} \quad (T = -\pi; R = 0) \\ \mathcal{I}^+ - \text{Infinito Nulo Futuro} \quad (T = \pi - R; 0 < R < \pi) \\ \mathcal{I}^- - \text{Infinito Nulo Pasado} \quad (T = -\pi + R; 0 < R < \pi) \end{array} \right.$$

Se pueden apreciar mejor las regiones del infinito conforme si representamos la zona oscura de la figura 7 como un triángulo, ver figura 8.

Las geodésicas en el diagrama de Penrose poseen algunas características interesantes. Por ejemplo, las geodésicas nulas comienzan en  $\mathcal{I}^-$ , están a 45 grados y terminan en  $\mathcal{I}^+$ . Además todas geodésicas de tipo tiempo comienzan en  $i^-$  y terminan en  $i^+$ , mientras que las geodésicas de tipo espacio empiezan y terminan en  $i^0$ .

De esta forma el infinito nulo está formado por la unión de las superficies  $\mathcal{I}^+$  e  $\mathcal{I}^-$ , que son pronunciadas como “scri-más” y “scri-menos” respectivamente.

Es importante observar en las variables  $R$  y  $T$  que los infinitos temporal y espacial son puntos. Por lo tanto si se quiere estudiar mejor estas regiones del diagrama conviene hacer un cambio de variable de modo que las mismas sean representadas por superficies. Es decir, serían provechosas nuevas variables que extiendan los puntos  $i^+$ ,  $i^-$  e  $i^0$  y así, por ejemplo, podríamos conseguir una mejor representación de las diferentes direcciones

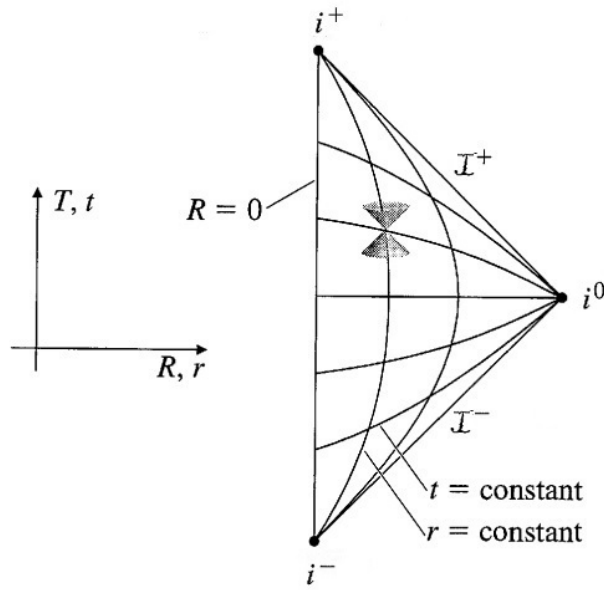


Figura 8: Diagrama conforme al espacio-tiempo de Minkowski. Conocido como *diagrama de Penrose*. Modificado de [53].

en que se los puede alcanzar. En la figura 9 se representa este deseo donde los extremos del diagrama de Penrose son sustituidos por superficies más suaves.

La observación anterior será útil más adelante cuando se desee estudiar cómo se comportan los campos próximos al infinito sobre diferentes geodésicas.

Imaginemos ahora que queremos extender el Infinito Temporal Futuro  $i^+$  a una superficie. Para eso definimos unas nuevas variables en el espacio-tiempo de Minkowski:

$$\begin{cases} \tau = \sqrt{t^2 - r^2} \\ \rho = r/\sqrt{t^2 - r^2} \end{cases} \quad (2.64)$$

donde la región a parametrizar sería:  $t > 0$  y  $r < t$ . La métrica del espacio-tiempo es,

$$ds^2 = -d\tau^2 + \tau^2 d\sigma^2 \quad (2.65)$$

donde  $d\sigma^2$  será:

$$d\sigma^2 = \frac{d\rho^2}{1 + \rho^2} + \rho^2 d\Omega_2^2 \quad (2.66)$$

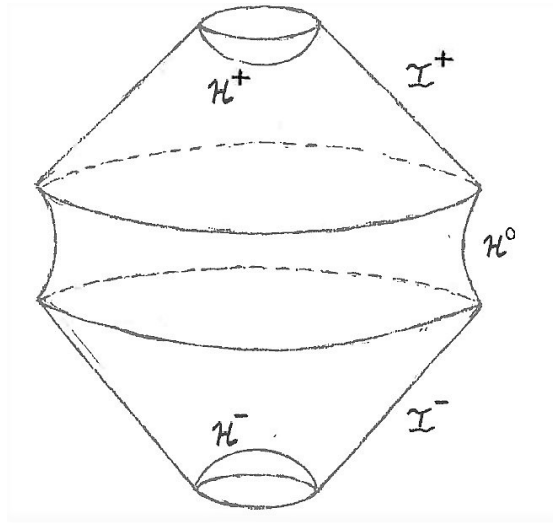


Figura 9: Representación artística de los infinitos conformes. Se muestran los puntos  $i^0$ ,  $i^+$  e  $i^-$  de forma extendida como  $\mathcal{H}^0$ ,  $\mathcal{H}^+$  y  $\mathcal{H}^-$ .

Las coordenadas  $(\rho, \hat{x})$  definen la superficie que denominaremos como infinito temporal futuro  $\mathcal{H}^+$ . Dicha superficie puede ser interpretada de la siguiente manera.

Consideremos un espacio ambiente de cuatro dimensiones, con variables  $x_i : i = 0, \dots, 3$ , y métrica de Minkowski. Consideremos la superficie generada por los puntos que satisfacen la ecuación 2.67.

$$-1 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad (2.67)$$

Dicha superficie corresponde a un hiperboloide y la métrica inducida sobre éste es la misma que la métrica en la ecuación 2.66, ver figura 10. De este modo asociamos al hiperboloide con la superficie  $H^+$ , la cual se correspondería con la extensión del punto  $i^+$ . Para extender el Infinito Temporal Pasado  $i^-$  se procede de forma análoga encontrando un hiperboloide que llamamos  $H^-$ .

Si ahora en cambio queremos extender el Infinito Espacial  $i^0$ , definimos las variables:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{r^2 - t^2} \\ \tau = t/\sqrt{r^2 - t^2} \end{cases} \quad (2.68)$$

siendo la región parametrizada restringida a  $r > |t|$ . Luego la métrica se escribe como,

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\sigma^2 \quad (2.69)$$

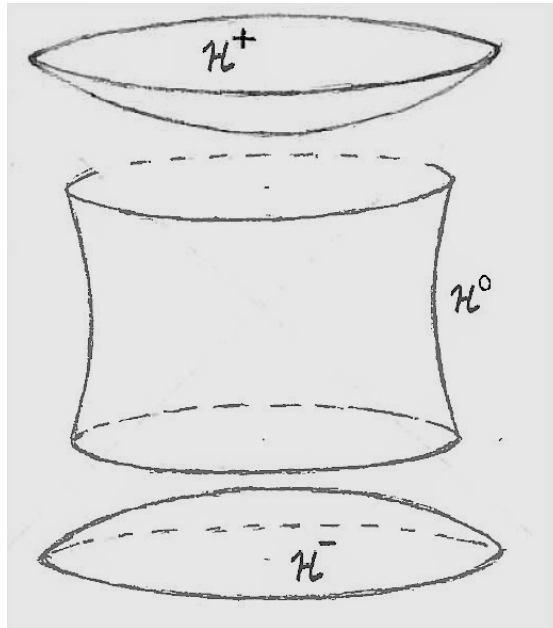


Figura 10: Representación de los hiperboloides  $\mathcal{H}^\pm$  y  $\mathcal{H}^0$ .

donde ahora  $d\sigma^2$  corresponde a la métrica inducida sobre un hiperboloide parametrizado por las variables  $(\tau, \hat{x})$ . Dicho hiperboloide es la región que llamamos infinito espacial  $\mathcal{H}^0$  y su métrica se conoce como métrica de *De Sitter tridimensional*,

$$d\sigma^2 = \frac{-d\tau^2}{1 + \tau^2} + (1 + \tau^2)\Omega_2^2 \quad (2.70)$$

El hiperboloide  $\mathcal{H}^0$  puede interpretarse de modo similar a  $H^+$ , ver figura 10. Consideremos un espacio-tiempo de Minkowski y la superficie generada por la ecuación 2.71. La métrica inducida sobre dicha superficie es la métrica que aparece en la ecuación 2.70.

$$1 = -dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad (2.71)$$

Volviendo a la figura 9, las regiones suavizadas en los extremos del diagrama de Penrose han sido representadas, de modo artístico, por las superficies  $H^\pm$  y  $H^0$ .

En la siguiente sección veremos cómo la descripción que hemos realizado nos permite obtener la forma de los campos sobre geodésicas que van hacia infinito.



## 2.3. Método de Fase Estacionaria y Campos Asintóticos

En la presente sección desarrollamos herramientas que servirán para el estudio de los comportamientos asintóticos en los campos. Dichas herramientas consisten en el uso del sistema de coordenadas más apropiadas y en el Método de Fase Estacionaria aplicado a los campos.

El comportamiento asintótico depende de la geodésica con la cuál nos dirigimos al infinito para un sistema referencial dado. En un espacio-tiempo de Minkowski se puede ir al infinito a través de las siguientes maneras: en una geodésica de tipo tiempo, donde el vector tangente a la curva tiene norma negativa; geodésica nula, vector tangente con norma nula; geodésica espacial, vector tangente con norma positiva. Además en cada uno de los dos primeros casos, infinito temporal y nulo, podemos elegir geodésicas que van al futuro, con  $t > 0$ , o al pasado, con  $t < 0$ .

Comencemos por el Método de Fase Estacionaria que nos permitirá calcular los campos en el límite hacia el infinito.

### 2.3.1. Método de Fase Estacionaria

El Método de Fase Estacionaria (en inglés puede encontrarse como Saddle Point Approximation) es útil para obtener el valor de integrales cuando éstas depende de un parámetro real que se hace tender a infinito. El mismo se basa en el principio de fase estacionaria, que fue introducido por primera vez por [54] y otros como Cauchy, Stokes y Riemann. Uno de los problemas en el que más se utiliza el método es en el cálculo de la integral,

$$I(x) = \int_a^b g(t)e^{ixf(t)} dt \quad (2.72)$$

donde  $a, b$  y la función  $f(t)$  son reales; la variable  $x$  es un parámetro real que se hace infinito.

El principio consiste en suponer que la mayor contribución al valor de la integral se debe a los puntos en que la función fase  $f(t)$  es estacionaria, es decir su derivada se anula.

Pensemos en el siguiente ejemplo: supongamos que  $f(t)$  tiene solo un punto estacionario  $c$  en el intervalo  $(a, b)$  y que  $f''(c)$  es positivo. Luego diríamos, con la suposición del método en juego, lo siguiente:

$$I(x) \sim \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} g(t)e^{ixf(t)} dt \quad (\epsilon > 0) \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} &\sim g(c) \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} \exp \{ix[f(c) + f''(c)(t-c)^2/2]\} dt \\ &\sim g(c)e^{ixf(c)} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \{ixf''(c)(t-c)^2/2\} dt \\ &\sim g(c) \sqrt{\frac{2\pi}{xf''(c)}} \exp \{ixf(c) + i\pi/4\} \end{aligned} \quad (2.74)$$

En el caso en que  $f''(c) < 0$  tenemos un desarrollo similar:

$$I(x) \sim g(c) \sqrt{\frac{2\pi}{-xf''(c)}} \exp \{ixf(c) - i\pi/4\} \quad (2.75)$$

En el libro de [55] se puede encontrar la demostración realizada por [56] de los límites desarrollados en 2.74 y 2.75.

En este trabajo estamos interesados en resolver integrales como 2.72 pero en dimensión más alta, por lo tanto consideremos la siguiente integral,

$$I(\lambda) = \int_D g(x)e^{i\lambda f(x)} dx \quad (2.76)$$

donde  $\lambda$  es el parámetro positivo que se hace tender a infinito y ahora  $x = (x_1, \dots, x_n)$  son puntos de un dominio acotado de  $\mathbb{R}^n$ . El resultado de 2.76 es, ver apéndice B.1 y [55],

$$I(\lambda) \sim g(x_0)|\det(A)|^{-1/2} \exp \left\{ i\lambda f(x_0) + \frac{i\pi\sigma}{4} \right\} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2} \quad (2.77)$$

donde  $x_0$  es un punto estacionario de  $f(x)$  dentro de  $D$ ,  $A$  es la *matriz Hessiana* de  $f$  evaluada en  $x_0$  y  $\sigma$  es la *signatura* de  $A$ . La *signatura* de una matriz es definida como el número de valores propios positivos menos el número de valores propios negativos. Utilizaremos reiteradas veces en este trabajo el resultado en 2.77 para el primer término en el límite.

### 2.3.2. Comportamientos Asintóticos

El objetivo de esta sección es encontrar el comportamiento asintótico de un campo de Klein-Gordon  $\phi$  sobre los diferentes infinitos que se detallaron en 2.2, como en [13]. Para eso debemos conocer cuáles son las coordenadas más apropiadas para trabajar con las distintas geodésicas descritas al inicio de la sección.

Primero necesitaremos escribir el campo  $\phi$  en términos de los operadores de Fock como en 2.15,

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (a(p)e^{ip \cdot x} + a(p)^* e^{-ip \cdot x})$$

Comencemos por analizar el comportamiento en el infinito nulo futuro, por lo que supongamos que el campo  $\phi$  no tiene masa. Las coordenadas más apropiadas para estudiar el infinito nulo futuro son  $(u := t - r, r, \theta, \phi)$ , siendo el espacio parametrizado por coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ . En las mismas se alcanza el infinito nulo  $\mathcal{I}^+$  haciendo que la variable  $r$  tienda a infinito, manteniendo fijas las coordenadas  $(u, \theta, \phi)$ . Así  $\mathcal{I}^+$  es parametrizado por las variables  $(u, \theta, \phi)$ . Tenemos  $p^2 = E^2$  y,

$$p \cdot x = -Et + \vec{p} \cdot \vec{x} = -Et + Er(\hat{p} \cdot \hat{x}) = -Eu + Er(\hat{p} \cdot \hat{x} - 1)$$

Luego podemos escribir el campo  $\phi$  como,

$$\phi(r, u, \hat{x}) = \int_0^{+\infty} \frac{dEE}{2(2\pi)^3} e^{-iEu} \int d^2\hat{p} a(E\hat{p}) e^{iEr(\hat{p} \cdot \hat{x} - 1)} + c.c. \quad (2.78)$$

Podemos usar el método de Fase Estacionaria en 2.77 para calcular el valor de 2.78 en el límite  $r \rightarrow +\infty$ ,

$$\int d^2\hat{p} a(E, \hat{p}) e^{iEr(\hat{p} \cdot \hat{x} - 1)} = a(E\hat{x}) \exp\left\{\frac{-i\pi}{2}\right\} \left(\frac{2\pi}{Er}\right)$$

Obteniendo finalmente,

$$\phi(r, u, \hat{x}) = \frac{1}{r} \int_0^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{a(E, \hat{x})}{4\pi i} e^{-iEu} + c.c. + O(r^{-2}) \quad (2.79)$$

El infinito nulo pasado se parametriza con las coordenadas  $(v := t + r, r, \theta, \phi)$ , y se puede obtener el campo asintótico de forma similar.

Consideremos ahora un campo de Klein-Gordon masivo  $\phi$  y lo escribimos como 2.15. Estudiemos su comportamiento asintótico en el infinito temporal futuro; donde las coordenadas más apropiadas serían  $\tau = \sqrt{t^2 - r^2}$  y  $\rho = r/\sqrt{t^2 - r^2}$  para la región  $t > 0$  y  $r < t$ . Nos acercamos al infinito haciendo que la variable  $\tau$  sea muy grande y tenemos,

$$p.x = \tau(-\sqrt{1 + \rho^2} E_p + \rho \hat{x} \cdot \vec{p}) \quad (2.80)$$

Podemos definir una función  $f(\vec{p})$  de forma que  $p.x = \tau f(\vec{p})$ , siendo el cero en el gradiente de la misma en el punto  $\vec{p} = m\rho\hat{x}$ . Usando 2.77:

$$\phi(\tau, \rho, \hat{x}) = \frac{e^{-i3\pi/4} \sqrt{m}}{2(2\pi\tau)^{3/2}} (b(m\rho\hat{x})e^{-i\tau m} - ib^*(m\rho\hat{x})e^{i\tau m}) + O(\tau^{-5/2}) \quad (2.81)$$

### 3. Interpretación Factorización Infrarroja como Identidad de Ward con cargas conservadas

En esta sección veremos la Factorización Infrarroja como una Identidad de Ward. Para eso introduciremos dos nuevos operadores, el cual llamaremos cargas, que será desarrollado en términos de operadores de Fock de los campos.

Supongamos ahora que podemos escribir la Factorización Infrarroja en la ecuación 2.54 a través de dos operadores  $Q^+$  y  $Q^-$  de la siguiente forma:

$$\langle out | Q^+[\hat{q}]S - SQ^-[\hat{q}] | in \rangle = 0 \quad (3.1)$$

siendo  $S$  el operador evolución y,

$$\begin{cases} |in\rangle = |k_1, \dots, k_m\rangle \\ |out\rangle = |k_{m+1}, \dots, k_n\rangle \\ \langle out | S | in \rangle = \delta^4(\sum k_j) A_n(k_1, \dots, k_n) \end{cases} \quad (3.2)$$

La forma de la ecuación 3.1 es igual a la expresión de las Identidades de Ward, ver [6], y denominamos a los operadores  $Q^\pm$  como cargas. La diferencia entre ambas cargas reside en que  $Q^+$  es un operador que actúa sobre los campos libres en el futuro, mientras que  $Q^-$  actúa sobre campos libres en el pasado.

Vemos ahora cómo son estas cargas para que 3.1 se escriba como 3.2.

Para ello multiplicamos a la ecuación 2.53 por  $\delta^4(\sum k + q)$  antes de hacer el límite  $w \rightarrow +\infty$  y luego aproximamos la delta en el lado derecho a primer orden en  $q$ ,  $\delta^4(\sum k)$ . Haciendo esto tenemos, escribiendo explícitamente la convención de signos para partículas entrantes y salientes,

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow 0} w \delta^4\left(\sum_j k_j + q\right) A_{n+1}(\dots, k_j, \dots, q) + \sum_j^{\text{entrantes}} \frac{g}{2k_j \cdot (1, \hat{q})} \delta^4\left(\sum_j k_j\right) A_n(\dots, k_j, \dots) \\ - \sum_j^{\text{salientes}} \frac{g}{2k_j \cdot (1, \hat{q})} \delta^4\left(\sum_j k_j\right) A_n(\dots, k_j, \dots) = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Que podemos escribir como:

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow 0} w \langle out, q | S | in \rangle + \sum_j^{\text{entrantes}} \frac{g}{2k_j \cdot (1, \hat{q})} \langle out | S | in \rangle \\ - \sum_j^{\text{salientes}} \frac{g}{2k_j \cdot (1, \hat{q})} \langle out | S | in \rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Además, de acuerdo a la observación hecha en la figura 6, tenemos el siguiente resultado en el límite de bajas energías:

$$\lim_{w \rightarrow 0} \langle out, q | S | in \rangle = - \lim_{w \rightarrow 0} \langle out | S | in, q \rangle$$

Por lo tanto el primer término de la izquierda en la ecuación 3.4 puede ser escrito como un promedio:

$$\begin{aligned} & \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w}{2} (\langle out, q | S | in \rangle - \langle out | S | in, q \rangle) + \\ & \sum_j^{entrantes} \frac{g}{2k_j \cdot (1, \hat{q})} \langle out | S | in \rangle - \sum_j^{salientes} \frac{g}{2k_j \cdot (1, \hat{q})} \langle out | S | in \rangle = 0 \end{aligned}$$

En la ecuación 3.1 los campos  $|in\rangle$  y  $\langle out|$  son libres, por lo tanto se los puede escribir en términos de operadores de Fock: <sup>7</sup>

$$\phi = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (b_p^* e^{ipx} + b_p e^{-ipx}) \quad (3.5)$$

$$\chi = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (a_p^* e^{ipx} + a_p e^{-ipx}) \quad (3.6)$$

Por lo otro lado para cualquier estado  $|\varphi\rangle = |k_1, \dots, k_l\rangle = b_{k_1}^*, \dots, b_{k_l}^* |0\rangle$  tenemos la siguiente relación ,

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{f(\vec{p})}{2E_p} (b_p^* b_p) |\varphi\rangle = \sum_j f(\vec{k}_j) |\varphi\rangle$$

Luego se pueden escribir los dos últimos términos de la izquierda de 3.4 como,

$$\langle out | - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \frac{g}{2p \cdot (1, \hat{q})} (b_p^* b_p) S + S \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \frac{g}{2p \cdot (1, \hat{q})} (b_p^* b_p) | in \rangle$$

Y el primer término se lo puede escribir usando los operadores de creación y aniquilación para los fotones.

$$\langle out | \frac{w}{2} (a_{w\hat{q}}^* + a_{w\hat{q}}) S - S \frac{w}{2} (a_{w\hat{q}}^* + a_{w\hat{q}}) | in \rangle$$

Donde hemos usado que al aplicar el operador de aniquilación a un estado sin fotones tenemos cero,  $a_p |\varphi\rangle = 0$ . Finalmente  $Q^+$  y  $Q^-$  se escriben, de la misma forma, como

<sup>7</sup>Escribir  $2E_p$  en lugar de  $\sqrt{2E_p}$  se debe a imponer  $[b_p, b_q^*] = (2\pi)^3 \delta^3(p - q) 2E_p$ , lo que lleva a que la constante de normalización sea 1, ver [5].

$$Q^\pm[\hat{q}] = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w}{2} (a_{w\hat{q}}^* + a_{w\hat{q}}) - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \frac{g}{2p \cdot (1, \hat{q})} (b_p^* b_p) \quad (3.7)$$

Siendo la diferencia entre ambas cargas radicada en que los operadores de Fock actuarían sobre estados asintóticos distintos.

Luego definimos  $Q_{soft}[\hat{q}]$  y  $Q_{hard}[\hat{q}]$  como los términos lineales y cuadráticos en los operadores  $Q^\pm$ ,

$$Q_{soft}^\pm[\hat{q}] = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w}{2} (a_{w\hat{q}}^* + a_{w\hat{q}}) \quad (3.8)$$

$$Q_{hard}^\pm[\hat{q}] = - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \frac{g}{2p \cdot (1, \hat{q})} (b_p^* b_p) \quad (3.9)$$

Es importante observar que si no se consideran diferentes las cargas  $Q^\pm$  desde un inicio, tendríamos como resultado:

$$\langle out | [Q[\hat{q}], S] | in \rangle = 0 \quad (3.10)$$

Es decir la carga  $Q = Q^\pm$  conmuta con el hamiltoniano, de la forma de 3.10. Esto nos podría adelantar que el operador  $Q$  se conserva en el tiempo, y de ahí el llamarle carga.

En las secciones siguientes queremos estudiar la interpretación de las cargas  $Q^\pm[\hat{q}]$  escribiéndolas en términos de los campos asintóticos en el futuro y pasado. Por lo tanto buscamos expresar los operadores de Fock en función del campo  $\phi$  en el infinito temporal y  $\chi$  en el infinito nulo.

### 3.1. Interpretación de $Q^+$

Con el objetivo de analizar  $Q^+[\hat{q}]$  escribiremos primero  $Q_{soft}^+[\hat{q}]$  en términos del campo asintótico  $\chi$ . Tenemos que en el infinito nulo futuro  $\chi$  tiene el siguiente fall-off, obtenido en la ecuación 2.79,

$$\chi(r, u, \hat{x}) = \frac{\chi_{\mathcal{I}^+}(u, \hat{x})}{r} + \dots; \quad \chi_{\mathcal{I}^+} = \int_0^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \left( \frac{a_{E\hat{x}}}{4\pi i} e^{-iEu} - \frac{a_{E\hat{x}}^*}{4\pi i} e^{iEu} \right) \quad (3.11)$$

donde  $r, u, \hat{x}$  son las coordenadas que describen el infinito nulo futuro.

Vamos a escribir los operadores  $a_{E\hat{x}}$  y  $a_{E\hat{x}}^*$  en términos de  $\chi_{\mathcal{I}^+}$ . Primero se puede escribir el campo  $\chi_{\mathcal{I}^+}$ , que llamaremos *datos libres*, sólo en términos de uno de los operadores,

$$\chi_{\mathcal{I}^+} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{a_{E\hat{x}}^*}{4\pi i} e^{iEu} \quad (3.12)$$

$$= + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{a_{E\hat{x}}}{4\pi i} e^{-iEu}. \quad (3.13)$$

Si hacemos la transformada de Fourier de la ecuación 3.12,

$$\int du e^{-iuw} \chi_{\mathcal{I}^+}(u, \hat{x}) = - \frac{a_{w\hat{x}}^*}{4\pi i} \quad (3.14)$$

Multiplicando por  $w$ ,

$$-w \frac{a_{w\hat{x}}^*}{4\pi i} = \int du (we^{-iuw}) \chi_{\mathcal{I}^+} = \int du (i\partial_u e^{-iuw}) \chi_{\mathcal{I}^+} \quad (3.15)$$

$$= -i \int du e^{-iuw} \partial_u \chi_{\mathcal{I}^+} \quad (3.16)$$

$$\stackrel{w \rightarrow 0}{=} -i \int du \partial_u \chi_{\mathcal{I}^+}. \quad (3.17)$$

donde  $\stackrel{w \rightarrow 0}{=}$  significa el límite  $w \rightarrow 0$ . De este modo hemos escrito el operador  $a_{\vec{p}}^*$  en función de campo en el infinito nulo  $\chi_{\mathcal{I}^+}$ ; y podemos hacer lo mismo para el operador  $a_{\vec{p}}$ , empezando por la transformada de Fourier de la ecuación 3.13

$$\int du e^{iuw} \chi_{\mathcal{I}^+}(u, \hat{x}) = + \frac{a_{w\hat{x}}}{4\pi i}$$



$$w \frac{a_{w\hat{x}}}{4\pi i} = \int du (-i\partial_u e^{iuw}) \chi_{\mathcal{I}^+} = i \int du e^{iuw} \partial_u \chi_{\mathcal{I}^+} \quad (3.18)$$

$$\stackrel{w=0}{=} i \int du \partial_u \chi_{\mathcal{I}^+}. \quad (3.19)$$

Ahora escribiremos  $Q_{hard}^+[\hat{q}]$  en función del campo asintótico  $\phi$ . El infinito temporal futuro es descrito por las coordenadas, en la región  $r < |t|, t > 0, \tau = \sqrt{t^2 - r^2}$  y  $\rho = r/\sqrt{t^2 - r^2}$ . En el límite  $\tau \rightarrow +\infty$  el campo  $\phi$  se escribe como en 2.81,

$$\phi(\tau, \rho, \hat{x}) = \frac{e^{-i3\pi/4} \sqrt{m}}{2(2\pi\tau)^{3/2}} (b(m\rho\hat{x})e^{-i\tau m} - ib^*(m\rho\hat{x})e^{i\tau m}) + O(\tau^{-5/2}) \quad (3.20)$$

$$\phi^2 = \phi^* \cdot \phi = \left( \frac{m}{4(2\pi\tau)^3} \right) [-ib^2 e^{-i2\tau m} + ib^{*2} e^{i2\tau m} + bb^* + b^*b] \quad (3.21)$$

$$N[\phi^2] = \frac{m}{4(2\pi\tau)^3} [-ib^2 e^{-i2\tau m} + ib^{*2} e^{i2\tau m} + 2b^*b]$$

donde  $N$  es el operador *normal-order*. Luego,

$$b^*b = \frac{2(2\pi\tau)^3}{m} N[\phi^2] - \frac{1}{2} [-ib^2 e^{-i2\tau m} + ib^{*2} e^{i2\tau m}] \quad (3.22)$$

Podemos reescribir el segundo término de la derecha de 3.7 haciendo el cambio de variable  $\vec{p} = m\rho\hat{x}$ ,

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \frac{g}{2p \cdot (1, \hat{q})} (b_p^* b_p) = \int \frac{m^3 \rho^2 d\rho d\Omega}{2(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{m\rho}} \frac{g}{m(\sqrt{1 + \rho^2}, \rho\hat{x}) \cdot (1, \hat{q})} (b_p^* b_p) \quad (3.23)$$

Usando 3.22 y quedándonos solo con el término en  $N[\phi^2]$ ,

$$= m\tau^3 g \int \frac{\rho^2 d\rho d\Omega}{(\sqrt{1 + \rho^2}, \rho\hat{x}) \cdot (1, \hat{q})} \frac{1}{2E_{m\rho}} N[\phi^2(\tau, \rho, \hat{x})] + \dots$$

Finalmente podemos escribir  $Q^+[\hat{q}]$  como la integral en el campo no masivo en el infinito nulo más la integral del campo masivo en el infinito temporal,

$$Q^+[\hat{q}] = \lim_{w \rightarrow 0} -4\pi \int du \partial_u \chi_{\mathcal{I}^+} - m\tau^3 g \int \frac{\rho^2 d\rho d\Omega}{(\sqrt{1 + \rho^2}, \rho\hat{x}) \cdot (1, \hat{q})} \frac{1}{2E_{m\rho}} N[\phi^2(\tau, \rho, \hat{x})] + \dots \quad (3.24)$$

Podemos ir más allá escribiendo la carga  $Q^+[\hat{q}]$  sólo en términos de los *datos libres* en el infinito nulo. Estudiamos ahora cómo es  $\chi$  en el infinito temporal en función de  $\phi^2$ . A partir de la derivada funcional del Lagrangiano, ecuación 2.38, tenemos la ecuación de movimiento,

$$\frac{\delta \int L}{\delta \chi(y)} = \frac{\delta}{\delta \chi(y)} \left( \int d^4x \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial^\mu \chi) (\partial^\nu \chi) - g \chi \phi^2 \right) = 0$$

$$\int d^4x \eta_{\mu\nu} \partial^\mu \chi \partial^\nu \delta^4(x-y) - g \delta^4(x-y) \phi^2 = -\eta_{\mu\nu} \partial^\nu \partial^\mu \chi(y) - g \phi^2(y)$$

$$\square \chi(y) = -g \phi^2(y) \quad (3.25)$$

Habíamos obtenido en el infinito temporal futuro ( $\tau \rightarrow +\infty$ ) la forma de  $\phi^2$ , ecuación 3.21, como:

$$\phi^2 = \frac{\phi_{\mathcal{H}^+}}{\tau^3} + \dots$$

Por lo tanto esperamos que  $\chi$  tenga la forma,

$$\chi = \frac{\chi_{\mathcal{H}^+}}{\tau} + \dots \quad (3.26)$$

Entonces buscaremos cómo es el operador D'Alembertiano  $\square$  en el infinito temporal futuro. En términos de las coordenadas del infinito temporal futuro  $(\tau, \rho, \hat{x})$  la métrica de Minkowski se escribe,

$$ds^2 = -d\tau^2 + \tau^2 d\sigma^2 = -d\tau^2 + \tau^2 \left( \frac{d\rho^2}{1+\rho^2} + \rho^2 q_{AB} dx^A dx^B \right)$$

donde  $q_{AB}$  es la métrica de la esfera unitaria y escribiremos  $d\sigma^2 = h_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$  en términos de una métrica en un hiperboloide unitario de tipo espacio  $\mathcal{H}^+$  y tenemos,

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tau^2}{1+\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho^2 \tau^2 \text{sen}^2(x_A) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \square = \eta^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu = -\nabla_\tau \nabla_\tau + \tau^{-2} h^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta$$

Calculamos entonces los símbolos de Christoffel con la variable  $\tau$ ,

$$\Gamma_{\tau\tau}^\tau = 0; \quad \Gamma_{\tau\alpha}^\tau = 0; \quad \Gamma_{\tau\beta}^\alpha = \tau^{-1} \delta_\beta^\alpha; \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\tau = \tau h_{\alpha\beta}$$

Como  $\chi$  es un campo escalar se cumple:  $\nabla_\alpha \chi = \partial_\alpha \chi$ . Para  $\alpha \neq \tau$  y  $\beta \neq \tau$ :

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta \chi = \frac{\partial^2 \chi}{\partial^\alpha \partial^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\epsilon \left( \frac{\partial \chi}{\partial^\epsilon} \right) = D_\alpha D_\beta \chi - \Gamma_{\alpha\beta}^\tau \left( \frac{\partial \chi}{\partial \tau} \right)$$

donde  $D_\alpha$  es el operador  $\nabla_\alpha$  en la métrica en  $\mathcal{H}^+$

$$\square \chi = -\partial_\tau^2 \chi - 3\tau^{-1} \partial_\tau \chi + \tau^{-2} h^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \chi$$

Suponiendo  $\chi$  de la forma dada en la ecuación 3.26, tenemos que  $\chi_{\mathcal{H}^+}$  satisface,

$$(D^2 + 1)\chi_{\mathcal{H}^+} = -g\phi_{\mathcal{H}^+}$$

siendo  $D^2$  el D'Alembertiano en  $\mathcal{H}^+$ . Para encontrar  $\chi_{\mathcal{H}^+}$  necesitamos hallar la función de Green que satisface ( $\vec{y} = (\rho, \hat{x})$ ):

$$(D_y^2 + 1)G(y, y') = \delta^3(\vec{y} - \vec{y}') \quad (3.27)$$

En principio la función  $G(y, y')$  depende de 6 variables independientes, pero debido a las simetrías que posee  $\delta^3$  éstas se reducen. Las simetrías que respeta  $\delta^3$  son las de  $\mathbb{R}^3$ . Entonces para una función que depende de dos puntos en el espacio ( $\vec{y}, \vec{y}'$ ) tenemos tres simetrías de traslación y dos de rotación, lo que lleva a sólo una variable independiente para  $G$ . Por lo tanto podemos pedir que  $G$  dependa sólo de la distancia entre  $\vec{y}$  y  $\vec{y}'$ .

Se puede definir un nuevo espacio de 4 dimensiones donde los vectores  $\vec{y} = \rho \hat{x}$  y  $\vec{y}' = \rho' \hat{x}'$  se encuentran sobre un hiperboloide. Definimos la distancia en este espacio con la métrica de Minkowski y definimos la transformación de un espacio a otro para que la métrica inducida en el hiperboloide sea la misma que tenemos en  $\mathcal{H}^+$ . Así la transformación es:

$$Y^\mu = (\sqrt{1 + \rho^2}, \rho \hat{x}) \quad ; \quad Y.Y' = -\sqrt{(1 + \rho^2)(1 + \rho'^2)} + \rho \rho' \hat{x} \cdot \hat{x}'$$

Así los puntos de  $\mathcal{H}^+$  forman un hiperboloide como se lo puede ver por la norma,

$$Y.Y = -(1 + \rho^2) + \rho^2 \hat{x} \cdot \hat{x} = -1$$

Por lo expresado anteriormente podemos asumir, para ciertas funciones  $\tilde{G}$  y  $\tilde{f}$ , lo siguiente:

$$G(y, y') = \tilde{G}(Y, Y') = \tilde{f}(Y.Y')$$

Para simplificar fijamos  $\rho' = 0$ , luego  $Y.Y' = -\sqrt{1 + \rho^2}$  y tenemos que  $G(y, y') = f(\rho)$ , es decir la función de Green  $G$  es alguna función  $f$  de  $\rho$ . Calculamos ahora  $D^2 f$  sabiendo que  $f$  sólo depende de  $\rho$ ,

$$D^2 f = h^{\rho\rho} (\partial_\rho^2 f - \Gamma_{\rho\rho}^\rho (\partial_\rho f)) - h^{AA} \Gamma_{AA}^\rho (\partial_\rho f) - h^{BB} \Gamma_{BB}^\rho (\partial_\rho f)$$

Calculamos los símbolos de Christoffel necesarios:

$$\Gamma_{\rho\rho}^\rho = -\frac{\rho}{1+\rho^2} \quad \Gamma_{AA}^\rho = -\rho(1+\rho^2) \quad \Gamma_{BB}^\rho = -\rho(1+\rho^2)\text{sen}^2(x_A)$$

$$D^2 f = (1+\rho^2) \left( \partial_\rho^2 f + \frac{\rho}{(1+\rho^2)} (\partial_\rho f) \right) + \frac{1}{\rho^2} (\rho(1+\rho^2) \partial_\rho f) \\ + \frac{1}{\rho^2 \text{sen}^2(x_A)} (\rho(1+\rho^2) \text{sen}^2(x_A) (\partial_\rho f))$$

$$D^2 f = (1+\rho^2) \partial_\rho^2 f + \left( \rho + 2 \frac{(1+\rho^2)}{\rho} \right) (\partial_\rho f)$$

$$(D^2 + 1)f(\rho) = (1+\rho^2)f'' + \left( 3\rho - \frac{2}{\rho} \right) f' + f = \delta(\rho)$$

Por lo tanto buscamos soluciones a la ecuación

$$(1+\rho^2)f'' + \left( 3\rho - \frac{2}{\rho} \right) f' + f = 0$$

Las soluciones a la ecuación diferencial son de la forma,

$$f(\rho) = \frac{C_1}{\rho} + \frac{C_2 \text{Arcsenh}(\rho)}{\rho}$$

Podemos pedir dos condiciones sobre la función  $f$ : en el límite  $\rho \rightarrow +\infty$  satisfaga la ecuación diferencial y satisfaga la ecuación con la delta  $\delta(\rho)$ . Luego estas condiciones se traducen a,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} f = -\frac{1}{4\pi\rho} \quad ; \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} f = \frac{1}{\rho} \quad (3.28)$$

finalmente tendríamos que la solución para  $G$  es ( $\rho = \sqrt{(Y.Y')^2 - 1}$ ),

$$G(y, y') = \frac{-1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(Y.Y')^2 - 1}} \quad (3.29)$$

Usando las ecuaciones 3.25 y 3.27 podemos escribir  $\chi_{\mathcal{H}^+}$  como,

$$\chi_{\mathcal{H}^+}(y) = - \int_{\mathcal{H}^+} G(y, y') g \phi_{\mathcal{H}^+}(y') d^3 V'$$

El elemento de volumen es  $d^3 V = \sqrt{\det(h)} dy^1 dy^2 dy^3$ , donde el vector  $\vec{y}$  está escrito en esféricas como  $\vec{y} = \rho \hat{x}$ .

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \text{sen}^2(x_A) \end{pmatrix} \rightarrow \det(h) = \frac{\rho^4 \text{sen}^2(x_A)}{1+\rho^2}$$

$$d^3V = \frac{\rho^2 \text{sen}(x_A)}{\sqrt{1+\rho^2}} d\rho dx_A dx_B = \frac{\rho^2 d\rho d\Omega}{\sqrt{1+\rho^2}}$$

Aplicando el operador *orden-normal*  $N$  en ambos lados,

$$\chi_{\mathcal{H}^+}(y) = \int_{\mathcal{H}^+} \frac{g}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(Y \cdot Y')^2 - 1}} \left( \frac{m}{2(2\pi)^3} \right) b^* b d^3V'$$

Si ahora multiplicamos por  $\rho$  y hacemos el límite  $\rho \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \rho \chi_{\mathcal{H}^+} = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{g}{4\pi} \left( \frac{m}{2(2\pi)^3} \right) \int_{\mathcal{H}^+} \frac{\rho b^* b}{\sqrt{(Y \cdot Y')^2 - 1}} \frac{\rho'^2 d\rho' d\Omega}{\sqrt{1+\rho'^2}}$$

Expandiendo a primer orden el denominador,

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \rho \chi_{\mathcal{H}^+} = \frac{g}{4\pi} \left( \frac{m}{2(2\pi)^3} \right) \int_{\mathcal{H}^+} \frac{b^* b}{\left( -\sqrt{(1+\rho'^2)} + \rho' \hat{x} \hat{x}' \right)} \frac{\rho'^2 d\rho' d\Omega}{\sqrt{1+\rho'^2}} \quad (3.30)$$

Por continuidad suponemos, ver apéndice B.6:

$$\chi_{\mathcal{I}^+}(u \rightarrow +\infty, \hat{x}) = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \rho \chi_{\mathcal{H}^+}(\rho, \hat{x}) \quad (3.31)$$

Además tendríamos,

$$\begin{aligned} p \cdot (1, \hat{q}) &= -E_p + \vec{p} \cdot \hat{q} = -\sqrt{m^2 + \vec{p}^2} + \vec{p} \cdot \hat{q} \\ &= -m\sqrt{1+\rho^2} + m\rho \hat{x} \cdot \hat{q} \end{aligned}$$

Luego se observa que la ecuación 3.30 es similar a la ecuación 3.23, usando que  $E_{m\rho} = m\sqrt{1+\rho^2}$ ,

$$\chi_{\mathcal{I}^+}(u \rightarrow +\infty, \hat{q}) = \frac{g}{4\pi} \int_{\mathcal{H}^+} \frac{m^3 \rho'^2 d\rho' d\Omega}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{m\rho}} \frac{b^* b}{m(\sqrt{1+\rho^2}, \rho \hat{x}) \cdot (1, \hat{q})}$$

Entonces usando 3.24 obtenemos,

$$Q^+[q] = \lim_{w \rightarrow 0} -4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} du \partial_u \chi_{\mathcal{I}^+} + 4\pi \chi_{\mathcal{I}^+}(u \rightarrow +\infty, \hat{q})$$

Finalmente la carga  $Q^+[\hat{q}]$  queda expresada solo en términos de los datos libres en el infinito nulo,

$$Q^+[\hat{q}] = 4\pi\chi_{\mathcal{I}^+}(u \rightarrow -\infty, \hat{q}) \quad (3.32)$$

### 3.2. Interpretación de $Q^-$

Pasamos ahora a escribir la carga  $Q^-$  en función de los campos en los infinitos nulo y temporal pasados.

El infinito temporal pasado (región  $r < |t|, t < 0$ ), está descrito por las mismas coordenadas que en el futuro:  $\tau = \sqrt{t^2 - r^2}$  y  $\rho = r/\sqrt{t^2 - r^2}$ ; con la salvedad que la coordenada tiempo es  $t = -\tau\sqrt{1 + \rho^2}$ . Por lo que en el límite  $\tau \rightarrow +\infty$  tenemos,

$$\phi(\tau, \rho, \hat{x}) = \frac{e^{-i3\pi/4}\sqrt{m}}{2(2\pi\tau)^{3/2}} (-ib(-m\rho\hat{x})e^{i\tau m} + b^*(-m\rho\hat{x})e^{-i\tau m}) \quad (3.33)$$

$$N[\phi^2] = \frac{m}{4(2\pi\tau)^3} (2b^*b) + \dots$$

Luego,

$$b^*b = \frac{2(2\pi\tau)^3}{m} N[\phi^2]$$

Tenemos en el infinito nulo pasado que  $\chi$  se escribe como,

$$\chi(r, v, \hat{x}) = \frac{\chi_{\mathcal{I}^-}(v, \hat{x})}{r} + \dots; \quad \chi_{\mathcal{I}^-} = \int_0^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \left( \frac{a_{E-\hat{x}}^*}{4\pi i} e^{iEv} - \frac{a_{E-\hat{x}}}{4\pi i} e^{-iEv} \right) \quad (3.34)$$

donde  $r, v, \hat{x}$  son las coordenadas que describen el infinito nulo pasado y  $v = t + r$  es el llamado tiempo avanzado. Ahora debemos escribir los operadores de Fock en términos de  $\chi_{\mathcal{I}^-}$ . Análogamente al infinito nulo futuro podemos escribir,

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{I}^-} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{a_{E-\hat{x}}^*}{4\pi i} e^{iEv} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{dE}{2\pi} \frac{a_{E-\hat{x}}}{4\pi i} e^{-iEv}. \end{aligned}$$

Si hacemos la transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \int dv e^{-ivw} \chi_{\mathcal{I}^-}(v, \hat{x}) &= \frac{a_{w-\hat{x}}^*}{4\pi i} \rightarrow w \frac{a_{w-\hat{x}}^*}{4\pi i} \stackrel{w=0}{=} -i \int dv \partial_v \chi_{\mathcal{I}^-} \\ \int dv e^{ivw} \chi_{\mathcal{I}^-}(v, \hat{x}) &= -\frac{a_{w-\hat{x}}}{4\pi i} \rightarrow w \frac{a_{w-\hat{x}}}{4\pi i} \stackrel{w=0}{=} -i \int dv \partial_v \chi_{\mathcal{I}^-} \end{aligned}$$

Análogamente podemos escribir la carga  $Q^-[\hat{q}]$  como una integral del campo  $\partial_v \chi_{\mathcal{I}^-}$  en el infinito nulo pasado más una integral de  $\phi^2$  en el infinito temporal pasado:

$$Q^-[\hat{q}] = \lim_{w \rightarrow 0} 4\pi \int dv \partial_v \chi_{\mathcal{I}^-}(v, -\hat{q}) - m\tau^3 g \int \frac{\rho^2 d\rho d\Omega}{(\sqrt{1+\rho^2}, \rho \hat{x}) \cdot (1, \hat{q})} \frac{1}{2E_{m\rho}} N[\phi^2(\tau, \rho, -\hat{x})] \quad (3.35)$$

Por último queremos escribir  $Q^-[\hat{q}]$  en función de los datos libres en el infinito pasado. Estudiamos el campo  $\chi$  en el infinito temporal pasado usando  $\square\chi = g\phi^2$ . Suponemos:

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \chi \sim \frac{\chi_{\mathcal{H}^-}}{\tau}; \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \phi^2 \sim \frac{\rho}{\tau^3}$$

Como las coordenadas son las mismas que en el infinito temporal futuro tenemos las mismas ecuaciones diferenciales y solución:

$$(D^2 + 1)\chi_{\mathcal{H}^-} = g\rho$$

$$\chi_{\mathcal{H}^-}(y) = \int_{\mathcal{H}^-} \frac{-g}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(Y \cdot Y')^2 - 1}} \left( \frac{m}{2(2\pi)^3} \right) b^* b d^3 \vec{y}'$$

Si multiplicamos por  $\rho$  y hacemos el límite  $\rho \rightarrow +\infty$  tenemos,

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \rho \chi_{\mathcal{H}^-} = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{-g}{4\pi} \left( \frac{m}{2(2\pi)^3} \right) \int_{\mathcal{H}^-} \frac{\rho b^* b}{\sqrt{(Y \cdot Y')^2 - 1}} \frac{\rho^2 d\rho' d\Omega}{\sqrt{1+\rho'^2}}$$

Expandiendo a primer orden el denominador,

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \rho \chi_{\mathcal{H}^-} = \frac{-g}{4\pi} \left( \frac{m}{2(2\pi)^3} \right) \int_{\mathcal{H}^-} \frac{b^*(-m\rho' \hat{x}') b(-m\rho' \hat{x}')}{\left( -\sqrt{(1+\rho'^2)} + \rho' \hat{x} \hat{x}' \right)} \frac{\rho'^2 d\rho' d\Omega}{\sqrt{1+\rho'^2}} \quad (3.36)$$

Por continuidad suponemos, ver apéndice B.6:

$$\chi_{\mathcal{I}^-}(v \rightarrow -\infty, \hat{x}) = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \rho \chi_{\mathcal{H}^-}(\rho, \hat{x}) \quad (3.37)$$

Entonces

$$\chi_{\mathcal{I}^-}(v \rightarrow -\infty, \hat{x}) = \frac{-g}{4\pi} \left( \frac{m}{2(2\pi)^3} \right) \int_{\mathcal{H}^-} \frac{b^*(-m\rho' \hat{x}') b(-m\rho' \hat{x}')}{\left( -\sqrt{(1+\rho'^2)} + \rho' \hat{x} \hat{x}' \right)} \frac{\rho'^2 d\rho' d\Omega}{\sqrt{1+\rho'^2}} \quad (3.38)$$

Si hacemos una traslación en la esfera de la forma  $\theta' \rightarrow \pi - \theta'$  y  $\varphi' \rightarrow \pi + \varphi'$  tenemos el cambio  $\hat{x}' \rightarrow -\hat{x}'$ :



$$\chi_{\mathcal{I}^-}(v \rightarrow -\infty, -\hat{x}) = \frac{-g}{4\pi} \left( \frac{m}{2(2\pi)^3} \right) \int_{\mathcal{H}^-} \frac{b^*(m\rho'\hat{x}')b(m\rho'\hat{x}')}{\left(-\sqrt{(1+\rho'^2)} + \rho'\hat{x}'\hat{x}'\right)} \frac{\rho'^2 d\rho' d\Omega}{\sqrt{1+\rho'^2}} \quad (3.39)$$

Finalmente, usando 3.35 logramos escribir el operador  $Q^-$  en términos de los datos libres en el infinito pasado:

$$Q^-[\hat{q}] = \lim_{w \rightarrow 0} 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dv \partial_v \chi_{\mathcal{I}^-}(v, -\hat{q}) + 4\pi \chi_{\mathcal{I}^-}(v \rightarrow -\infty, -\hat{q})$$

$$\boxed{Q^-[\hat{q}] = 4\pi \chi_{\mathcal{I}^-}(v \rightarrow +\infty, -\hat{q})} \quad (3.40)$$

## 4. Demostración $Q^+ = Q^-$

En la sección anterior logramos obtener los operadores de carga  $Q^{+/-}$  como el campo asintótico  $\chi$  en los infinitos nulos futuro/pasado tendiendo al infinito espacial (ver diagrama de Penrose - figura 8). Entonces nos preguntamos si ambos operadores son iguales,  $Q^+ = Q^-$ , en el *infinito espacial*, basándonos en la continuidad del operador  $\chi$  allí. Así nos encargamos en esta sección de responder a la pregunta si la carga  $Q$  se conserva.

Necesitamos estudiar entonces cómo se comporta el campo  $\chi$  en el infinito espacial. Para eso podemos empezar por la ecuación de movimiento:  $\square\chi = g\phi^2/2$ ; donde ahora  $\phi$  tiende a cero por ser un campo masivo. Las coordenadas apropiadas para el infinito espacial, cuya región en Minkowski sería  $r > |t|$ , son:  $\rho = \sqrt{r^2 - t^2}$  y  $\tau = t/\sqrt{r^2 - t^2}$ . Siendo la métrica descrita como,

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\sigma^2 = d\rho^2 + \rho^2 \left( \frac{-d\tau^2}{1 + \tau^2} + (1 + \tau^2) q_{AB} dx^A dx^B \right)$$

donde  $d\sigma^2 = h_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$  es la métrica del espacio, que llamaremos  $\mathcal{H}^0$ , parametrizado por las variables  $\tau$  y  $x^{A,B}$ . Dicha métrica es llamada métrica de *De Sitter* tridimensional.

Para trabajar con la ecuación de movimiento necesitamos encontrar el D'Alembertiano  $\square = \eta^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$  en estas nuevas coordenadas:

$$\square = + \nabla_\rho \nabla_\rho + \rho^{-2} h^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta$$

Calculamos entonces los símbolos de Christoffel con  $\rho$ ,

$$\Gamma_{\rho\rho}^\rho = 0; \quad \Gamma_{\rho\rho}^\alpha = 0; \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\rho = -\rho h_{\alpha\beta}$$

Como  $\chi$  es un campo escalar tenemos  $\nabla_\alpha \chi = \partial_\alpha \chi$ . Para  $\alpha \neq \tau$  y  $\beta \neq \tau$ ,

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta \chi = \partial_\alpha \partial_\beta \chi - \Gamma_{\alpha\beta}^\epsilon \partial_\epsilon \chi = D_\alpha D_\beta \chi - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \partial_\rho \chi$$

donde  $D_\alpha$  es el operador  $\nabla_\alpha$  en la métrica en  $\mathcal{H}^0$

$$\square\chi = \partial_\rho^2 \chi + 3\rho^{-1} \partial_\rho \chi + \rho^{-2} h^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \chi$$

Si ahora suponemos que  $\chi$  tiene la forma (en el límite  $\rho \rightarrow +\infty$ ):

$$\chi = \frac{\chi_{\mathcal{H}^0}(\tau, \hat{x})}{\rho}$$

para alguna función  $\chi_{\mathcal{H}^0}(\tau, \hat{x})$ , luego ésta satisface,

$$\boxed{(D^2 - 1)\chi_{\mathcal{H}^0} = 0} \quad (4.1)$$

siendo  $D^2$  el D'Alembertiano en  $\mathcal{H}^0$ . Tomamos ahora un pequeño desvío para analizar como es la condición en el límite  $\tau \rightarrow +\infty$ , es decir en el futuro, del campo  $\chi_{\mathcal{H}^0}$ , análogamente al caso en 3.28. Para esto vemos cómo es la ecuación diferencial en dicho límite. Calculando  $D^2$ ,

$$D^2 = h^{\tau\tau} (\partial_\tau^2 - \Gamma_{\tau\tau}^\epsilon(\partial_\epsilon)) + h^{AA} (\partial_A^2 - \Gamma_{AA}^\epsilon(\partial_\epsilon)) + h^{BB} (\partial_B^2 - \Gamma_{BB}^\epsilon(\partial_\epsilon))$$

Luego de calcular los símbolos de Christoffel encontramos,

$$\begin{aligned} D^2 &= -(1 + \tau^2) \left( \partial_\tau^2 + \frac{\tau}{1 + \tau^2} (\partial_\tau) \right) + \frac{1}{1 + \tau^2} (\partial_A^2 - \tau(1 + \tau^2)(\partial_\tau)) \\ &+ \frac{1}{(1 + \tau^2)\text{sen}^2(x_A)} (\partial_B^2 - \tau(1 + \tau^2)\text{sen}^2(x_A)(\partial_\tau) + \text{sen}(x_A)\cos(x_A)(\partial_A)) \end{aligned}$$

Luego tendríamos

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} (D^2 - 1)\chi_{\mathcal{H}^0} = (-(1 + \tau^2)\partial_\tau^2 - 3\tau\partial_\tau - 1)\chi_{\mathcal{H}^0} = 0$$

Si hacemos la suposición  $\chi_{\mathcal{H}^0} = \tau^n$ , tenemos

$$\tau^n [-n(n - 1) - 3n - 1] = 0 \quad \rightarrow \boxed{n = -1}$$

Entonces en el límite,

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \chi_{\mathcal{H}^0}(\tau, \hat{x}) = \frac{\chi_+(\hat{x})}{\tau} + \dots \quad (4.2)$$

Buscaremos ahora una solución a 4.1 de la forma,

$$\chi_{\mathcal{H}^0}(y) = \int d^2V'G(\sigma)\chi_+(\hat{x}') \quad (4.3)$$

donde  $\sigma := Y.Y'$ , con  $Y^\mu = (\tau, \sqrt{1 + \tau^2}\hat{x})$  y  $Y'^\mu = (1, \hat{x}')$ . Todo se resume a pedir que  $\chi_{\mathcal{H}^0}$  en la ecuación 4,3 cumpla con las ecuaciones 4,2 y 4,1. Para esto suponemos  $G(\sigma) = \delta(\sigma)/2\pi$  y vemos si se satisface 4.1. Tenemos para una función cualquiera  $f(\sigma)$ ,

$$D^2 f(\sigma) = -\sigma^2 f''(\sigma) - 3\sigma f'(\sigma)$$

$$\rightarrow (D^2 - 1)\chi_{\mathcal{H}^0}(y) = - \int \frac{d^2V'}{2\pi} [\sigma^2\delta''(\sigma) + 3\sigma\delta'(\sigma) + \delta(\sigma)] \chi_+(\hat{x}')$$

Conociendo las siguientes propiedades de las distribuciones:

$$\sigma\delta'(\sigma) = -\delta(\sigma); \quad \sigma^2\delta''(\sigma) = -2\sigma\delta'(\sigma) = +2\delta(\sigma)$$

obtenemos,

$$(D^2 - 1)\chi_{\mathcal{H}^0}(y) = - \int \frac{d^2V'}{2\pi} [2\delta(\sigma) - 3\delta(\sigma) + \delta(\sigma)] \chi_+(\hat{x}') = 0$$

Veamos por último si se cumple 4.2,

$$\delta(\sigma) \Rightarrow \hat{x}.\hat{x}' = \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}$$

En el límite  $\tau \rightarrow +\infty$

$$\hat{x}.\hat{x}' = 1 - \frac{1}{2\tau^2}$$

Por otro lado podemos parametrizar la esfera de manera que  $\hat{x}.\hat{x}' = \cos(\theta)$ , y si  $\theta \ll 1$  tendríamos  $\hat{x}.\hat{x}' = 1 - \theta^2/2$ . Luego podemos asociar  $\theta = 1/\tau$ , que corresponde con que la región de integración en 4.3 sea un círculo de radio el ángulo  $\theta$  alrededor de  $\hat{x}$ . Aproximamos la integral en 4.3 al perímetro del círculo multiplicado por el valor medio del campo  $\chi_+(\hat{x})$ :

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \chi_{\mathcal{H}^0}(\tau, \hat{x}) = \frac{\chi_+(\hat{x})}{\tau}$$

completando entonces de demostrar que 4.3 es solución.

Veamos ahora el límite  $\tau \rightarrow -\infty$  para  $\chi_{\mathcal{H}^0}(y)$  donde tenemos:

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \hat{x}.\hat{x}' = -1 + \frac{1}{2\tau^2}$$

Si  $\hat{x}'$  está cerca del opuesto de  $\hat{x}$  tenemos  $\hat{x}.\hat{x}' = -\cos(\theta)$ , por lo que si  $\theta \ll 1 \rightarrow \hat{x}.\hat{x}' \approx -1 + \theta^2/2$ . Asociamos  $\theta = |1/\tau|$

Entonces

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \chi_{\mathcal{H}^0}(y) = \frac{\chi_+(-\hat{x})}{|\tau|} = -\frac{\chi_+(-\hat{x})}{\tau}$$

Si definimos  $\chi_-$  como:

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \chi_{\mathcal{H}^0}(\tau, \hat{x}) = \frac{\chi_-(-\hat{x})}{|\tau|} \tag{4.4}$$

Entonces tenemos la igualdad:

$$\boxed{\chi_-(\hat{x}) = \chi_+(-\hat{x})} \quad (4.5)$$

Por continuidad tenemos las relaciones (ver diagrama),

$$\chi_{\mathcal{I}^+}(u = -\infty, \hat{x}) = \chi_+(\hat{x}) \quad (4.6)$$

$$\chi_{\mathcal{I}^-}(v = +\infty, \hat{x}) = \chi_-(\hat{x}) \quad (4.7)$$

A partir de las ecuaciones 3.32, 3.40, 4.6 y 4.7:

$$Q^+[\hat{q}] = \chi_+(\hat{x})$$

$$Q^-[\hat{q}] = \chi_-(-\hat{x})$$

Finalmente, por la ecuación 4.5, tenemos que las cargas  $Q^+$  y  $Q^-$  cambian de forma continua de una a la otra en el infinito espacial:

$$\boxed{Q^+[\hat{q}] = Q^-[\hat{q}]} \quad (4.8)$$

La ecuación 4.8 es la versión en spin cero de la expresión hallada por Strominger para electrodinámica y se usó como guía el trabajo realizado por Campiglia y Eyheralde [2]. Por otro lado el tratamiento en el infinito espacial para vincular los infinitos nulos futuro y pasado fue inspirado a partir de [57] [58] [59].

Entonces hemos obtenido en esta sección que la carga  $Q$  se conserva al haber encontrado la igualdad  $Q^+[\hat{q}] = Q^-[\hat{q}]$ , ecuación 4.8. Además hallamos dicha igualdad para cada valor de  $\hat{q}$  sobre la esfera y por lo tanto se conservan un número infinito de cargas.

En la sección siguiente veremos otra forma de encontrar infinitas cargas conservadas para el modelo con partículas de spin cero. La misma fue inspirada en los casos estudiados con partículas de spin 1 y 2.

## 5. Carga a partir de una densidad de corriente

En esta sección veremos una forma adicional para encontrar la existencia de infinitas magnitudes conservadas en spin cero. Motivado en los casos con spin 1 y 2, definiremos nuevos operadores de carga que llamaremos cargas promediadas, y encontraremos se conservan. Dicho resultado es realizado con el hallazgo de corrientes conservadas que nos reproducirán las cargas promediadas.

Las corrientes conservadas nos permitirán extender la definición de las cargas para tiempos finitos.

La ecuación 3.10 nos adelantó que la carga  $Q = Q^\pm[\hat{q}]$  es una magnitud conservada, luego, a partir de la sección 3, podríamos decir que debe existir una simetría asociada en la teoría. Por lo tanto observaremos cómo es la transformación en los campos asintóticos provocadas por las cargas.

### 5.1. Carga Promediada y Densidad de Corriente

Definimos la *carga futura promediada*  $Q^+[\lambda_+]$ , para cualquier función  $\lambda_+(\hat{x}) : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , como,

$$Q^+[\lambda_+] = \int_{S^2} d^2V \lambda_+ \chi_{\mathcal{I}^+}(u \rightarrow -\infty, \hat{x}) \quad (5.1)$$

Ésta carga será la magnitud que encontraremos se conserva. Es importante observar que existe una biyección entre el conjunto de cargas  $Q^+[\lambda_+]$  y  $Q^+[\hat{q}]$ . Si elegimos  $\lambda_+(\hat{x}) = \delta^2(\hat{q} - \hat{x})$  la carga promediada coincide con la carga  $Q^+[\hat{q}]$ .

A partir de la ecuación 3.24,

$$\chi_{\mathcal{I}^+}(u \rightarrow -\infty, \hat{x}) = - \int du \partial_u \chi_{\mathcal{I}^+} + \frac{1}{4\pi} \int d^3V \frac{j(y)}{Y \cdot q}$$

donde  $m^2 d^3V = d^3\vec{p}/E_p$ ,  $q = (1, \hat{x})$ ,  $Y^\mu = (\sqrt{1 + \rho^2}, \rho\hat{x})$  y siendo  $j(y)$  igual a:

$$j(y) = \frac{m}{4(2\pi)^3} b^* b$$

podemos escribir la carga futura promediada a través de los campos asintóticos en el futuro como,

$$Q^+[\lambda_+] = - \int_{\mathcal{I}^+} d^2\hat{x} du \lambda_+ \partial_u \chi_{\mathcal{I}^+}(u, \hat{x}) - \int_{\mathcal{H}^+} d^3V \overset{(1)}{\Lambda}(y) j(y) \quad (5.2)$$

Siendo

$$\overset{(1)}{\Lambda}(y) := -\frac{1}{4\pi} \int d^2\hat{x} \frac{\lambda_+}{Y.q} \quad (5.3)$$

Esta definición implica que  $\overset{(1)}{\Lambda}$  es una función en  $\mathcal{H}^+$  que verifica (ver apéndice B.2):

$$\begin{cases} (D^2 + 1) \overset{(1)}{\Lambda} = 0 \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} \overset{(1)}{\Lambda} = \frac{Ln(\rho)}{\rho} \lambda_+ \end{cases} \quad (5.4)$$

Por lo tanto  $\overset{(1)}{\Lambda}$  podría ser el comportamiento asintótico de un campo

$$\Lambda(x) := \frac{\overset{(1)}{\Lambda}(y)}{\tau} + \dots \quad (5.5)$$

que satisface la ecuación de onda  $\square\Lambda$  en todo el espacio-tiempo. Esto nos ayudará más adelante cuando veamos que la carga promediada se conserva.

Vamos a considerar a continuación dos foliaciones del espacio-tiempo y obtendremos la carga promediada como la integral en las mismas de una densidad de corriente conservada.

Tomaremos primero una foliación en superficies de  $\tau = cte$ , coordenada que parametriza  $\mathcal{H}^0$ , y estudiaremos la carga promediada como la integral en estas superficies en el límite  $\tau \rightarrow \infty$ .

Consideramos la densidad de corriente  $j^a$  definida como

$$j^a = \partial_b k^{ab} \quad (5.6)$$

donde  $k^{ab}$  es un tensor antisimétrico, de modo tal que se cumple  $\partial_a j^a = 0$ . Por lo tanto,  $j^a$  es una corriente conservada y podemos buscar que su integral en superficies de ciertas foliaciones del espacio-tiempo sean magnitudes constantes. Cuando mencionamos magnitud constante nos referimos como constante dentro de la foliación, es decir, donde las integrales en distintas superficies son iguales. Consideramos  $k^{ab}$  como,

$$k^{ab} = \sqrt{\eta} ((\nabla^a \chi \Lambda - \nabla^a \Lambda \chi) X^b - (a \leftrightarrow b)) \quad (5.7)$$

siendo  $X^a$  el campo vectorial dilatación definido como  $X^a := x^\mu \partial_\mu$ ; mientras que  $\Lambda$  está dado por la ecuación 5.5.

## 5.2. Conservación en Foliación en $\tau$

Consideramos el espacio-tiempo en coordenadas asociadas al infinito espacial  $(\rho, \tau, \hat{x})$ . Integramos la componente de la densidad  $j^\tau$  en una superficie de  $\tau$  constante. Como  $X^a = \rho \partial_\rho$  entonces  $j^\tau = \partial_\rho k^{\tau\rho}$ , porque los demás  $k^{\tau\beta}$  son cero. Podemos escribir la integral en la superficie de  $\tau = cte$  como,

$$\lim_{\rho_{max} \rightarrow \infty} \int_0^{\rho_{max}} d\rho d^2 \hat{x} j^\tau = \lim_{\rho_{max} \rightarrow \infty} \int d^2 \hat{x} \int_0^{\rho_{max}} d\rho (\partial_\rho k^{\tau\rho}) \quad (5.8)$$

$$= \lim_{\rho_{max} \rightarrow \infty} \int d^2 \hat{x} k^{\tau\rho} \quad (5.9)$$

Calculamos  $k^{\tau\rho}$ :

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 h_{\tau\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 h_{AA} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho^2 h_{BB} \end{pmatrix} \rightarrow \det(\eta) = \rho^6 \det(h)$$

$$k^{\tau\rho} = \sqrt{h} \rho^3 ((\rho^{-2} h^{\tau\tau} \partial_\tau \chi \Lambda - \rho^{-2} h^{\tau\tau} \partial_\tau \Lambda \chi) \rho)$$

En el límite  $\rho \rightarrow +\infty$  tenemos,

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \chi = \frac{\chi_{\mathcal{H}^0}(\tau, \hat{x})}{\rho}; \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \Lambda = \frac{\Lambda^{(2)}}{\rho} \\ \rightarrow \lim_{\rho \rightarrow \infty} k^{\tau\rho} = \sqrt{h} h^{\tau\tau} \left( \partial_\tau \chi_{\mathcal{H}^0} \Lambda^{(2)} - \partial_\tau \Lambda^{(2)} \chi_{\mathcal{H}^0} \right) \end{array} \right.$$

Luego también podemos definir una densidad de corriente  $\zeta^\alpha$  en  $\mathcal{H}^0$  como:

$$\zeta^\alpha = \sqrt{h} h^{\alpha\beta} \left( \partial_\beta \chi_{\mathcal{H}^0} \Lambda^{(2)} - \partial_\beta \Lambda^{(2)} \chi_{\mathcal{H}^0} \right) \quad (5.10)$$

Si la misma se conserva entonces  $\nabla_\alpha \zeta^\alpha = 0$ ,

$$\nabla_\alpha \zeta^\alpha = \nabla_\alpha (\sqrt{h} h^{\alpha\beta}) \left( \nabla_\beta \chi_{\mathcal{H}^0} \Lambda^{(2)} - \nabla_\beta \Lambda^{(2)} \chi_{\mathcal{H}^0} \right) + \sqrt{h} h^{\alpha\beta} \left( \nabla_\alpha (\nabla_\beta \chi_{\mathcal{H}^0} \Lambda^{(2)}) - \nabla_\alpha (\nabla_\beta \Lambda^{(2)} \chi_{\mathcal{H}^0}) \right)$$

Tenemos que ambos campos  $\chi_{\mathcal{H}^0}$  y  $\Lambda^{(2)}$  son cero cuando aplicamos el operador  $(D^2 - 1)$ , (además  $\nabla_\alpha h^{\alpha\beta} = 0$ ) por lo tanto sí se conserva,



$$= \sqrt{\hbar} \left( \nabla^\beta (\nabla_\beta \chi_{\mathcal{H}^0} \overset{(2)}{\Lambda}) - \nabla^\beta (\nabla_\beta \overset{(2)}{\Lambda} \chi_{\mathcal{H}^0}) \right) = 0$$

Pasemos ahora a definir una carga  $Q_\tau$  como la integral de  $\varsigma$  en una superficie de  $\tau$  constante:

$$Q_\tau := \int d^2 \hat{x} \varsigma_\tau = \int d^2 \hat{x} \lim_{\rho \rightarrow \infty} k^{\tau\rho} \quad (5.11)$$

$$\rightarrow Q_\tau = - \int d^2 \hat{x} \sin(x_A) (1 + \tau^2)^{3/2} \left( \partial_\tau \chi_{\mathcal{H}^0} \overset{(2)}{\Lambda} - \partial_\tau \overset{(2)}{\Lambda} \chi_{\mathcal{H}^0} \right)$$

Veremos que esta carga  $Q_\tau$  coincide con la carga promediada definida antes en 5.1. Para eso hacemos el límite  $\tau \rightarrow \infty$  en el campo  $\overset{(2)}{\Lambda}$  (Ver apéndice B.3):

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \overset{(2)}{\Lambda} = \frac{\text{Ln}(\tau)}{\tau} \lambda_+(\hat{x}) \quad (5.12)$$

Luego

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} Q_\tau &= - \int d^2 \hat{x} \sin(x_A) \tau^3 \left[ -\frac{\chi_+}{\tau^2} \frac{\text{Ln}(\tau)}{\tau} \lambda_+ - \left( \frac{\lambda_+}{\tau^2} - \frac{\text{Ln}(\tau)}{\tau^2} \lambda_+ \right) \frac{\chi_+}{\tau} \right] \\ &= \int d^2 \hat{x} \sin(x_A) \tau^3 \left( \frac{\chi_+ \lambda_+}{\tau^3} \right) \\ &= \int d\Omega \chi_+ \lambda_+ \end{aligned}$$

Finalmente usando continuidad (ecuación 4.6),

$$\boxed{\lim_{\tau \rightarrow \infty} Q_\tau \equiv Q^+}$$

Entonces la carga promediada es la carga que surge de la integral en una superficie  $\tau = \text{cte}$  de la densidad  $\varsigma_\tau$  en  $\mathcal{H}^0$ . Y a la vez corresponde con la carga de una integral, en el espacio-tiempo, de una superficie  $\tau = \text{cte}$  de la densidad  $j_\tau$ . Nos podemos preguntar ahora qué sucede con una carga promediada como en 5.1 pero asociada al pasado. Definimos la *carga pasada promediada*  $Q^-[\lambda_-]$  como,

$$Q^-[\lambda_-] = \int_{S^2} d^2 V \lambda_- \chi_{I^-} (v \rightarrow +\infty, -\hat{x}) \quad (5.13)$$

siendo  $\lambda_-$  definida en la esfera tal que satisface una correspondencia antipodal con  $\lambda_+$ :  $\lambda_- (\hat{x}) = \lambda_+ (-\hat{x})$ .

Queremos ver que en el límite  $\tau \rightarrow -\infty$  el operador  $Q_\tau$  coincide con  $Q^-$ . En dicho límite tenemos,

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \overset{(2)}{\Lambda} = \frac{Ln(-\tau)}{\tau} \lambda_+(\hat{x}) \quad (5.14)$$

La ecuación 4.4 nos dice que en el límite:

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \chi_{\mathcal{I}^-} = -\frac{\chi_-}{\tau} \quad (5.15)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow -\infty} Q_\tau &= - \int d^2 \hat{x} \sin(x_A) |\tau|^3 \left[ \frac{\chi_-}{\tau^2} \frac{Ln(-\tau)}{\tau} \lambda_+ + \left( \frac{\lambda_+}{\tau^2} - \frac{Ln(-\tau)}{\tau^2} \lambda_+ \right) \frac{\chi_-}{\tau} \right] \\ &= - \int d^2 \hat{x} \sin(x_A) |\tau|^3 \left( \frac{\chi_- \lambda_+}{\tau^3} \right) \\ &= \int d\Omega \chi_- \lambda_+ \end{aligned}$$

Usando la continuidad, ecuación 4.7, obtenemos la coincidencia entre las cargas:

$$\boxed{\lim_{\tau \rightarrow -\infty} Q_\tau \equiv Q^-} \quad (5.16)$$

Por último quisiéramos encontrar una relación entre las cargas promediadas en el futuro y pasado. Para esto podemos aprovechar que la densidad en 5.6 es una corriente conservada y plantearnos la integral de la superficie en la figura 11. La misma estaría formada por secciones de las dos superficies a  $\tau = cte$  y secciones de las dos superficies a  $\rho = cte$ , de modo que la unión sea una superficie cerrada. Luego si hacemos el límite cuando  $\rho$  tiende a infinito y calculamos el flujo de  $j^a$  sobre las secciones de  $\rho = cte$ , que llamaremos *fugas*, podemos relacionar los flujos sobre las superficies de  $\tau = cte$ .

Pasemos a calcular estas fugas, que a  $\rho$  fijo serían:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int d^2 \hat{x} j_\rho = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int d^2 \hat{x} \nabla_\alpha k^{\rho\alpha} \quad (5.17)$$

A partir de 5.10 obtuvimos:

$$\rightarrow \lim_{\rho \rightarrow \infty} k^{\rho a} = \zeta^a + O(\rho^{-1})$$

Y además encontramos que  $\nabla_a \zeta^a = 0$ , por lo tanto:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \nabla_a k^{\rho a} = 0 + O(\rho^{-1})$$

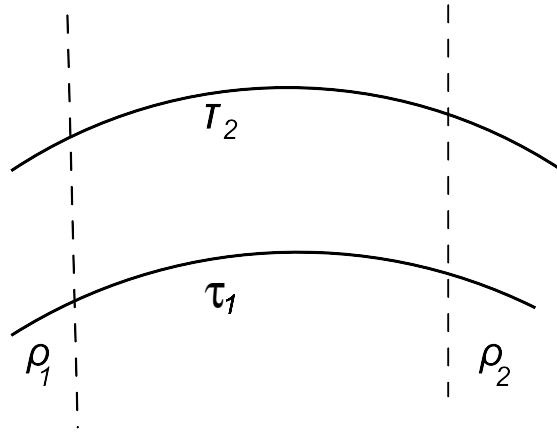


Figura 11: Representación de superficies  $\tau=cte$  y  $\rho=cte$  en coordenadas que parametrizan el infinito espacial.

Entonces la fuga tiende a cero y los flujos sobre las superficies  $\tau = cte$  son iguales, lo que nos permite concluir que la carga futura promediada es igual a la carga pasado promediada:

$$\boxed{Q^-[\lambda_-] = Q^+[\lambda_+]} \quad (5.18)$$

Además podemos concluir que tanto la carga  $Q^+$  como  $Q^-$  son la integral de la densidad  $j^a$  sobre cualquier superficie a  $\tau$  constante.

Podemos decir entonces que existen infinitas cargas conservadas  $Q[\lambda]$ , una para cada función  $\lambda$  definida en la esfera.

Consideramos a continuación una nueva foliación del espacio-tiempo en superficies de tiempo  $t$  constante y demostraremos la conservación de la carga promediada análogamente al caso anterior.

### 5.3. Conservación en Foliación en $t$

Estudiamos ahora la carga promediada en términos de la integral en una superficie en el futuro. Consideremos una familia de integrales en el espacio de Minkowski de la componente  $j^t$ , ecuación 5.6, en superficies de  $t = cte$ :

$$Q_t = \int_{t=cte} d^2 \hat{x} dr j^t \quad (5.19)$$

Cuando hacemos el límite  $t \rightarrow \infty$  la carga  $Q_t$  podría tener, a priori, contribuciones desde el infinito nulo futuro  $Q_{\mathcal{I}^+}$ , infinito temporal futuro  $Q_{\mathcal{H}^+}$  e infinito espacial

$Q_{\mathcal{H}^0}$ . Es decir tenemos contribuciones desde todas las posibles geodésicas por las que podemos ir a  $t \rightarrow +\infty$ ; así tenemos:  $Q_t = Q_{\mathcal{I}^+} + Q_{\mathcal{H}^+} + Q_{\mathcal{H}^0}$ .

Consideremos la contribución en el infinito nulo  $Q_{\mathcal{I}^+}$  como la integrando en  $\mathcal{I}^+$  de la componente  $j^t$  tras hacer el límite  $t \rightarrow \infty$  manteniendo constante la diferencia  $u = t - r$ . Entonces en el límite mencionado  $j^t$  es igual a,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty}^{u=cte} j^t = \lim_{t \rightarrow +\infty}^{u=cte} j^u + j^r = \lim_{t \rightarrow +\infty}^{u=cte} \partial_r k^{ur} + \partial_u k^{ru} \quad (5.20)$$

porque los límites  $t \rightarrow +\infty$  con  $u = cte$  es equivalente a  $r \rightarrow +\infty$  con  $u = cte$ , tenemos que el primer término de la derecha en 5.20 tiene un orden menor al segundo,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty}^{u=cte} j^t = \lim_{r \rightarrow +\infty}^{u=cte} \partial_u k^{ru} \quad (5.21)$$

Luego,

$$Q_{\mathcal{I}^+} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int dud^2 \hat{x} \partial_u k^{ru} \quad (5.22)$$

Tenemos los siguientes límites para los campos:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \chi = \frac{\chi_{\mathcal{I}^+}}{r} + \dots \quad (5.23)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Lambda = \frac{Ln(r)}{2r} \lambda - \frac{Ln|2u|}{2r} \lambda + \dots \quad (5.24)$$

Usando la definición de  $k^{ab}$ , ecuación 5.7, tenemos que la componente  $k^{ru}$  es:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty}^{u=cte} k^{ru} = -sen(x_A) \lambda \left[ \partial_u \chi_{\mathcal{I}^+} \left( \frac{Ln(r)}{2} - \frac{Ln|2u|}{2} \right) + \chi_{\mathcal{I}^+} \right] + O(r^{-1}) \quad (5.25)$$

Podemos suponer que el campo  $\chi_{\mathcal{I}^+}$  tiene el fall-off  $\chi_{\mathcal{I}^+} = O(u^0)$  y  $\partial_u \chi_{\mathcal{I}^+} = O(u^{-\epsilon})$ , con  $\epsilon > 0$ . Esto se lo puede ver a partir de las ecuaciones 3.14 y 3.17. Por lo tanto, cuando integramos en 5.22 el primer término de la derecha de 5.25 y evaluamos en  $u \rightarrow \pm$  obtenemos cero. Luego sobrevive solo

$$\lim_{r \rightarrow +\infty}^{u=cte} k^{ru} = -sen(x_A) \chi_{\mathcal{I}^+} \lambda(\hat{x}) \quad (5.26)$$

Entonces  $Q_{\mathcal{I}^+}$  es igual a,

$$Q_{\mathcal{I}^+} = - \int dud^2 \hat{x} \partial_u \chi_{\mathcal{I}^+} \lambda(\hat{x}) \quad (5.27)$$

Que es exactamente igual al primer término a la derecha de la ecuación 5.2. Ahora estudiamos la contribución en el infinito temporal  $Q_{\mathcal{H}^+}$ , al hacer el límite  $t \rightarrow \infty$

manteniendo constante el cociente  $r/t < 1$ , e integrando en  $\mathcal{H}^+$ . Dicho límite es equivalente, en coordenadas del infinito temporal, a  $\tau \rightarrow \infty$  con  $\rho = cte$ . Escribimos primero  $j^t$  en las componentes  $\rho$  y  $\tau$ ,

$$j^t = j^\tau \rho + j^\rho \tau = \partial_a k^{\tau a} \rho + \partial_a k^{\rho a} \tau \quad (5.28)$$

Como el vector dilatación en estas coordenadas es  $X^a = \tau \partial_\tau$ , en el segundo término de 5.28 sólo sobrevive el término en  $k^{\rho\tau}$ . Sin embargo la derivada en  $\tau$  establece que el fall-off es  $\tau \partial_\tau k^{\rho\tau} \sim O(\tau^{-1})$ , por lo tanto el término en  $\partial_a k^{\tau a}$ , de orden  $O(\tau^0)$ , es más grande en el límite  $\tau \rightarrow \infty$ . Escribimos entonces la componente  $k^{\tau a}$ , siendo  $a \neq \tau$ ,

$$k^{\tau a} = \sqrt{-\eta} (-(\partial^a \chi \Lambda - \chi \partial^a \Lambda) \tau) \quad (5.29)$$

Si hacemos el límite mencionado, y usamos las ecuaciones 5.5 y 3.26,

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} k^{\tau a} = -\sqrt{h} h^{ab} \left( \partial^b \chi_{\mathcal{H}^+} \overset{(1)}{\Lambda} - \chi_{\mathcal{H}^+} \partial^b \overset{(1)}{\Lambda} \right) \quad (5.30)$$

donde  $h_{ab}$  es la métrica en  $\mathcal{H}^+$ .

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \nabla_a k^{\tau a} = -\sqrt{h} \left( D^2 \chi_{\mathcal{H}^+} \overset{(1)}{\Lambda} - \chi_{\mathcal{H}^+} D^2 \overset{(1)}{\Lambda} \right) \quad (5.31)$$

Por la ecuación 5.4 sabemos que  $D^2 \overset{(1)}{\Lambda} = -\overset{(1)}{\Lambda}$ :

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \nabla_a k^{\tau a} = -\sqrt{h} \left( (D^2 + 1) \chi_{\mathcal{H}^+} \overset{(1)}{\Lambda} \right) = -\sqrt{h} \left( j \overset{(1)}{\Lambda} \right) \quad (5.32)$$

Por lo tanto el término  $Q^{\mathcal{H}^+}$  es igual a

$$Q^{\mathcal{H}^+} = - \int_{\mathcal{H}^+} j \overset{(1)}{\Lambda} \quad (5.33)$$

que coincide con el segundo término en 5.2.

Por último deberíamos verificar que no existen contribuciones desde el infinito espacial, las cuales podrían existir a partir de geodésicas con  $r/t > 1$  en el límite  $t \rightarrow \infty$ . Análogamente escribimos la componente  $j^t$  en las componentes  $j^\rho$  y  $j^\tau$ , siendo  $\tau$  y  $\rho$  las coordenadas en el infinito espacial,

$$j^t = \partial_a k^{\tau a} \frac{\rho \tau}{\sqrt{1 + \tau^2}} + \partial_a k^{\rho a} \sqrt{1 + \tau^2} \quad (5.34)$$

Como en el límite  $\rho \rightarrow \infty$  el término  $k^{\tau\rho}$  es de orden  $O(\rho^0)$ , sobrevive el primer término de la izquierda en 5.34. Usando los mismos comportamientos asintóticos de la sección anterior para los campos  $\chi$  y  $\Lambda$  tenemos:

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} k^{\rho a} = \sqrt{h} h^{ab} \left( \nabla_b \chi_{\mathcal{H}^0} \overset{(2)}{\Lambda} - \chi_{\mathcal{H}^0} \nabla_b \overset{(2)}{\Lambda} \right) \quad a, b \neq \tau \quad (5.35)$$

donde  $h_{ab}$  es la métrica en De Sitter. Luego,

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \nabla_a k^{\rho a} = \sqrt{h} \left( D^2 \chi_{\mathcal{H}^0} \overset{(2)}{\Lambda} - \chi_{\mathcal{H}^0} D^2 \overset{(2)}{\Lambda} \right) \quad (5.36)$$

Usando que  $\overset{(2)}{\Lambda}$  satisface: (ver apéndice B.3)

$$(D^2 - 1) \overset{(2)}{\Lambda} = 0 \quad (5.37)$$

Tenemos que el término de orden  $O(\rho^0)$  de la integral es cero y no tendríamos contribuciones desde el infinito espacial a la carga  $Q_t$ . Luego tenemos la coincidencia que buscábamos

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} Q_t \equiv Q^+} \quad (5.38)$$

Por último se puede demostrar que sucede algo similar cuando tomamos el límite  $t \rightarrow -\infty$  en 5.19, es decir,

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow -\infty} Q_t \equiv Q^-} \quad (5.39)$$

Por otro lado se puede ver, como en la foliación de  $\tau$  constante, la coincidencia de la carga  $Q_t$  para dos tiempos distintos:  $Q_{t1} = Q_{t2}$ . Es decir que las fugas de este caso son cero. Entonces podemos decir que las cargas  $Q^\pm$  son la integral de la componente de la densidad  $j^t$  sobre cualquier superficie a  $t$  constante.

Por lo tanto se puede ver que existen infinitas cargas conservadas, como hallamos cuando analizamos la foliación en  $\tau = cte$ .

## 5.4. Acción sobre los campos asintóticos

Como en los casos de gravedad y electromagnetismo suponemos que existe una simetría asintótica que es la responsable de la conservación de las cargas que obtuvimos de la factorización infrarroja. Creemos que dicha simetría se corresponde con la simetría de un modelo que incluye al que consideramos en la tesis. Siendo ésta simetría la encargada de excluir la aparición de términos de masa para el campo  $\chi$  cuando consideramos no solo diagramas a nivel árbol. Es por esto que en esta sección hacemos exploraciones sobre la transformación de simetría en los campos asintóticos.

Obtendremos la transformación a partir de la carga  $Q^+[\lambda_+]$  haciendo uso del formalismo de fase covariante. Empezamos por la transformación en los campos asintóticos en el futuro.

Utilizamos el conmutador para encontrar la transformación correspondiente, donde en general, para un campo arbitrario  $f$  el cambio  $\delta_\lambda f$  es

$$\delta_\lambda f = i [Q[\lambda], f] \quad (5.40)$$

Para el campo  $\chi_{\mathcal{I}^+}(u, \hat{x})$  la transformación sería,

$$\delta_\lambda \chi_{\mathcal{I}^+}(u, \hat{x}) = i [Q^{soft}[\lambda], \chi_{\mathcal{I}^+}(u, \hat{x})] = -i \int_{\mathcal{I}^+} d^2 \hat{y} du' \lambda [\partial_{u'} \chi_{\mathcal{I}^+}(u', \hat{y}), \chi_{\mathcal{I}^+}(u, \hat{x})] \quad (5.41)$$

donde  $Q^{soft}[\lambda]$  sería el primer término del lado derecho de 5.2, ya que es el que no conmuta con  $\chi_{\mathcal{I}^+}$ . Usando la expresión de  $\chi_{\mathcal{I}^+}$  en término de los operadores de Fock  $a(E\hat{x})$  y  $a^*(E\hat{x})$ , ecuación 3.11,

$$[\partial_{u'} \chi_{\mathcal{I}^+}(u', \hat{y}), \chi_{\mathcal{I}^+}(u, \hat{x})] = \left[ -\frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dE'}{2\pi} \left( a E' e^{-iE'u'} + a^* E' e^{iE'u'} \right), \right] \quad (5.42)$$

$$\frac{1}{4\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} (a e^{-iEu} - a^* e^{iEu}) \quad (5.43)$$

$$= -i \delta(u - u') \delta^2(\hat{x} - \hat{y}) \quad (5.44)$$

$$\rightarrow \delta_\lambda \chi_{\mathcal{I}^+}(u, \hat{x}) = -\lambda(\hat{x}) \quad (5.45)$$

Entonces el campo asintótico  $\chi$  se transformaría como,

$$\boxed{\delta_\lambda \chi(u, \hat{x}) = -\frac{\lambda(\hat{x})}{r} + \dots} \quad (5.46)$$

Estudiamos ahora cómo es la transformación en el campo  $\phi$ . Para eso vemos primero la transformación en los operadores asintóticos de Fock  $b(\vec{p})$  y  $b^*(\vec{p})$ :

$$\delta_\lambda b(\vec{p}) = i [Q^{hard}[\lambda], b(\vec{p})] \quad (5.47)$$

donde  $Q^{hard}[\lambda]$  sería el segundo término del lado derecha de 5.2, el cual no conmuta con  $b(\vec{p})$ .

$$\delta_\lambda b(\vec{p}) = -i \int_{\mathcal{H}^+} d^3V \Lambda^{(1)} \left[ -g \frac{m b^*(\vec{q}) b(\vec{q})}{4(2\pi)^3}, b(\vec{p}) \right] \quad (5.48)$$

La relación de conmutación entre los operadores de Fock nos da,

$$[b^*(\vec{q}) b(\vec{q}), b(\vec{p})] = [b^*(\vec{q}), b(\vec{p})] b(\vec{q}) = -(2\pi)^3 (2E_p) \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \quad (5.49)$$

$$\rightarrow \delta_\lambda b(\vec{p}) = -\frac{gi}{2m} \Lambda^{(1)} (\vec{p}/m) b(\vec{p}) \quad (5.50)$$

Usando el comportamiento asintótico de  $\phi$ , ecuación 3.20, en función del operador de Fock, tenemos cómo se transforma  $\phi$ :

$$\delta_\lambda \phi(x) = \frac{\sqrt{m}}{2(2\pi)^{3/2}} \delta_\lambda b(\vec{p}) e^{-i\tau m} + c.c. \quad (5.51)$$

$$\delta_\lambda \phi(x) = -\frac{gi}{2m} \Lambda^{(1)} \phi(x) = \frac{gi}{2m^2} \Lambda \tau \partial_\tau \phi(x) + \dots \quad (5.52)$$

donde ... corresponde a los términos del límite en  $\Lambda$ . Como en el infinito temporal el vector dilatación es  $X^a = \tau \partial_\tau$ , tenemos que la transformación de  $\phi$  se puede escribir en términos de éste:

$$\boxed{\delta_\lambda \phi(x) = \frac{g}{2m^2} \Lambda X^a \partial_a \phi(x) + \dots} \quad (5.53)$$

Observamos entonces que la transformación de simetría asociada a la carga en el futuro  $Q^+[\lambda]$  es, en el caso de  $\chi$ , un shift, mientras que para el campo  $\phi$  estaría, de alguna manera, asociada a dilataciones.



## 6. Conclusiones

En esta tesis estudiamos lo que quizás sea el modelo más simple de una teoría exhibiendo factorización infrarroja. El modelo consiste en dos campos escalares,  $\chi$  y  $\phi$ , el primero sin masa y el segundo masivo, con una interacción de tipo  $\chi\phi^2$ . De manera completamente análoga al caso de fotones y gravitones, logramos identificar cargas asintóticas que describen la factorización infrarroja como identidades de Ward. En más detalle, procedimos de la siguiente manera.

En primer lugar, establecimos la factorización infrarroja para spin cero y la expresamos a través de operadores que llamamos (justificado más adelante) “cargas”  $Q^\pm$ . Esquemáticamente,

$$\text{Factorización Infrarroja} \leftrightarrow Q^+ S = S Q^-$$

donde  $S$  es la matriz de scattering,  $Q^+$  actúa sobre los estados en el futuro (estados “out”) y  $Q^-$  sobre los estados en el pasado (estados “in”).

Escribimos las cargas  $Q^\pm$  en términos del campo  $\chi$  en el infinito nulo y del campo  $\phi$  en el infinito temporal. Usando las ecuaciones de movimiento en el futuro y pasado asintótico, mostramos que las cargas se pueden expresar enteramente en términos del campo  $\chi$  evaluado en el infinito espacial (de manera análoga a lo que sucede en caso electromagnético y gravitacional). Mediante el estudio de las ecuaciones de movimiento en el infinito espacial, establecimos la igualdad  $Q^+ = Q^-$ .

Finalmente, consideramos versiones “promediadas” de las cargas, definidas a partir de  $Q^\pm$  y de una función arbitraria definida sobre la esfera  $S^2$ . Encontramos una densidad de corriente que reproduce las cargas promediadas y establecimos su conservación. De esta manera mostramos que esta teoría posee un número infinito de cargas conservadas, al igual que en los casos de spin 1 y 2. Además mostramos que las cargas  $Q^\pm$  coinciden con la integral de la densidad de corriente sobre cualquier superficie con  $t$  o  $\tau$  constantes.

En el apéndice estudiamos cuál es el papel de la dimensión espacio-temporal en los resultados anteriores. Extendimos la dimensión a un valor arbitrario par mayor a cuatro y encontramos una relación muy similar entre Factorización Infrarroja y cargas conservadas.

Además analizamos brevemente el caso de una teoría con un escalar sin masa e interacción cúbica en dimensión par. Obtuvimos su factorización Infrarroja y sus cargas asociadas en función de los campos asintóticos.

El siguiente paso sería identificar las simetrías detrás de las cargas encontradas.

Este es el punto en que la analogía con el caso electromagnético y gravitacional parece romperse, ya que el modelo estudiado no posee ningún tipo de simetría explícita. Las cargas sin embargo generan transformaciones sobre los campos asintóticos cuyas expresiones obtuvimos en dimensión cuatro. Pero la interpretación de estas transformaciones no es clara. Un entendimiento adecuado de este punto podría requerir realizar el modelo estudiado dentro de una teoría que posea simetrías explícitas. Estas simetrías a su vez podrían proteger al campo  $\chi$  de adquirir términos de masa. La elucidación de estos puntos queda planteado como tema para futuras investigaciones.

## A. Extensión a más dimensiones

Esta sección está dedicada a extender gran parte del estudio realizado anteriormente al caso en dimensión arbitraria par  $d = 2m + 2$ . La elección de dimensión par se debe al deseo de facilitar los cálculos, y consideramos  $m$  como un natural mayor a 1. El objetivo es observar qué resultados pueden ser generalizables a más dimensiones y así entender un poco más cuál es el rol de la dimensión en las cargas y simetría provenientes de la factorización Infrarroja.

Primero observamos que la carga a partir de la Factorización Infrarroja toma la forma,

$$Q[\hat{q}] = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w}{2} (a_{w\hat{q}}^* + a_{w\hat{q}}) - \int \frac{d^{2m+1}p}{(2\pi)^{2m+1}} \frac{1}{2E_p} \frac{\lambda}{2p \cdot (1, \hat{q})} (b_p^* b_p) \quad (\text{A.1})$$

Análogamente a las ecuaciones 3.8 y A.3 tendríamos ahora,

$$Q_{soft}(\hat{q}) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega}{2} (a(\omega\hat{q}) + a^*(\omega\hat{q})) \quad (\text{A.2})$$

$$Q_{hard}(\hat{q}) = -\frac{\lambda}{4(2\pi)^{2m}} \int_{S^{2m}} d^{2m}\hat{p} \int_0^\infty \frac{dE}{2\pi} \frac{E^{2m-2} b^*(E\hat{p}) b(E\hat{p})}{-1 + \hat{q} \cdot \hat{p}} \quad (\text{A.3})$$

En el caso anterior habíamos obtenido que la carga coincidía con el campo sin masa de la siguiente forma,

$$\begin{cases} Q^+[\hat{q}] = 4\pi \chi_{\mathcal{I}^+}(u \rightarrow -\infty, \hat{q}) \\ Q^-[\hat{q}] = 4\pi \chi_{\mathcal{I}^-}(v \rightarrow +\infty, -\hat{q}) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

En  $d$  dimensiones tenemos una relación similar con un término subleading del campo  $\chi$  en el infinito nulo. Para ver esto primero veremos cuál es la expansión de  $\chi(r, u, \hat{x})$  en el infinito nulo  $\mathcal{I}^+$ .

### A.1. Expansión en el infinito nulo

Asumimos primero que el campo  $\chi$  se puede expandir en el infinito nulo como,

$$\chi(r, u, \hat{x}) = r^{-m} \sum_{n=0}^{m-1} r^{-n} \varphi_n(u, \hat{x}) + O(r^{-2m}). \quad (\text{A.5})$$

Usando la ecuación de movimiento,  $\square\chi = 0$ , se puede encontrar una relación recursiva para los campos  $\varphi_n$ ,

$$\partial_u \varphi_n = -\frac{1}{2n} [D^2 - (m-n)(m+n-1)] \varphi_{n-1} \quad \text{for } n = 1, \dots, m-1. \quad (\text{A.6})$$

De este modo  $\varphi_0$  serían los llamados *datos libres*, a través de los cuales se pueden escribir los demás campos  $\varphi_n$ . Asumimos también los siguientes fall-off, para  $u \rightarrow \pm$ , en los campos:

$$\begin{aligned} \varphi_n(u, \hat{x}) &= O(|u|^{-(m-1-n+\epsilon)}) \quad \text{for } n = 0, \dots, m-2 \\ \varphi_{m-1}(u, \hat{x}) &= O(1) + O(|u|^{-\epsilon}) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

para algún  $\epsilon > 0$ , ver ecuación A.6. Escribimos ahora  $\partial_u \varphi_{m-1}$  en función de los datos libres  $\varphi_0$ :

$$\partial_u \varphi_{m-1} = \frac{1}{(-2)^{m-1} (m-1)!} \prod_{n=1}^{m-1} \Delta_n \left[ \int_{-\infty}^u du \right]^{m-2} \varphi_0 \quad (\text{A.8})$$

siendo  $\Delta_n := D^2 - (m-n)(m+n-1)$  y  $\left[ \int_{-\infty}^u du \right]^{m-2} \varphi_0$  la primitiva  $(m-2)$ -ésima de  $\varphi_0(u)$ .

Definimos ahora la densidad de carga angular  $\sigma(\hat{x})$  como,

$$\sigma(\hat{x}) := \varphi_{m-1}(u = -\infty, \hat{x}) \quad (\text{A.9})$$

## A.2. Relación entre $Q[\hat{x}]$ and $\sigma(\hat{x})$

El campo  $\sigma$ , definido en A.9, se relaciona con la carga  $Q[\hat{x}]$  como

$$\sigma(\hat{x}) = \mathbb{K} Q(\hat{x}) \quad (\text{A.10})$$

donde definimos el operador  $\mathbb{K}$  de la forma,

$$\mathbb{K} := -\frac{1}{(-4\pi)^m (m-1)!} \prod_{n=1}^{m-1} \Delta_n \quad (\text{A.11})$$

En el apéndice B.5 se encuentra el cálculo del operador  $K^{-1}$ , que satisface:

$$\mathbb{K} K^{-1}(\hat{q}, \hat{x}) = \delta^{(2m)}(\hat{q}, \hat{x}) \quad (\text{A.12})$$

donde

$$K^{-1}(\hat{q}, \hat{x}) := \frac{2(m-1)}{1 - \hat{q} \cdot \hat{x}} \quad (\text{A.13})$$

Por lo tanto podemos escribir  $Q[\hat{x}]$  en función de  $\sigma$  como,

$$Q(\hat{q}) = \int_{S^{2m}} d^{2m}\hat{x} K^{-1}(\hat{q}, \hat{x})\sigma(\hat{x}) \quad (\text{A.14})$$

Mostraremos ahora que el operador  $\mathbb{K}$  aplicado a  $Q[\hat{q}]$  coincide con la carga  $\sigma$ , es decir, la relación mencionada en la ecuación A.10. Para eso escribimos  $\sigma$  como,

$$\sigma(\hat{x}) = - \int_{-\infty}^{\infty} du \partial_u \varphi_{m-1}(u, \hat{x}) + \varphi_{m-1}(u = \infty, \hat{x}). \quad (\text{A.15})$$

El término  $\varphi_{m-1}(u = \infty, \hat{x})$  recibe contribuciones del campo masivo y es al que llamaremos  $\sigma_{hard}(\hat{x})$ , mientras que  $\partial_u \varphi_{m-1}$  se escribe en términos de los datos libres del campo  $\chi$  y lo definimos como  $\sigma_{soft}(\hat{x})$ ; tenemos  $\sigma(\hat{x}) = \sigma_{soft}(\hat{x}) + \sigma_{hard}(\hat{x})$ .

Vemos ahora cómo se escribe el término  $\sigma_{soft}(\hat{x})$ , y para eso utilizamos la transformada de Fourier de los campos:

$$\tilde{\varphi}_n(E, \hat{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(u, \hat{x}) e^{iEu} du, \quad (\text{A.16})$$

Luego

$$\sigma_{soft}(\hat{x}) = - \lim_{E \rightarrow 0} \frac{1}{(-iE)^{m-2} (-2)^{m-1} (m-1)!} \prod_{n=1}^{m-1} \Delta_n \tilde{\varphi}_0(E, \hat{x}) \quad (\text{A.17})$$

Debemos escribir ahora  $\varphi_0(\hat{x})$  en términos del operador de Fock  $a(E\hat{p})$ . Tenemos,

$$\chi = \int \frac{d^{2m+1}p}{(2\pi)^{2m+1}} \frac{1}{2E_p} (a_p e^{ipx}) + c.c.. \quad (\text{A.18})$$

usando coordenadas retardadas:  $p.x = -E.t + \vec{p}.\vec{x} = -Eu + Er(\hat{p}.\hat{x} - 1)$ ,

$$\chi = \int \frac{dE E^{2m-1} e^{-iEu}}{2(2\pi)^{2m-1}} \int d^{2m} \hat{p} a_p e^{iEr(\hat{p}.\hat{x}-1)} + c.c.. \quad (\text{A.19})$$

A través del método *saddle point approximation*,

$$\chi = \int \frac{dE E^{2m-1} e^{-iEu}}{2(2\pi)^{2m-1}} a_{E\hat{x}} e^{-i\pi m/2} \left( \frac{2\pi}{Er} \right)^m + c.c.. \quad (\text{A.20})$$

Aquí en la ecuación A.20 podemos ver la justificación de suponer que el campo  $\chi$  tenía la forma dada en A.5. Entonces,

$$\varphi_0(u, \hat{x}) = \frac{e^{-i\pi m/2}}{2(2\pi)^m} \int_0^\infty \frac{dE}{2\pi} E^{m-1} a(E\hat{x}) e^{-iEu} + c.c. \quad (\text{A.21})$$

$$\tilde{\varphi}_0(E, \hat{x}) = \frac{(-i)^m E^{m-1}}{2(2\pi)^m} a(E\hat{x}), \quad \text{para } E > 0 \quad (\text{A.22})$$

donde  $\tilde{\varphi}_0(E, \hat{x})$  para  $E < 0$  es el complejo conjugado. Por lo tanto obtenemos lo que buscábamos al sustituir A.22 en A.17, y haciendo el límite  $E \rightarrow 0^+$ ,

$$\sigma_{soft}(\hat{x}) = \lim_{E \rightarrow 0^+} \frac{E}{(-1)^{m-1} (4\pi)^m (m-1)!} \prod_{n=1}^{m-1} \Delta_n a(E\hat{x}) \quad (\text{A.23})$$

$$\sigma_{soft}(\hat{x}) = \mathbb{K} Q_{soft}(\hat{x}) \quad (\text{A.24})$$

Trabajamos ahora con el término  $\sigma_{hard}(\hat{x})$ . Primero tenemos que el campo  $\phi$ , análogamente a la ecuación 3.20 usando saddle point approximation, se comporta en el infinito temporal futuro como

$$\phi(\tau, \rho, \hat{x}) = \frac{\mu^{m-1/2}}{2(2\pi\tau)^{m+1/2}} b(\mu\rho\hat{x}) e^{-i\mu\tau} e^{-i\pi(2m+1)/4} + c.c. + \dots \quad (\text{A.25})$$

Dado que  $\chi$  satisface la ecuación de movimiento 3.25 y observando el comportamiento asintótico de  $\phi$  en A.25, tenemos:

$$\begin{cases} \chi(\tau, \rho, \hat{x}) = \chi_{\mathcal{H}^+}(\rho, \hat{x})/\tau^{2m-1} + \dots \\ (D^2 + (2m-1))\chi_{\mathcal{H}^+} = j \end{cases}$$

siendo  $D^2$  el D'Alembertiano en el hiperboloide  $\mathcal{H}^+$  y  $j$  está dado por

$$j(\rho\hat{x}) := -\frac{\lambda\mu^{2m-1}}{4(2\pi)^{2m+1}} b^*(\mu\rho\hat{x}) b(\mu\rho\hat{x}). \quad (\text{A.26})$$

Buscamos la *funcion de Green* que satisface:

$$(D^2 + (d-1))G(\vec{y}, \vec{y}') = \delta^{2m+1}(\vec{y} - \vec{y}') \quad (\text{A.27})$$

donde el vector  $\vec{y} = \rho\hat{x}$  parametriza  $\mathcal{H}^+$ . Con un procedimiento análogo al realizado para obtener la ecuación 3.29, se obtiene:

$$G(y, y') = -\frac{1}{(2m-1)\text{Vol}(S^{2m})} [-1 + (Y \cdot Y')^2]^{-m+1/2} \quad (\text{A.28})$$

donde  $Y^\mu = (\sqrt{1+\rho^2}, \rho\hat{x})$  y siendo,

$$\text{Vol}(S^{2m}) = 2^{2m+1} \pi^m \frac{m!}{(2m)!} \quad (\text{A.29})$$

el volumen de la esfera  $S^{2m}$ . Luego,

$$\chi_{\mathcal{H}^+}(y) = \int d^{2m+1}y' \sqrt{\bar{h}} G(y, y') j(y') \quad (\text{A.30})$$

siendo  $h$  el determinante de la métrica sobre  $\mathcal{H}^+$ . En el apéndice, sección B.6, se muestra que la continuidad del campo  $\chi$  entre el infinito temporal futuro y el infinito nulo implica,

$$\sigma_{hard}(\hat{x}) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^{2m-1} \varphi_{\mathcal{H}}(\rho, \hat{x}). \quad (\text{A.31})$$

Sustituyendo A.30 en A.31 tenemos:

$$\sigma_{hard}(\hat{x}) = \frac{1}{(2m-1)Vol(S^{2m})} \int d^{2m+1}y \sqrt{\bar{h}} j(y) [Y \cdot (1, \hat{x})]^{1-2m} \quad (\text{A.32})$$

Por otro lado haciendo el cambio de variable  $\vec{p} = \mu \vec{y}$  en la ecuación A.3 podemos escribir  $Q_{hard}(\hat{q})$  como,

$$Q_{hard}(\hat{q}) = \int d^{2m+1}y \sqrt{\bar{h}} \frac{j(y)}{Y \cdot q}. \quad (\text{A.33})$$

Finalmente tenemos lo que buscábamos,

$$\boxed{Q_{hard}(\hat{q}) = \int_{S^{2m}} d^{2m}\hat{x} K^{-1}(\hat{q}, \hat{x}) \sigma_{hard}(\hat{x}).} \quad (\text{A.34})$$

utilizando la identidad:

$$\int d^{2m}\hat{x} (1 - \hat{q} \cdot \hat{x})^{-1} [Y \cdot (1, \hat{x})]^{1-2m} = \frac{(4\pi)^m (m-2)!}{2} \frac{1}{(2m-2)! Y \cdot q}. \quad (\text{A.35})$$

### A.3. Cargas y corrientes conservadas

En esta sección extendemos a dimensión  $2m + 2$  el estudio realizado en la sección 5. Es decir trataremos de encontrar una densidad de corriente conservada que nos de el valor de la carga promediada.

Comenzamos definiendo la *carga promediada*, para cualquier función  $\lambda : S^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$ , como:

$$\sigma[\lambda] := -2(m-1) \int d^{2m} \hat{x} \lambda(\hat{x}) \sigma(\hat{x}) \quad (\text{A.36})$$

análogamente al caso en dimensión 4, ecuación 5.1. También podemos escribir  $\sigma[\lambda]$  como:

$$\sigma[\lambda] = -2(m-1) \left\{ - \int du d^{2m} \hat{x} \lambda(\hat{x}) \chi(u, \hat{x}) + \int d^{2m} \hat{x} \lambda(\hat{x}) \chi(u \rightarrow +\infty, \hat{x}) \right\} \quad (\text{A.37})$$

Se puede observar que si  $\lambda(\hat{x}) = (-1 + \hat{q} \cdot \hat{x})^{-1}$  entonces tenemos  $\sigma[\lambda] = Q(\hat{q})$ . Veremos que la carga  $\sigma[\lambda]$  puede ser derivada de una densidad de corriente  $j^a = \partial_b k^{ab}$ , dada por:

$$k^{ab} = \sqrt{\eta} \left( (\nabla^a \chi \Lambda - \nabla^a \Lambda \chi) X^b - (a \leftrightarrow b) \right), \quad (\text{A.38})$$

donde  $X^a \partial_a = x^\mu \partial_\mu$  es el vector dilatación y  $\Lambda$  es una función en el espacio-tiempo definida como:

$$\Lambda(x) = \frac{2(m-1)}{(2m-1)} \frac{(-x \cdot x)^{m-1}}{\text{Vol}(S^{2m})} \int d^{2m} \hat{q} \frac{\lambda(\hat{q})}{(-q \cdot x)^{2m-1}}. \quad (\text{A.39})$$

De esta manera  $\Lambda$  está asociada a la función sobre la esfera  $\lambda$  y satisface la ecuación:

$$\square \Lambda = 0, \quad (\text{A.40})$$

Consideramos ahora las dos foliaciones del espacio-tiempo anteriores: en superficies  $t = cte$  y  $\tau = cte$ ; e integramos la densidad  $j^a$ .

#### A.3.1. Foliación en $\tau$

Empecemos considerando una foliación en superficies  $\tau = cte$ , en coordenadas del infinito espacial en dimensión  $2m + 2$ , e integramos la componente  $j^\tau$ , como en 5.9:

$$Q_\tau := \int d\rho d^{2m} \hat{x} j^\tau = \lim_{\rho_{max} \rightarrow \infty} \int d^{2m} \hat{x} k^{\tau\rho} \quad (\text{A.41})$$



Tenemos  $\sqrt{\eta} = \rho^{2m+1}\sqrt{h}$ , siendo  $h$  el determinante de la métrica sobre  $\mathcal{H}^0$ , y además podemos suponer los fall-offs, ver apéndice B.7 y [60] [61],

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \chi = \frac{\chi_{\mathcal{H}^0}}{\rho^{2m-1}} + \dots \quad ; \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \Lambda = \frac{\Lambda^{(1)}}{\rho} + \dots \quad (\text{A.42})$$

Luego,

$$k^{\tau\rho} = \sqrt{h}h^{\tau\tau} \left( \partial_\tau \chi_{\mathcal{H}^0} \Lambda^{(1)} - \chi_{\mathcal{H}^0} \partial_\tau \Lambda^{(1)} \right) \quad (\text{A.43})$$

donde  $h^{\tau\tau} = -(1 + \tau^2)$  y  $\sqrt{h} = \sqrt{q}(1 + \tau^2)^{(2m-1)/2}$ ; y  $q$  es el determinante de la métrica sobre la esfera  $S^{2m}$ . Suponemos, ver apéndice B.7, para  $m > 1$ , los siguientes fall-off para  $\tau$  tendiendo a infinito:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \chi_{\mathcal{H}^0} = \frac{\chi_+}{\tau^{2m-1}} + \dots \quad ; \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \Lambda^{(1)} = \frac{\lambda(\hat{x})}{\tau} + \dots \quad (\text{A.44})$$

Si ahora hacemos el límite cuando  $\tau$  tiende a infinito:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} Q_\tau &= - \int d^{2m} \hat{x} \sqrt{q} (1 + \tau^2)^{m+1/2} \left( -(2m-1) \frac{\chi_+ \lambda}{\tau^{2m+1}} - \frac{\chi_+ \lambda}{\tau^{2m+1}} \right) \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} Q_\tau &= 2(m-1) \int d^{2m} \hat{x} \sqrt{q} \chi_+ \lambda \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Según el apéndice tenemos:

$$\sigma(\hat{x}) = \chi_+(\hat{x}) \quad (\text{A.46})$$

A partir de A.45 y A.46:

$$\boxed{\sigma[\lambda] = \lim_{\tau \rightarrow \infty} Q_\tau} \quad (\text{A.47})$$

Entonces obtuvimos un resultado análogo al obtenido en 5.2, la carga promediada definida en A.36 coincide con la carga  $Q_\tau$  en el límite en que  $\tau$  va a infinito.

### A.3.2. Foliación en $t$

Para el foliación en superficies  $t = cte$  definimos el operador  $Q_t$  como:

$$Q_t = \int_{t=cte} d^{2m} dr j^t \quad (\text{A.48})$$

Como en 5.19 cuando hacemos el límite  $t \rightarrow \infty$  la carga  $Q_t$  podría escribirse como la suma de varias cargas: en el infinito nulo,  $Q_{\mathcal{I}^+}$ ; infinito temporal,  $Q_{\mathcal{H}^+}$ ; infinito espacial,  $Q_{\mathcal{H}^0}$ . Se puede demostrar que la carga en el infinito espacial en dimensión  $2m+2$  es, al igual que en dimensión 4, igual a cero. La contribución en el infinito nulo  $Q_{\mathcal{I}^+}$  se obtiene como en 5.22:

$$Q_{\mathcal{I}^+} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int du d^{2m} \hat{x} \partial_u k^{ru} \quad (\text{A.49})$$

El campo  $\Lambda$  tiene el siguiente comportamiento en el infinito nulo,  $r \rightarrow \infty, u = cte$ :

$$\Lambda(x) = \sum_{n=1}^{m-1} r^{-n} \Lambda_n(u, \hat{x}) + O(r^{-m}) \quad (\text{A.50})$$

siendo

$$\Lambda_1(u, \hat{x}) = \lambda(\hat{x}), \quad \Lambda_n(u, \hat{x}) = O(u^{n-1}). \quad (\text{A.51})$$

Estudiamos cómo es la componente  $k^{ru}$ ,

$$k^{ru} = \sqrt{q} r^{2m} [(\partial_r \chi \Lambda - \chi \partial_u \Lambda)u + (\partial_r \chi \Lambda)r] - [\chi \leftrightarrow \Lambda] \quad (\text{A.52})$$

siendo  $q_{\alpha\beta}$  la métrica de la esfera  $S^{2m}$ . Luego podemos descomponer los campos  $\Lambda$  y  $\chi$  en el infinito nulo usando las expansiones A.51 y A.5; la contribución del término  $\Lambda_l$  y  $\varphi_n$  sería:

$$k^{ru}(\Lambda_l, \varphi_n) = \sqrt{q} r^{2m} \left[ \left( \frac{-(n+m)\chi_n \Lambda_l + (l)\chi_n \Lambda_l}{r^{m+n+l+1}} \right) u + \left( \frac{-(n+m)\chi_n \Lambda_l + (l)\chi_n \Lambda_l}{r^{m+n+l}} \right) - \left( \frac{\partial_u \chi_n \Lambda_l + \chi_n \partial_u \Lambda_l}{r^{m+n+l}} \right) \right] \quad (\text{A.53})$$

Por lo tanto podemos descomponer  $k^{ru}$  como

$$k^{ru} = r^m \left( \sum_{n=1}^m r^{-p} k_p^{ru} \right) + O(r^{-1}) \quad (\text{A.54})$$

siendo,

$$k_p^{ru} = \sum_{n=0}^{p-1} -(n+m)\chi_n \Lambda_{p-n} + (p-n)\chi_n \Lambda_{p-n} - \partial_u \chi_n u \Lambda_{p-n} + \chi_n \partial_u \Lambda_{p-n} u + \sum_{n=0}^{p-2} -(n+m)\chi_n \Lambda_{p-n-1} u + (p-n-1)\chi_n \Lambda_{p-n-1} u \quad 1 \leq p \leq m \quad (\text{A.55})$$

Se puede observar que todos los sumando en A.55 tienen en mismo fall-off en la variable  $u$ :  $k_p^{ru} \sim O(u^{p-m-\epsilon})$ .

A partir de la ecuación A.54 vemos que todos los términos con  $p \neq m$  divergen en el límite  $r \rightarrow \infty$ . Sin embargo la integral en A.49 depende de los campos en el límite  $u \rightarrow \pm\infty$ , por lo tanto nos quedamos solo con los términos en  $O(u^0)$ . Es decir el único término que sobrevive es  $k_m^{ru}$ , que coincide con el término no divergente en  $r$  infinito.

$$k_m^{ru} = -(2m-1)\chi_{m-1}\lambda(\hat{x}) \quad (\text{A.56})$$

Así obtuvimos el primer término de A.37. Por otro lado la contribución del infinito temporal está dada por:

$$Q_{\mathcal{H}^+} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int d\rho d^{2m} \hat{x} \partial_\alpha k^{\tau\alpha} \quad (\text{A.57})$$

Observando la expresión para  $\Lambda$ , vemos que su fall-off en  $\tau \rightarrow \infty$  es como  $\Lambda(\tau, y) = \tau^{-1} \overset{(1)}{\Lambda}(y)$ . Por lo tanto los campos  $\chi$  y  $\Lambda$  tienen los mismos fall-offs que en dimensión 4. Luego,

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} k^{\tau a} = -\sqrt{h} h^{ab} \left( \partial^b \chi_{\mathcal{H}^+} \overset{(1)}{\Lambda} - \chi_{\mathcal{H}^+} \partial^b \overset{(1)}{\Lambda} \right) \quad (\text{A.58})$$

donde  $h_{ab}$  es la métrica en  $\mathcal{H}^+$  y,

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \nabla_a k^{\tau a} = -\sqrt{h} \left( D^2 \chi_{\mathcal{H}^+} \overset{(1)}{\Lambda} - \chi_{\mathcal{H}^+} D^2 \overset{(1)}{\Lambda} \right) \quad (\text{A.59})$$

Con las ecuaciones A.27 y A.31 se puede observar que  $D^2 \overset{(1)}{\Lambda} = -(2m-1) \overset{(1)}{\Lambda}$ :

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \nabla_a k^{\tau a} = -\sqrt{h} \left( (D^2 + (2m-1)) \chi_{\mathcal{H}^+} \overset{(1)}{\Lambda} \right) = -\sqrt{h} \left( j \overset{(1)}{\Lambda} \right) \quad (\text{A.60})$$

Finalmente,

$$Q_{\mathcal{H}^+} = - \int_{\mathcal{H}^+} j \overset{(1)}{\Lambda} \quad (\text{A.61})$$

que coincide con el segundo término en A.37. Hemos obtenido entonces la carga promediada como un flujo de una densidad de corriente conservada. De modo que el resultado obtenido en dimensión 4 es general a cualquier dimensión par.

## A.4. Cargas asintóticas en una teoría $\chi^3$

### A.4.1. Factorización Infrarroja y Carga asociada

Trabajamos en esta sección en una teoría con un campo escalar de Klein-Gordon sin masa que tienen un lagrangiano de interacción dado por la ecuación A.1.

$$L^{int} = -\frac{g}{3!}\chi^3 \quad (\text{A.1})$$

siendo  $g$  la constante de acoplamiento y  $\chi$  el campo escalar. Trabajaremos como en la sección anterior en dimensión par  $2m + 2$  y haremos un análisis similar al realizado en la teoría con el campo escalar  $\phi$ , encontrando la carga relacionada a la Factorización Infrarroja y su función asociada  $\sigma(\hat{x})$ . El operador  $Q(\hat{q})$  obtenido a partir de la Factorización Infrarroja es

$$Q[\hat{q}] = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w}{2} (a_{w\hat{q}}^* + a_{w\hat{q}}) - \int \frac{d^{2m+1}p}{(2\pi)^{2m+1}} \frac{1}{2E_p} \frac{g}{2p \cdot (1, \hat{q})} (a_p^* a_p) \quad (\text{A.2})$$

Suponemos que el campo  $\chi$  tiene la expansión en el infinito nulo dada por A.5. La ecuación de movimiento ahora es  $\square\chi = -g\chi^2$ , por lo que tenemos la misma relación de recurrencia entre los campos  $\varphi_n$  que en A.6, excepto por el término  $n = m - 1$ :

$$\partial_u \varphi_{m-1} = -\frac{1}{2(m-1)} [D^2 - 2(m-1)] \varphi_{m-2} - \frac{g}{4(m-1)} \varphi_0^2 \quad (\text{A.3})$$

donde  $\varphi_0$  serían los datos libres. Definimos para esta teoría la densidad de carga angular  $\sigma(\hat{x})$  como en A.9, teniendo también una forma como en A.15. Además tenemos los mismos fall-off de la ecuación A.7, lo que nos permite escribir  $\partial_u \varphi_{m-1}(u, \hat{x})$  como

$$\partial_u \varphi_{m-1} = \frac{1}{(-2)^{m-1} (m-1)!} \prod_{n=1}^{m-1} \Delta_n \left[ \int_{-\infty}^u du \right]^{m-2} \phi_0 - \frac{g}{4(m-1)} \varphi_0^2 \quad (\text{A.4})$$

De este modo, a partir de A.4, el término lineal en los datos libres  $\phi_0$  es el que contribuye a  $Q_{soft}$ , como en A.24, mientras que el término cuadrático nos da  $Q_{hard}$ . Nos faltaría entonces comprobar la última de estas relaciones. El término cuadrático de la integral en el lado izquierdo de A.15 es:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g}{4(m-1)} \varphi_0^2(u, \hat{x}) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g}{4(m-1)} \varphi_0(u, \hat{x}) \varphi_0^*(u, \hat{x}) du \quad (\text{A.5})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g}{4(m-1)} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}_0(E, \hat{x}) e^{-iEu} \frac{dE}{2\pi} \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}_0(-E', \hat{x}) e^{iE'u} \frac{dE'}{2\pi} \right) du \quad (\text{A.6})$$

$$= \frac{g}{4(m-1)} \int_0^\infty \frac{dE}{2\pi} \tilde{\varphi}_0(E, \hat{x}) \tilde{\varphi}_0(-E, \hat{x}). \quad (\text{A.7})$$

Sustituyendo A.22 en A.7 tenemos,

$$\boxed{\sigma_{hard}(\hat{x}) = \frac{g}{8(m-1)(2\pi)^{2m}} \int_0^\infty \frac{dE}{2\pi} E^{2m-2} a^*(E\hat{x}) a(E\hat{x})} \quad (\text{A.8})$$

Finalmente tendríamos,

$$\boxed{\sigma_{hard}(\hat{x}) = \mathbb{K} Q_{hard}(\hat{x})} \quad (\text{A.9})$$

Terminamos así de escribir el operador  $Q[\hat{x}]$  en función de los campos asintóticos.

## B. Algunos cálculos detallados

### B.1. Demostración Método Fase Estacionaria

Vamos ahora a demostrar aquí el resultado 2.77, es decir, el método de Fase Estacionaria para dimensión mayor a uno. Para eso supongamos que la fase  $f(x)$  posee solo un punto estacionario  $x_0$  no degenerado dentro de  $D$  y del soporte de  $g(x)$ . Por no degenerado nos referimos a que la matriz Hessiana de  $f$  tiene determinante distinto de cero en  $x_0$ :

$$A = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \Big|_{x=x_0} \quad ; \quad \det(A) \neq 0$$

Bajo estas condiciones, el *lema de Morse* nos dice que en un entorno de  $x_0$  la función  $f$  puede ser escrita de una forma canónica muy simple tras un cambio de coordenadas.

**Lema de Morse:** Sea  $f(x)$  es una función real  $C^\infty$  en un entorno del punto estacionario  $x_0$  no degenerado. Entonces existen entornos  $U, V$  de los puntos  $y = 0, x = x_0$  y un difeomorfismo  $h : U \rightarrow V, C^\infty$ , tal que

$$(f \circ h)(y) = f(x_0) + \langle Ay, y \rangle / 2 \quad (\text{B.1})$$

Y el jacobiano de la transformación satisface:

$$\left( \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right) \Big|_{y=0} = 1$$

Un difeomorfismo  $h : U \rightarrow V$ , siendo  $U, V$  entornos abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , satisface que es diferenciable y posee una inversa  $h^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciable.

Queremos, para las secciones siguiente, demostrar que el primer término en la expansión de 2.76, en el límite  $\lambda \rightarrow \infty$ , es igual a 2.77.

**Teorema 1:** Si  $g$  tiene soporte en  $D$  y  $f$  tiene solo un punto estacionario  $x_0$  no degenerado en el soporte de  $g$ , entonces la integral 2.76 tiene una expansión asintótica y su primer término está dado por 2.77.

**Demostración:** Usando la ecuación B.1 podemos escribir 2.76 como:

$$I(\lambda) = \exp[i\lambda f(x_0)] \int_{D'} \theta(y) \exp\left(i\frac{\lambda}{2} \langle Ay, y \rangle\right) dy \quad (\text{B.2})$$

donde  $D$  es la imagen de  $D'$  y  $\theta$  es el producto del jacobiano de la transformación. Definimos  $\psi$  como

$$\psi(y) = \exp\left(-\frac{i\lambda}{2} \langle Ay, y \rangle\right) \quad (\text{B.3})$$

Si consideramos el producto B.2 como el producto interno entre  $\psi$  y  $\phi$ , podemos usar la fórmula de Parseval:

$$\int \psi\phi^* = \int \tilde{\psi}\tilde{\phi}^* \quad (\text{B.4})$$

donde  $\tilde{\psi}$  y  $\tilde{\phi}$  son las transformadas de Fourier correspondientes, definidas como:

$$\tilde{\phi}(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) e^{i\eta \cdot y} dy$$

La transformada de Fourier de  $\exp(-\epsilon z^2/2)$ , con  $\text{Re}(\epsilon) \geq 0$  y  $\epsilon \neq 0$ , es  $\exp(-\eta^2/2\epsilon)/\sqrt{\epsilon}$ , siendo  $\sqrt{\epsilon}$  definida para  $\text{Re}(\epsilon) \geq 0$  de modo que es igual a 1 cuando  $\epsilon = 1$ . Luego, para  $\epsilon_j$  real y distinto de cero, tenemos la transformada de Fourier,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{i\lambda}{2} \sum \epsilon_j z_j^2\right) \exp(i\eta \cdot z) dz = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n/2} \left|\prod_{j=1}^n \epsilon_j\right|^{-1/2} \exp\left(-\frac{i\pi}{4} \sum \text{sgn}(\epsilon_j) + \frac{i}{2\lambda} \sum_{j=1}^n \epsilon_j^{-1} \eta_j^2\right) \quad (\text{B.5})$$

Podemos pensar en los  $\epsilon_j$  como los valores propios de la matriz  $A$ , al ser ésta real y simétrica. Por lo tanto podemos pensar en el vector  $z$  de modo que se cumple, ver [62],

$$\langle Ay, y \rangle = \sum_{j=1}^n \epsilon_j z_j^2 \quad (\text{B.6})$$

Además tenemos  $\det(A) = \prod \epsilon_j$ ,  $\sum \text{sgn}(\epsilon_j) = \sigma$ , luego usando B.6 y B.5,

$$\tilde{\psi}(\eta) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n/2} |\det(A)|^{-1/2} \exp\left(-\frac{i\pi\sigma}{4} + \frac{i}{2\lambda} \sum_{j=1}^n \epsilon_j^{-1} (P^T \eta_j)^2\right) \quad (\text{B.7})$$

donde  $P^T$  corresponde a la traspuesta de la matriz ortogonal  $P$ :  $z = Py$ . Podemos escribir también:

$$\langle A^{-1}\eta, \eta \rangle = \sum_{j=1}^n \epsilon_j^{-1} (P^T \eta_j)^2$$

Luego, usando B.2

$$I(\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n/2} |\det(A)|^{-1/2} \exp\left[-\frac{i\pi\sigma}{4} + i\lambda f(x_0)\right] \int \tilde{\theta}(\eta) \exp\left(-\frac{i}{2\lambda} \langle A^{-1}\eta, \eta \rangle\right) d\eta \quad (\text{B.8})$$

Usando la fórmula de Taylor:

$$\exp\left(-\frac{i}{2\lambda} \langle A^{-1}\eta, \eta \rangle\right) = 1 + R_1 \quad (\text{B.9})$$

donde

$$R_1 = \frac{1}{\lambda} \sum_{|a|=2} \frac{1}{a!} \eta^a \exp\left(-\frac{i}{2} \langle A^{-1}w, w \rangle\right) \Big|_{w=\tilde{w}} \quad ; \quad \eta = \sqrt{\lambda}w \quad (\text{B.10})$$

siendo  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $|a| = a_1 + \dots + a_n$  y  $\tilde{w}$  estando en el segmento de línea que une 0 y  $w$ . Se puede observar que la transformada de Fourier inversa de  $\int \tilde{\theta}(\eta) d\eta$  es  $(2\pi)^{n/2}\theta(0)$ , por lo tanto

$$\int \tilde{\theta}(\eta) \exp\left(-\frac{i}{2\lambda} \langle A^{-1}\eta, \eta \rangle\right) d\eta = (2\pi)^{n/2} + O(\lambda^{-1}) \quad (\text{B.11})$$

Así es como el primer término de la expansión es el mostrado en la ecuación 2.77 y es de orden  $O(\lambda^{-n/2})$ .

## B.2. Ecuación 5.4

Veremos que  $\overset{(1)}{\Lambda}$  satisface:

$$\begin{cases} (D^2 + 1) \overset{(1)}{\Lambda} = 0 \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} \overset{(1)}{\Lambda} = \frac{Ln(\rho)}{\rho} \lambda_+ \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

Sea  $\sigma = Y.q$ , tenemos:

$$(D^2 + 1)f(\sigma) = \sigma^2 f''(\sigma) + 3\sigma f'(\sigma) + f(\sigma) = 0$$

Si  $f(\sigma) = \sigma^n$  es solución, entonces  $n = -1$  con lo que se demuestra la primera ecuación. Tenemos la siguiente igualdad:



$$-\frac{1}{4\pi} \int d^2\hat{q} \frac{1}{Y.q} = \frac{\operatorname{arcsinh}(\rho) - \operatorname{arcsinh}(-\rho)}{2\rho}$$

que en el límite  $\rho \rightarrow \infty$  se comporta como

$$\sim \frac{\operatorname{Ln}(\rho)}{\rho}$$

Sumado al comportamiento en el límite:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{Y.q} = \begin{cases} O(1/\rho) (\hat{x} \neq \hat{q}) \\ O(\rho) (\hat{x} = \hat{q}) \end{cases}$$

Podemos entonces decir:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{Y.q} = \frac{\operatorname{Ln}(\rho)}{\rho} \delta(\hat{x} - \hat{q})$$

Que prueba la segunda ecuación.

### B.3. Ecuación 5.12

Veremos que  $\Lambda^{(2)}$  satisface:

$$\begin{cases} (D^2 - 1) \Lambda^{(2)} = 0 \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} \Lambda^{(2)} = \frac{\operatorname{Ln}(\tau)}{\tau} \lambda_+ \end{cases}$$

Tomamos  $\sigma = Y.q = -\tau + \sqrt{1 + \tau^2} \hat{x} \hat{q}$ ,

$$(D^2 - 1)f(\sigma) = -\sigma^2 f''(\sigma) - 3\sigma f'(\sigma) - f(\sigma) = 0$$

Si  $f(\sigma) = \sigma^n$  es solución, entonces  $n = -1$  con lo que se demuestra la primera ecuación. Tenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{4\pi} \int d^2\hat{q} \frac{1}{Y.q} = \frac{\operatorname{arcsinh}(\tau) - \operatorname{arcsinh}(-\tau)}{2\sqrt{1 + \tau^2}}$$

que en el límite  $\tau \rightarrow +\infty$  se comporta como

$$\sim \frac{\operatorname{Ln}(\tau)}{\tau}$$

Sumado al comportamiento en el límite:

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{Y.q} = \begin{cases} O(1/\tau) & (\hat{x} \neq \hat{q}) \\ O(\tau) & (\hat{x} = \hat{q}) \end{cases}$$

Podemos entonces decir:

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{Y.q} = \frac{Ln(\tau)}{\tau} \delta(\hat{x} - \hat{q})$$

Que prueba la segunda ecuación.

Análogamente para el caso en que  $\tau \rightarrow -\infty$  tenemos:

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \frac{1}{4\pi} \int d^2\hat{q} \frac{1}{Y.q} = \frac{Ln(-\tau)}{\tau}$$

Luego,

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \frac{1}{Y.q} = \frac{Ln(-\tau)}{\tau} \delta(\hat{x} - \hat{q})$$

#### B.4. Ecuación 5.24

Para obtener el comportamiento de  $\Lambda$  en  $I^+$  usamos el comportamiento asintótico ya calculado de  $\Lambda$  en  $\mathcal{H}^+$ , ecuaciones 5.4 y 5.5:

$$\Lambda(x) = \frac{\overset{(1)}{\Lambda}(y)}{\tau} = \frac{1}{\rho\tau} (Ln(\rho)\lambda(\hat{x}) + O(\rho^{-1})) \quad (\text{B.13})$$

Si escribimos las coordenadas de  $\mathcal{H}^+$  en función de las coordenadas en  $\mathcal{I}^+$ ,

$$\rho\tau = r \quad \rho = \frac{r}{\sqrt{2ur + u^2}} = \sqrt{\frac{r}{2u}} (1 + O(r^{-1})) \quad (u > 0) \quad (\text{B.14})$$

$$\rightarrow Ln(\rho) = \frac{Ln(r)}{2} - \frac{Ln(2u)}{2} \quad (u > 0) \quad (\text{B.15})$$

Luego

$$\Lambda(\hat{x}) = \frac{\lambda(\hat{x})}{2r} (Ln(r) - Ln(2u) + O(r^{-1/2})) \quad (u > 0) \quad (\text{B.16})$$

Para el caso en que  $u < 0$ , se observa el comportamiento asintótico de  $\Lambda$  en el infinito espacial:

$$\Lambda(x) = \frac{\overset{(2)}{\Lambda}(y)}{\rho} = \frac{1}{\rho\tau} (Ln(\tau)\lambda(\hat{x}) + O(\tau^{-1})) \quad (\text{B.17})$$

Se escriben las coordenadas de  $\mathcal{H}^0$  en términos de las coordenadas en  $\mathcal{I}^+$ :

$$\rho\tau = r + u; \quad \tau = \frac{r + u}{\sqrt{-2ur - u^2}} = \sqrt{\frac{r}{-2u}}(1 + O(r^{-1})) \quad (u < 0) \quad (\text{B.18})$$

$$\Lambda(\hat{x}) = \frac{\lambda(\hat{x})}{2r} (Ln(r) - Ln(-2u) + O(r^{-1/2})) \quad (u < 0) \quad (\text{B.19})$$

Por lo tanto obtenemos la ecuación 5.24.

## B.5. Operador inverso de $\mathbb{K}$

El operador  $\mathbb{K}$  se define como (con  $m > 1$ ):

$$\mathbb{K} := -\frac{1}{(-4\pi)^m(m-1)!} \prod_{n=1}^{m-1} \Delta_n \quad (\text{B.20})$$

siendo  $\Delta_n := D^2 - \beta_n$ ;  $\beta_n = (m-n)(m+n-1)$  y  $D^2$  el D'Alembertiano de la esfera  $S^{2m}$ . Debido a que el operador  $D^2$  no tiene como valor propio a cero, entonces el operador  $\mathbb{K}$  tiene inverso. Para hallarlo primero buscamos el operador inverso a  $\Delta_1$ , es decir la función de Green que satisface:

$$\Delta_1 G_1(\hat{q}, \hat{x}) = \delta^{2m}(\hat{q}, \hat{x}) \quad (\text{B.21})$$

Como la  $\delta^{2m}(\hat{q}, \hat{x})$  tiene solo un grado de libertad podemos pensar que a la función  $G_1$  le pasa lo mismo. Luego  $G_1$  puede depender solo de la distancia entre  $\hat{x}$  y  $\hat{q}$ , que podemos tomar como un ángulo  $\theta$ . Así parametrizamos la esfera de modo que la métrica en la misma sea:

$$d\Omega_{2m}^2 = d\theta^2 + \text{sen}(\theta)^2 \cdot d\Omega_{2m-1}^2$$

con  $\theta$  entre 0 y  $\pi$ , ver figura 12. Pasamos a escribir ahora el operador  $D^2$  de  $S^{2m}$  y para eso definimos la variable  $u = \cos(\theta)$ . Luego la métrica se escribe,

$$d\Omega_{2m}^2 = \frac{du^2}{1-u^2} + (1-u^2) \cdot d\Omega_{2m-1}^2$$

Si llamamos  $h_{ab}$  a la métrica en  $S^{2m}$  tenemos que el determinante es  $h = (1-u^2)^{2m-1}q$ , siendo  $q$  el determinante de  $S^{2m-1}$ .

Y el D'Alembertiano aplicado a una función escalar  $f(u)$  (solo dependiente de la variable  $u$ ) lo calculamos como,

$$D^2 f(u) = \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_u \left( \sqrt{h} h^{uu} \partial_u f \right) = (1-u^2) \partial_u^2 f - 2m u \partial_u f \quad (\text{B.22})$$

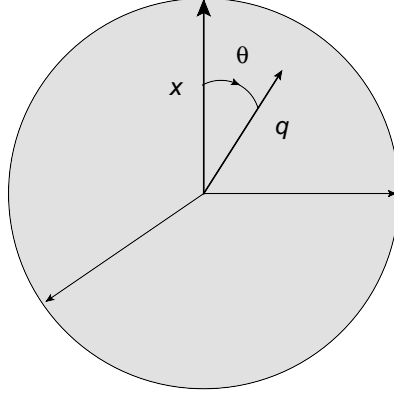


Figura 12: Representación de la parametrización de la esfera  $S^{2m}$  utilizada.

La ecuación B.21 para  $u \neq 0$  sería,

$$\boxed{(1 - u^2)\partial_u^2 f - 2m u \partial_u f = m(m - 1)f} \quad (\text{B.23})$$

Si suponemos  $f(u) = (1 - u^2)^s$  entonces  $s = 1 - m$ . Luego solo nos falta que se satisfaga la condición de la delta de Dirac. Para eso definimos una nueva variable  $p = 1 - u$  e integramos la ecuación B.21 de ambos lados en un entorno de radio  $p = \epsilon$ , que llamaremos  $V$ . Calculamos primero la integral del término en  $D^2$  en una función  $G_1(u) = A(1 - u^2)^{1-m}$ , para  $A$  constante a determinar,

$$\int_V d^{2m} \hat{x} \sqrt{h} D^a D_a G_1 = \oint_{\partial V} d^{2m-1} \hat{x} \sqrt{q} [\epsilon(2 - \epsilon)]^{m-1/2} D_a G_1 . n^a \quad (\text{B.24})$$

donde,

$$D_a G_1 . n^a = A \sqrt{p(2-p)} \partial_p G_1$$

Cuando hacemos el límite en que  $\epsilon$  tiende a cero la ecuación B.24 se transforma en:

$$A \left( \oint_{\partial V} d^{2m-1} \hat{x} \sqrt{q} \right) 2^m \epsilon^0 (1 - m) = -A(m - 1) 2^m \text{Vol}(S^{2m-1})$$

$$\text{Vol}(S^{2m-1}) = \frac{2\pi^m}{(m - 1)!}$$

Tras observar que la integral de los términos  $\beta_1 G_1$  y  $\delta^{2m}(\hat{q}, \hat{x})$  son cero y uno respectivamente, en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ , tenemos:

$$A = -\frac{1}{(m-1)2^m \text{Vol}(S^{2m-1})}$$

Luego,

$$G_1(\hat{q}, \hat{x}) = -\frac{1}{(m-1)2^m \text{Vol}(S^{2m-1})} (1 - \hat{q} \cdot \hat{x})^{1-m} \quad (\text{B.25})$$

Pensemos en el caso  $m = 2$ , donde tendríamos  $\mathbb{K} = -(4\pi)^{-2} \Delta_1$  y por lo tanto  $K^{-1} = -(4\pi)^2 G_1 = 2(1 - \hat{q} \cdot \hat{x})^{-1}$ , coincidiendo con la expresión de  $K^{-1}$  en A.13. Para  $m > 2$  podemos aprovechar la siguiente relación para hallar  $K^{-1}$ :

$$\Delta_{m-p}(1 - \hat{q} \cdot \hat{x})^{-p} = 2p(p+1-m)(1 - \hat{q} \cdot \hat{x})^{-(p+1)} \quad (\text{B.26})$$

Luego, si aplicamos la relación B.26 reiteradas veces sobre  $(1 - \hat{q} \cdot \hat{x})^{-1}$ ,

$$\prod_{n=2}^{m-1} \Delta_n (1 - \hat{q} \cdot \hat{x})^{-1} = (-1)^m 2^{m-2} (m-2)!^2 (1 - \hat{q} \cdot \hat{x})^{1-m} \quad (\text{B.27})$$

Finalmente aplicando el operador  $\Delta_1$  sobre B.27 y haciendo uso de las ecuaciones B.25 y B.21 obtenemos:

$$\mathbb{K}(1 - \hat{q} \cdot \hat{x})^{-1} = \frac{1}{2(m-1)} \delta^{(2m)}(\hat{q}, \hat{x})$$

donde otra vez llegamos a la expresión para  $K^1$  en A.13.

## B.6. Continuidad infinito temporal-nulo

La idea para obtener la relación entre los campos asintóticos en el infinito temporal y nulo se basa en transformar unas coordenadas en otras haciendo las variables no angulares tender a infinito. Pensemos en la expansión del campo  $\chi$  en el infinito nulo,  $r \rightarrow \infty$ , como en A.5:

$$\chi(r, u, \hat{x}) = r^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n} \varphi_n(u, \hat{x}) \quad (\text{B.28})$$

donde a priori se extiende  $n$  hasta infinito. Cada  $\chi_n(u, \hat{x})$  se comporta en  $u \rightarrow \infty$  como en A.7,

$$\varphi_n(u, \hat{x}) = \varphi_n^+(\hat{x}) u^{n-(m-1)-\epsilon} + \delta_{nm-1} \sigma^{hard}(\hat{x}) \quad (\text{B.29})$$

El primer término en el límite  $r \rightarrow \infty, u \rightarrow \infty$  del campo  $\chi$  estaría dado entonces por,

$$\chi = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(m+n)} u^{n-(m-1)-\epsilon} \varphi_n^+(\hat{x}) + r^{-(2m-1)} \sigma^{hard}(\hat{x}) + \dots \quad (\text{B.30})$$

Ahora es cuando transformamos las variables a las del infinito temporal a través de las siguientes relaciones:

$$r = \rho\tau, \quad u = \tau(\sqrt{1+\rho^2} - \rho) = \frac{\tau}{2\rho} + O(\rho^{-3}) \quad (\text{B.31})$$

Sustituyendo en B.30 y manteniendo solo los términos a primer orden en los límites  $\tau \rightarrow \infty, \rho \rightarrow \infty$  tenemos,

$$\chi = \frac{1}{\tau^{2m-1} \rho^{2m-1}} \sigma^{hard}(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{\tau^{2m-1+\epsilon}}\right) + \dots \quad (\text{B.32})$$

Como en el límite  $\tau \rightarrow \infty, \rho = cte$ ,  $\chi$  estaba dado por

$$\chi(\tau, \rho, \hat{x}) = \frac{\chi_{\mathcal{H}^+}(\rho, \hat{x})}{\tau^{2m-1}} + O\left(\frac{1}{\tau^{2m-1+\epsilon}}\right) \quad (\text{B.33})$$

Entonces por último,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^{2m-1} \chi_{\mathcal{H}^+}(\rho, \hat{x}) = \sigma^{hard}(\hat{x}). \quad (\text{B.34})$$

## B.7. Comportamiento infinito espacial en $2m+2$

Veamos el comportamiento asintótico del campo  $\chi$  en el límite en que  $\rho$  tiende a infinito, en coordenadas del infinito espacial. Lo que sabemos de este campo es que tiene que satisfacer  $\square\chi = 0$  en  $\mathcal{H}^0$ , por lo que calculamos el operador  $\square$ . La métrica se escribe como,

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\sigma^2 = d\rho^2 + \rho^2 \left( \frac{-d\tau^2}{1+\tau^2} + (1+\tau^2) q_{AB} dx^A dx^B \right)$$

donde  $d\sigma^2 = h_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$  es la métrica de  $\mathcal{H}^0$ . Luego tenemos,

$$\square = + \nabla_\rho \nabla_\rho + \rho^{-2} h^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta$$

Para  $\alpha \neq \tau$  y  $\beta \neq \tau$ ,

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta \chi = \frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha \partial \beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\epsilon \left( \frac{\partial \chi}{\partial \epsilon} \right) = D_\alpha D_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \left( \frac{\partial \chi}{\partial \rho} \right)$$

donde  $D_\alpha$  es el operador  $\nabla_\alpha$  en la métrica en  $\mathcal{H}^0$

Conociendo  $\Gamma_{\rho\rho}^\rho = 0$ ,  $\Gamma_{\rho\rho}^\alpha = 0$  y  $\Gamma_{\alpha\beta}^\rho = -\rho h_{\alpha\beta}$  y además que la traza de  $h$  es  $2m + 1$  tenemos:

$$\square\chi = \partial_\rho^2\chi + (2m + 1)\rho^{-1}\partial_\rho\chi + \rho^{-2}D^2\chi$$

Si suponemos que  $\chi$  tiene la forma asintótica:

$$\chi = \frac{\chi_{\mathcal{H}^0}(\tau, \hat{x})}{\rho^{2m-1}}$$

Entonces el campo  $\chi_{\mathcal{H}^0}$  satisface:

$$\boxed{(D^2 - (2m - 1))\chi_{\mathcal{H}^0} = 0}$$

siendo  $D^2$  el D'Alembertiano en  $\mathcal{H}^0$ . Si ahora además buscamos cómo es el comportamiento de  $\chi_{\mathcal{H}^0}$  en el límite  $\tau \rightarrow \infty$ , entonces necesitamos hallar el operador  $D^2$ :

$$D^2 = h^{\tau\tau} (\partial_\tau^2 - \Gamma_{\tau\tau}^\epsilon(\partial_\epsilon)) + h^{AA} (\partial_A^2 - \Gamma_{AA}^\epsilon(\partial_\epsilon)) + h^{BB} (\partial_B^2 - \Gamma_{BB}^\epsilon(\partial_\epsilon))$$

Tras calcular los símbolos de Christoffel,

$$\begin{aligned} D^2 = & -(1 + \tau^2) \left( \partial_\tau^2 + \frac{\tau}{1 + \tau^2}(\partial_\tau) \right) + \frac{q_{AA}^{-1}}{1 + \tau^2} (\partial_A^2 - \tau(1 + \tau^2)q_{AA}(\partial_\tau)) \\ & + \frac{q_{BB}^{-1}}{1 + \tau^2} (\partial_B^2 - \tau(1 + \tau^2)q_{BB}(\partial_\tau)) + \dots \end{aligned}$$

Luego tendríamos en el límite:

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} (D^2 - (2m - 1))\chi_{\mathcal{H}^0} = (-\tau^2\partial_\tau^2 - (2m + 1)\tau\partial_\tau - (2m - 1))\chi_{\mathcal{H}^0} = 0$$

Entonces en el límite,

$$\boxed{\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \chi_{\mathcal{H}^0}(\tau, \hat{x}) = \frac{\chi_+(\hat{x})}{\tau^{2m-1}} + \dots}$$

## Referencias

- [1] Miguel Campiglia, Leonardo Coito, and Sebastian Mizera. Can scalars have asymptotic symmetries? *Phys. Rev. D*, 97:046002, Feb 2018.
- [2] Miguel Campiglia and Leonardo Coito. Asymptotic charges from soft scalars in even dimensions. *arXiv preprint arXiv:1711.05773 (En proceso de referato en PRD)*, 2017.
- [3] A Zee. Qft in a nutshell, 2010.
- [4] Andrew Strominger. Lectures on the infrared structure of gravity and gauge theory. *arXiv preprint arXiv:1703.05448*, 2017.
- [5] Michael E Peskin and Daniel V Schroeder. An introduction to quantum field theory (boulder, co, 1995).
- [6] Andrew Strominger. Asymptotic symmetries of yang-mills theory. *Journal of High Energy Physics*, 2014(7):151, 2014.
- [7] Andrew Strominger. On bms invariance of gravitational scattering. *Journal of High Energy Physics*, 2014(7):152, 2014.
- [8] Hermann Bondi, MGJ Van der Burg, and AWK Metzner. Gravitational waves in general relativity. vii. waves from axi-symmetric isolated systems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, pages 21–52, 1962.
- [9] Rainer K Sachs. Gravitational waves in general relativity. viii. waves in asymptotically flat space-time. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 270, pages 103–126. The Royal Society, 1962.
- [10] Temple He, Prahar Mitra, Achilleas P Porfyriadis, and Andrew Strominger. New symmetries of massless qed. *Journal of High Energy Physics*, 2014(10):112, 2014.
- [11] Temple He, Prahar Mitra, and Andrew Strominger. 2d kac-moody symmetry of 4d yang-mills theory. *Journal of High Energy Physics*, 2016(10):137, 2016.
- [12] Daniel Kapec, Monica Pate, and Andrew Strominger. New symmetries of qed. *arXiv preprint arXiv:1506.02906*, 2015.
- [13] Miguel Campiglia and Alok Laddha. Asymptotic symmetries of QED and Weinbergs soft photon theorem. *JHEP*, 07:115, 2015.



- [14] Glenn Barnich and Cédric Troessaert. Comments on holographic current algebras and asymptotically flat four dimensional spacetimes at null infinity. *Journal of High Energy Physics*, 2013(11):3, 2013.
- [15] Daniel Grumiller, Mauricio Leston, and Dmitri Vassilevich. Anti-de sitter holography for gravity and higher spin theories in two dimensions. *Physical Review D*, 89(4):044001, 2014.
- [16] Arif Mohd. A note on asymptotic symmetries and soft-photon theorem. *Journal of High Energy Physics*, 2015(2):60, 2015.
- [17] Carlos Cardona. Asymptotic symmetries of yang-mills with theta term and monopoles. *arXiv preprint arXiv:1504.05542*, 2015.
- [18] Tim Adamo and Eduardo Casali. Perturbative gauge theory at null infinity. *Physical Review D*, 91(12):125022, 2015.
- [19] Ali Seraj. Multipole charge conservation and implications on electromagnetic radiation. *Journal of High Energy Physics*, 2017(6):1–23, 2017.
- [20] Barak Gabai and Amit Sever. Large gauge symmetries and asymptotic states in qed. *Journal of High Energy Physics*, 2016(12):95, 2016.
- [21] Felix Bloch and Arnold Nordsieck. Note on the radiation field of the electron. *Physical Review*, 52(2):54, 1937.
- [22] Francis E Low. Scattering of light of very low frequency by systems of spin 1/2. *Physical Review*, 96(5):1428, 1954.
- [23] Murray Gell-Mann and ML Goldberger. Scattering of low-energy photons by particles of spin 1/2. *Physical Review*, 96(5):1433, 1954.
- [24] FE Low. Bremsstrahlung of very low-energy quanta in elementary particle collisions. *Physical Review*, 110(4):974, 1958.
- [25] E Kazes. Generalized current conservation and low energy limit of photon interactions. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 13(6):1226–1239, 1959.
- [26] DR Yennie, Steven C Frautschi, and H Suura. The infrared divergence phenomena and high-energy processes. *Annals of Physics*, 13(3):379–452, 1961.
- [27] Steven Weinberg. Infrared photons and gravitons. *Physical Review*, 140(2B):B516, 1965.
- [28] Ya B Zel'Dovich and AG Polnarev. Radiation of gravitational waves by a cluster of superdense stars. *Soviet Astronomy*, 18:17, 1974.

- [29] VB Braginskii and LP Grishchuk. Kinematic resonance and memory effects in free-mass gravitational antennas. *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, 89:744–750, 1985.
- [30] Kip S Thorne and VB Braginskii. Gravitational-wave bursts from the nuclei of distant galaxies and quasars-proposal for detection using doppler tracking of interplanetary spacecraft. *The Astrophysical Journal*, 204:L1–L6, 1976.
- [31] Demetrios Christodoulou. Nonlinear nature of gravitation and gravitational-wave experiments. *Physical review letters*, 67(12):1486, 1991.
- [32] Alan G Wiseman and Clifford M Will. Christodoulou’s nonlinear gravitational-wave memory: Evaluation in the quadrupole approximation. *Physical Review D*, 44(10):R2945, 1991.
- [33] Luc Blanchet and Thibault Damour. Hereditary effects in gravitational radiation. *Physical Review D*, 46(10):4304, 1992.
- [34] Lydia Bieri and David Garfinkle. An electromagnetic analogue of gravitational wave memory. *Classical and Quantum Gravity*, 30(19):195009, 2013.
- [35] Leonard Susskind. Electromagnetic memory. *arXiv preprint arXiv:1507.02584*, 2015.
- [36] Sabrina Pasterski. Asymptotic symmetries and electromagnetic memory. *Journal of High Energy Physics*, 2017(9):154, 2017.
- [37] Temple He, Vyacheslav Lysov, Prahar Mitra, and Andrew Strominger. Bms supertranslations and weinbergs soft graviton theorem. *Journal of High Energy Physics*, 2015(5):151, 2015.
- [38] Daniel Kapec, Vyacheslav Lysov, Sabrina Pasterski, and Andrew Strominger. Semiclassical virasoro symmetry of the quantum gravity s-matrix. *Journal of High Energy Physics*, 2014(8):58, 2014.
- [39] Miguel Campiglia and Alok Laddha. Asymptotic symmetries and subleading soft graviton theorem. *Physical Review D*, 90(12):124028, 2014.
- [40] Miguel Campiglia and Alok Laddha. New symmetries for the gravitational s-matrix. *Journal of High Energy Physics*, 2015(4):76, 2015.
- [41] Abhay Ashtekar. Geometry and physics of null infinity. *arXiv preprint arXiv:1409.1800*, 2014.
- [42] Jeffrey Winicour. Global aspects of radiation memory. *Classical and quantum gravity*, 31(20):205003, 2014.

- [43] Thomas T Dumitrescu, Temple He, Prahar Mitra, and Andrew Strominger. Infinite-dimensional fermionic symmetry in supersymmetric gauge theories. *arXiv preprint arXiv:1511.07429*, 2015.
- [44] Steven G Avery and Burkhard UW Schwab. Residual local supersymmetry and the soft gravitino. *Physical review letters*, 116(17):171601, 2016.
- [45] Vyacheslav Lysov. Asymptotic fermionic symmetry from soft gravitino theorem. *arXiv preprint arXiv:1512.03015*, 2015.
- [46] Andrea Campoleoni, Dario Francia, and Carlo Heissenberg. Asymptotic charges at null infinity in any dimension. *arXiv preprint arXiv:1712.09591*, 2017.
- [47] Andrea Campoleoni, Dario Francia, and Carlo Heissenberg. On higher-spin supertranslations and superrotations. *Journal of High Energy Physics*, 2017(5):120, 2017.
- [48] Alexander Tolish and Robert M Wald. Retarded fields of null particles and the memory effect. *Physical Review D*, 89(6):064008, 2014.
- [49] Pujian Mao and Hao Ouyang. Note on soft theorems and memories in even dimensions. *Physics Letters B*, 774:715–722, 2017.
- [50] Emmy Noether. Invarianten beliebiger differentialausdrücke. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse*, 1918:37–44, 1918.
- [51] Joohan Lee and Robert M Wald. Local symmetries and constraints. *Journal of Mathematical Physics*, 31(3):725–743, 1990.
- [52] Steven G Avery and Burkhard UW Schwab. Noethers second theorem and ward identities for gauge symmetries. *Journal of High Energy Physics*, 2016(2):31, 2016.
- [53] Sean M Carroll. *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*, volume 1. 2004.
- [54] Lord Kelvin. On ship waves. *Proc. Inst. Mech. Eng*, 3:409–434, 1887.
- [55] Roderick Wong. *Asymptotic approximations of integrals*. SIAM, 2001.
- [56] A Erdélyi. Asymptotic representations of fourier integrals and the method of stationary phase. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 3(1):17–27, 1955.

- [57] Abhay Ashtekar. Asymptotic structure of the gravitational field at spatial infinity. 1978.
- [58] Abhay Ashtekar and Richard O Hansen. A unified treatment of null and spatial infinity in general relativity. i. universal structure, asymptotic symmetries, and conserved quantities at spatial infinity. *Journal of Mathematical Physics*, 19(7):1542–1566, 1978.
- [59] A Ashtekar and R Penrose. Mass positivity from focussing and the structure of  $io$ . *Twistor Newsletter*, 31:1–5, 1990.
- [60] Jan de Boer and Sergey N Solodukhin. A holographic reduction of minkowski space–time. *Nuclear Physics B*, 665:545–593, 2003.
- [61] Sabrina Pasterski and Shu-Heng Shao. A conformal basis for flat space amplitudes. *arXiv preprint arXiv:1705.01027*, 2017.
- [62] B Noble. Applied linear algebra, 1969.