



Tesis de Maestría en Física

# Formulación canónica sobre hipersuperficies nulas para relatividad general con simetría cilíndrica

Estructura integrable y el doble clásico como primer paso  
hacia la cuantización

Lic. Javier Peraza

Orientador: Dr. Michael Reisenberger  
Co-orientador: Dr. Miguel Paternain



## Resumen

En este trabajo estudiamos el formalismo canónico aplicado a ondas gravitacionales con simetría cilíndrica, en términos de datos iniciales libres de vínculos sobre hipersuperficies nulas: datos característicos libres.

En su forma actual los corchetes de Poisson de datos característicos libres, para relatividad general sin materia, son de considerable complejidad, dificultando su cuantización. La presencia de simetría cilíndrica simplifica el álgebra de Poisson en pequeña medida, pero reduce relatividad general sin materia a un modelo integrable que presenta un grupo de simetrías dinámicas enorme: el grupo de Geroch.

En este trabajo se muestra que el álgebra de Poisson de datos característicos libres en el modelo con simetría cilíndrica posee una estructura algebraica, a priori oculta, que podría facilitar sustancialmente su cuantización. Específicamente se muestra que el espacio de fase junto con el grupo de Geroch conforman una extensión central del doble clásico del grupo loop de  $SL(2, \mathbb{R})$ , estructura algebraica bien conocida cuya cuantización ha sido estudiado profundamente. Además, se presentan algunos resultados sobre esta cuantización, en particular, cómo parte de las simetrías dinámicas clásicas se mantienen a nivel cuántico.

## Abstract

In the present work we study the canonical formalism applied to gravitational waves with cylindrical symmetry, in terms of initial data free of constraints on null hypersurfaces: free characteristic data.

In their current form the Poisson brackets of free characteristic data for vacuum general relativity are quite complex, which makes their quantization difficult. Cylindrical symmetry simplifies the Poisson algebra only a little, but it reduces vacuum general relativity to an integrable model, with an enormous group of dynamical symmetries: the Geroch group.

In the present work, we show that the Poisson algebra of free characteristic data in the cylindrically symmetric model has a hidden algebraic structure, which in principle could facilitate quantization substantially. Specifically, we show that the phase space together with the Geroch group form a central extension of the classical double for the loop group of  $SL(2, \mathbb{R})$ , a well-known structure the quantization of which has been studied deeply. We also present some results concerning this quantization, in particular, the persistence of some classical dynamical symmetries at the quantum level.



# Índice

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Reducción dimensional de <math>n = 4</math> a <math>n = 2</math></b>	<b>6</b>
1.1. Objetivos	6
1.2. Notación y convenciones	6
1.3. Reducción Dimensional	7
1.4. Simetría Cilíndrica	11
1.5. Formulación sobre un espacio simétrico $G/H$	14
1.6. Geometría conforme	17
1.7. Ecuaciones de Movimiento	18
1.7.1. Gauge Conforme	21
1.7.2. Comentario sobre el exponente conforme	22
1.8. Datos iniciales sobre una doble hoja nula	23
<b>2. Estructura simpléctica</b>	<b>26</b>
2.1. Objetivos	26
2.2. Coordenadas sobre $\mathcal{N}$	26
2.2.1. Coordenadas $x^\pm$	27
2.2.2. Coordenadas $y^\pm$	29
2.3. Variaciones sobre el espacio de soluciones	29
2.4. Resultados generales	34
2.5. Potencial Simpléctico en términos de datos iniciales	37
2.5.1. Potencial simpléctico en la rama derecha	37
2.5.2. Potencial simpléctico en la rama izquierda	39
2.5.3. Potencial Simpléctico Total	40
2.6. 2-forma simpléctica en términos de datos iniciales	40
2.7. Métrica conforme y coeficientes de Beltrami	46
<b>3. Corchetes de Poisson para los datos iniciales</b>	<b>51</b>
3.1. Objetivos	51
3.2. Corchetes de Poisson: ¿por qué?	51
3.3. Estrategia de cálculo	52
3.4. $\{\rho_0, \hat{\sigma}_0\}$	53
3.5. $\{\rho_0, \mathcal{V}\}$	54
3.6. Corchetes de $\mathcal{V}$	55
3.7. $\{\hat{\sigma}_0, \mathcal{V}(x)\}$	56

3.7.1.	$x \in \mathcal{N}_R \setminus S_0$	56
3.7.2.	$y \in \mathcal{N}_L \setminus S_0$	58
3.7.3.	$\{\hat{\sigma}_0, \mathcal{V}(0)\}$	58
3.8.	Comparación con [37]	60
<b>4.</b>	<b>Integrabilidad y Grupo de Geroch</b>	<b>64</b>
4.1.	Objetivo	64
4.2.	Breve introducción a modelos integrables	64
4.2.1.	Modelo de Heisenberg	65
4.3.	Sistema lineal en el sector $\mathcal{V}$	70
4.3.1.	Divergencia en 4.65	73
4.4.	Álgebra de simetrías	73
4.4.1.	Lagrangeano de Ehlers	74
4.4.2.	Lagrangeano de Matzner-Misner	74
4.4.3.	Transformación de Kramer-Neugebauer	75
4.4.4.	Transformación de Kramer-Neugebauer extendida a $\hat{\mathcal{V}}$	75
4.4.5.	Construcción del álgebra de simetrías	76
4.5.	Matriz de Monodromía	77
4.6.	Extensión central a $\hat{\sigma}$	78
4.6.1.	Sistema lineal para la extensión central	79
4.7.	Acerca del sistema lineal que incluye $\rho$	79
<b>5.</b>	<b>Doble clásico y extensión central</b>	<b>81</b>
5.1.	Objetivos	81
5.2.	Definición de $\hat{\mathcal{V}}$ sobre $\mathcal{N}$	82
5.3.	Definición y variaciones de $\hat{\mathcal{V}}$ en la rama izquierda	82
5.4.	Corchete de $\hat{\sigma}_0$ con $\mathcal{M}$	84
5.5.	Estructura Lie-Poisson en el sector loop	85
5.5.1.	Acción Lie-Poisson del Grupo de Geroch sobre $\mathcal{M}(w)$	86
5.5.2.	Doble clásico para el sector loop	90
5.5.3.	Resultado	92
5.6.	Matriz de monodromía extendida	93
5.6.1.	Corchetes para $\tilde{\mathcal{M}}$	93
5.7.	Acción Lie-Poisson en el doble clásico extendido centralmente	98
<b>6.</b>	<b>Resultado sobre la cuantización del sistema</b>	<b>101</b>
6.1.	Cuantización de $\mathcal{M}(w)$	101
6.2.	Grupo de Geroch como simetría en la cuantización	101
<b>7.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>106</b>
<b>A.</b>	<b>Apéndice A: Miscelánea</b>	<b>108</b>
A.1.	Fórmulas para derivadas de Lie	108
A.2.	Variedades pseudo-Riemannianas	108
A.3.	Sistemas de coordenadas móviles y fijas	109

<b>B. Apéndice B: Álgebras de Kac-Moody</b>	<b>111</b>
B.1. Definiciones Básicas . . . . .	111
B.1.1. Elemento de Casimir . . . . .	114
B.2. Álgebras afines como extensiones centrales de álgebras loop . . . . .	114
B.2.1. Extensiones Centrales . . . . .	114
B.2.2. Álgebras Loop . . . . .	115
B.2.3. Ejemplo 1: $A_1^1$ . . . . .	117
B.2.4. Ejemplo 2: álgebra de Virasoro . . . . .	118
<b>C. Apéndice C: Doble clásico y cuantización por deformación</b>	<b>120</b>
C.1. Introducción: cuantización <i>a la</i> Drinfel'd . . . . .	120
C.2. Álgebras de Hopf . . . . .	120
C.3. Álgebras de Poisson . . . . .	122
C.4. Grupos Poisson-Lie y biálgebras de Lie . . . . .	123
C.5. Ejemplo: el doble clásico . . . . .	124
C.6. Clasificación de las soluciones a la EYB . . . . .	129
C.6.1. Soluciones EYB constantes . . . . .	130
C.6.2. Soluciones a la EYB con parámetro espectral . . . . .	130
C.7. Cuantización por deformación . . . . .	131
C.8. Ejemplo 1: cuantización de $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ . . . . .	132
C.9. Ejemplo 2: cuantización de álgebras de Kac-Moody . . . . .	133
C.10. Álgebras de Hopf quasi-trianguulares y ecuación RTT . . . . .	134
<b>D. Apéndice D: Yangianos</b>	<b>136</b>
D.1. Yangianos . . . . .	136
D.2. $Y(2)$ . . . . .	138
D.3. Doble Yangiano y extensión central . . . . .	139
<b>Bibliografía</b>	<b>143</b>

# Introducción

La presente tesis está enmarcada en el formalismo canónico de relatividad general con simetría cilíndrica en términos de datos iniciales sobre hipersuperficies nulas. El objetivo es extender y profundizar el trabajo de Fuchs y Reisenberger [19]: se muestra que el espacio de fase estudiado en [19] y el grupo de Geroch de simetrías del mismo juntos conforman el doble clásico del grupo loop  $\widehat{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})}$ , estructura algebraica conocida que admite una cuantización natural bien explorada [8], [11], [13], [14], [27], [43]. De hecho, esta estructura es casi idéntica a la presente en el modelo de spines de Heisenberg. También se hallan los corchetes de Poisson del conjunto completo de datos iniciales, incluyendo los omitidos en [19], y se demuestra cómo estos se pueden incorporar en una extensión natural del doble clásico, abriendo camino a su cuantización. Finalmente, se presentan algunos resultados sobre esta cuantización.

Nuestro trabajo se desarrolla dentro del área de gravedad cuántica. Como es bien sabido, construir una teoría cuántica de la gravedad es uno de los problemas centrales en la física teórica actual. A escalas macroscópicas, la teoría de relatividad general de Einstein muestra una concordancia excepcional entre las observaciones experimentales y las predicciones teóricas [51]. Sin embargo, al igual que las demás teorías para las interacciones fundamentales de la naturaleza, es esperable que una vez dentro de escalas suficientemente pequeñas, el comportamiento de la gravedad sea de carácter cuántico. Para tener una idea de la escala en la que los efectos cuánticos se harían manifiestos, debemos considerar las constantes de la teoría clásica, que en este caso son la constante de Newton  $G$  y la velocidad de la luz  $c$ , y además la constante que entra en toda teoría cuántica,  $\hbar$ , la constante de Planck. Análisis dimensional nos determina una longitud característica para la relatividad general:  $l_p := (G\hbar/c^3)^{1/2} \approx 10^{-35}m$ , denominada longitud de Planck. Todos los intentos de formular la gravedad como una teoría cuántica tienen en común que surge naturalmente  $l_P$  como escala en donde los efectos cuánticos se hacen notorios y la descripción clásica falla [25].

Tales escalas son tan lejanas a las escalas humanas que una verificación de las teorías cuánticas para la gravedad por métodos estándar, como por medio de aceleradores de partículas, es muy difícil de lograr; sin embargo, hay situaciones en las cuales estas escalas juegan un rol central. En entornos de ciertas singularidades de la teoría clásica, tales como en los centros de los agujeros negros y en el inicio del Big Bang, la curvatura espacio-temporal alcanza valores superiores a  $l_P^{-2}$ . Al mismo tiempo, las ecuaciones de campo de la teoría clásica carecen de sentido en la singularidad misma. Esto sugiere que una teoría cuántica de la gravedad es necesaria para

comprender el comienzo del Big Bang, posiblemente incidiendo en la explicación de la distribución de la materia a gran escala en el universo, y también para aclarar cómo se extiende la teoría clásica una vez que estamos cerca de la singularidad.

Entre los posibles caminos para enfrentar el problema de la cuantización de la gravedad, se encuentra el formalismo canónico. Toda teoría clásica viene munida de un espacio de fase y de corchetes de Poisson entre las funciones sobre este espacio, que son los observables de la teoría. El programa del formalismo canónico se puede formular de la siguiente manera: primero se obtiene el álgebra de Poisson entre una familia de observables suficientemente grande de manera que parametriza al espacio de fase, es decir, que pueden servir de coordenadas sobre éste; luego, se obtiene una cuantización algebraica de ésta: una  $C^*$ -álgebra que sea una  $\hbar$ -deformación del álgebra de Poisson clásica; finalmente se construye una representación de la  $C^*$ -álgebra sobre un espacio de Hilbert. Los vectores de este espacio de Hilbert serán los estados cuánticos del sistema en el sistema convencional [49], [11].

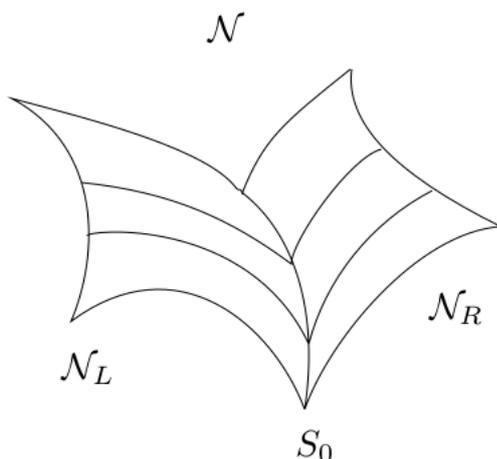


Figura 1: Doble hoja nula  $\mathcal{N}$ , formada por dos familias de geodésicas nulas  $\mathcal{N}_L$  y  $\mathcal{N}_R$  que parten hacia el futuro de una superficie  $S_0$ .

Dentro del formalismo canónico, nosotros trabajamos con un espacio de fase formado por datos iniciales sobre hipersuperficies nulas: en particular, usamos un tipo de hipersuperficie llamado una *doble hoja nula*. Esta es una hipersuperficie  $\mathcal{N}$  trazada por dos familias de geodésicas nulas que parten ortogonalmente hacia el futuro desde una superficie bidimensional  $S_0$ , ver figura 1. Estas geodésicas nulas se llaman *generadores* de  $\mathcal{N}$ . Para que las dos familias de geodésicas estén suavemente encajadas en la variedad, se truncan antes que formen cúspides o se crucen entre sí [38]. Los datos iniciales sobre  $\mathcal{N}$  determinan el campo gravitatorio en una región del espacio-tiempo futuro de  $\mathcal{N}$  [42], [10], [39].

Dos motivaciones nos llevan a querer profundizar en el estudio de la formulación de datos iniciales sobre doble hojas nulas: primero, se pueden definir de manera sencilla y natural datos iniciales que son libres y completos: no están sujetos a vínculos y, por tanto, cada valuación de ellos corresponde a una solución de las ecuaciones de campo, al mismo tiempo que alcanzan para definir la solución en una

región del espacio-tiempo [42], [10], [39]. Segundo, este enfoque provee de un marco ideal para testear los argumentos que apoyan el principio holográfico, propuesto por 't Hooft [45], Susskind [46] y Bousso [7], ya que la formulación de Bousso de la cota holográfica está planteado para datos sobre una rama de una doble hoja nula.

Siguiendo con el programa del formalismo canónico, en [38] y [37] se halló el álgebra de Poisson de un conjunto de datos iniciales libres y completos sobre  $\mathcal{N}$  para relatividad general en el vacío en  $3 + 1$  dimensiones. Los corchetes hallados son lo suficientemente sencillos como para poder ser escritos en una sola página, pero no muestran una estructura subyacente evidente y mucho menos un camino directo hacia su cuantización. Este es el problema central que atacamos en este trabajo.

En este sentido, el álgebra de Poisson presenta dos propiedades útiles: primero, los corchetes entre datos que no pertenecen al mismo generador de  $\mathcal{N}$  son nulos, y segundo, ciertos subconjuntos de datos iniciales forman subálgebras propias. Por la primera propiedad, el álgebra de Poisson general se reduce esencialmente a una suma directa donde cada sumando es el álgebra de Poisson de datos sobre un solo generador. Ver [19] para una explicación precisa.

Fuchs y Reisenberger notaron en [19] que el álgebra de Poisson sobre un solo generador de  $\mathcal{N}$  es, de hecho, el álgebra de Poisson de datos iniciales para relatividad general con simetría cilíndrica, sobre una doble hoja nula  $\mathcal{N}$  adaptada a esta simetría. Esto ofrece ciertas estructuras adicionales para organizar el álgebra de Poisson de los datos y abre un camino hacia la cuantización, porque la teoría de relatividad general con simetría cilíndrica (en el vacío) es una teoría integrable, y tiene un grupo de simetrías que actúa transitivamente sobre el espacio de soluciones, denominado *Grupo de Geroch*.

Diremos que una solución de relatividad general tiene simetría cilíndrica si existen dos campos de Killing espaciales que conmutan y son ambos ortogonales a una familia de superficies bidimensionales. La hipótesis de simetría cilíndrica también requiere que las órbitas de los campos de Killing sean cilindros. Pero este último requisito no va ser esencial a nuestras consideraciones. Por otro lado el requisito de ortogonalidad a superficies bidimensionales no es un elemento tan natural de la definición de simetría cilíndrica, pero es tradicionalmente parte de esta y sí va ser importante en este trabajo, porque implica que se anulan ciertos datos, llamados *constantes de twist*, ver cap. 7 de [48]. Sería interesante extender nuestro formalismo para incluir constantes de twist no nulas; con estos estarían representados todos los datos de la teoría general sin simetría en la teoría *con* simetría, pero hasta ahora no se sabe si esto estropea la integrabilidad de la teoría en presencia de la simetría.

La hipersuperficie  $\mathcal{N}$  la podemos construir de manera que sea consistente con la simetría cilíndrica, es decir, que las rotaciones y traslaciones generadas por los campos de Killing mapean  $\mathcal{N}$  a sí misma, i.e., generadores son mapeados a generadores. Entonces, en el espacio cociente por las órbitas de Killing la hipersuperficie  $\mathcal{N}$  consiste en dos curvas nulas: los generadores colapsan a uno solo en el cociente.

Este tipo de modelos han sido extensivamente estudiados en el pasado debido a que el conjunto de soluciones con estas hipótesis contiene muchas situaciones de interés físico y además las ecuaciones de movimiento se pueden resolver. Si ambos campos de Killing son espaciales, y uno de ellos se anula en una curva espacial, corresponden a una colisión de ondas gravitacionales planas o a universos de Gowdy.

Si ambos campos de Killing son espaciales y uno de ellos se anula en un plano temporal (una dimensión temporal y una espacial), las soluciones corresponden a ondas gravitacionales cilíndricas. Por último, si uno de los campos de Killing es temporal, las soluciones son las métricas estacionarias y axisimétricas.

Ehlers ([16]) a fines de los '50 y más tarde Geroch ([20]) a comienzos de los '70 mostraron la existencia de simetrías ocultas en estos modelos y de transformaciones infinitesimales que pueden usarse para construir nuevas soluciones a partir de las originales. En particular, Geroch probó que el álgebra de simetrías es de dimensión infinita. Hoy en día al grupo correspondiente se lo denomina grupo de Geroch. Hauser y Ernst en [21] probaron que la acción del grupo es transitiva, esto es, para todo par de soluciones existe una transformación que lleva de una en otra.

En [2], Belinski y Zakharov, y en [32], Maison, mostraron cómo la acción del grupo de Geroch en estos modelos de gravedad reducidos está relacionada directamente con el método de scattering inverso, método que había dado origen al estudio de integrabilidad en teorías de campos clásicos y cuánticos. Breitenlohner y Maison profundizaron en el estudio de esta conexión en [6].

De esta manera, se tendió un puente entre las estructuras que se habían encontrado para los modelos de gravedad reducidos y los modelos integrables ya estudiados dentro de las teorías cuánticas de campos. En particular, la cadena de spines de Heisenberg, modelo estudiado desde los '30 [5].

Tener un modelo integrable nos permite encontrar estructuras aptas para una cuantización algebraica del álgebra de Poisson, como explicaremos a continuación.

Uno de los objetos principales de una teoría integrable es un grupo de transformaciones que actúa en el espacio de fase, llamadas transformaciones de dressing. La acción de estas simetrías, denominadas simetrías dinámicas, es Lie-Poisson, donde el corchete de Poisson en el grupo de transformaciones es el corchete de Sklyanin [1]. Esto tiene como consecuencia que el espacio de soluciones y el grupo de transformaciones estén estrechamente ligados, dando lugar a una estructura que se conoce como doble clásico.

Drinfel'd [11] mostró cómo se puede definir una cuantización algebraica de un grupo de Poisson-Lie (aquel que actúa Lie-Poisson en cierto espacio de fase dando lugar al doble clásico) que recupera exactamente las estructuras encontradas mediante el método de scattering inverso cuántico para modelos integrables en teorías cuánticas de campos. En este contexto, una cuantización corresponde a presentar las relaciones de conmutación entre los operadores cuánticos, que a primer orden en  $\hbar$  reproducen los corchetes de Poisson de las cantidades clásicas. Observar que la cuantización es a nivel algebraico, se define la  $C^*$ -álgebra en términos de relaciones de conmutación y no se da una representación de la misma sobre un espacio de Hilbert.

En resumen, la integrabilidad de una teoría de campos permite hallar una estructura de doble clásico sobre el espacio de fase, que se puede cuantizar siguiendo el esquema de deformación de álgebras de Drinfel'd.

Korotkin y Samtleben en [29] y [28] muestran, para modelos con simetría cilíndrica asintóticamente planos, cómo el álgebra de Poisson de ciertos datos en el infinito de un sector del modelo lleva a un álgebra cuántica estándar, denominada álgebra Yangiana; además relacionan estos datos a cierto objeto,  $\mathcal{M}$ , que denominaron

matriz de monodromía, lo cual les permitió cuantizar también a  $\mathcal{M}$ .

En [19], se presenta una expresión explícita de  $\mathcal{M}$  en términos de los datos iniciales sobre  $\mathcal{N}$  y se calcula el corchete de Poisson entre los elementos de matriz de  $\mathcal{M}$ , verificando que coinciden con los de [28] y que por lo tanto conducen a la misma cuantización. Sin embargo, el cálculo es más general pues sólo involucra campos en el dominio de dependencia de  $\mathcal{N}$  y no asume una hipótesis de comportamiento asintóticamente plano de la métrica.

En este trabajo extendemos el álgebra de Poisson hallada en [19] a todos los datos iniciales del modelo de gravedad con simetría cilíndrica, agregando a la matriz de monodromía  $\mathcal{M}$  la densidad de área de la superficie  $S_0$ , que notamos  $\rho_0$ , y un exponente conforme  $\hat{\sigma}_0$  en  $S_0$ . El punto de partida del trabajo consiste en hallar los corchetes de Poisson entre los tres datos anteriores. Siguiendo las ideas de una extensión de la matriz de monodromía presentada en [6] y [35], definimos una nueva matriz de monodromía extendida,  $\tilde{\mathcal{M}}$ , que corresponde uno a uno con los datos  $\rho_0, \hat{\sigma}_0$  y  $\mathcal{M}$ , y por tanto sus corchetes definen los corchetes de éstos. Esto permite tener un álgebra de Poisson en una forma apta para una cuantización.

Mostramos que la acción del grupo de Geroch es Lie-Poisson si y solo si el corchete de Poisson sobre el grupo es el corchete de Sklyanin, recuperando un resultado de [34] de manera distinta, sin invocar a cantidades definidas en el infinito. Esto es importante en el formalismo canónico sobre hipersuperficies nulas porque, en general, éstas no se pueden extender suavemente hasta el infinito.

La tesis está organizada como sigue. En el capítulo 1 presentamos el modelo, realizamos la reducción dimensional de 4 a 2 dimensiones, y obtenemos las ecuaciones de movimiento; también definimos los datos iniciales sobre  $\mathcal{N}$ . En el capítulo 2 definimos las coordenadas que usaremos y calculamos la forma simpléctica a partir de la acción de Einstein-Hilbert usual. El capítulo 3 está dedicado al cálculo de los corchetes de Poisson entre los campos originales del modelo y a su comparación con los obtenidos en [37]. En el capítulo 4 damos una breve introducción a sistemas integrables, introducimos el sistema lineal auxiliar a partir del cual se hace explícita la acción del grupo de Geroch y se construye la matriz de monodromía. En el capítulo 5 se encuentran los principales resultados de nuestro trabajo: el cálculo del corchete entre los elementos del grupo de Geroch, los corchetes entre  $\rho_0, \hat{\sigma}_0$  y  $\mathcal{M}$ , definimos la matriz de monodromía extendida y mostramos sus corchetes de Poisson; por último la estructura de doble clásico, para el espacio de fase del modelo, la haremos manifiesta mostrando la consistencia del corchete de la matriz extendida con el corchete del grupo de Geroch. En el capítulo 6 presentamos un resultado sobre una simetría a nivel cuántico cuyo límite clásico es la simetría del grupo de Geroch.

# Reducción dimensional de $n = 4$ a $n = 2$

## 1.1. Objetivos

En este capítulo, presentaremos los resultados básicos de relatividad general en el vacío, con dos campos de Killing que conmutan y son ortogonales a superficies bidimensionales.

Este contexto es el que se utiliza en el estudio de espacios con simetría cilíndrica (que corresponde a dos vectores de Killing espaciales y un dilatón espacial), colisión de ondas gravitacionales (dos Killing espaciales y un dilatón temporal) y espacios estacionarios con simetría axial (que corresponde a un Killing temporal y otro espacial). Esto nos permite tener una gran variedad de soluciones particulares.

Primero veremos la reducción dimensional, o reducción de Kaluza-Klein, que consiste en integrar la acción sobre las órbitas que genera la simetría presente en el espacio-tiempo original, para obtener una acción sobre un espacio-tiempo con una dimensión menos. Luego, pasamos a definir nuestro modelo, reducimos dos veces dimensionalmente y obtenemos las ecuaciones de movimiento del modelo, en términos de tres campos:  $\sigma$ ,  $\rho$  y las matrices  $\mathcal{V}$ .

Por último, definimos la doble hoja nula  $\mathcal{N}$  y los datos iniciales a partir de los cuales se tienen soluciones únicas en un dominio de dependencia de  $\mathcal{N}$ . Estos datos serán los protagonistas principales de nuestro trabajo.

## 1.2. Notación y convenciones

Por variedad entendemos un espacio topológico de Hausdorff con atlas maximal diferenciable  $C^\infty$ .

La convención que seguiremos para la signatura de una métrica Lorentziana es  $(- + ++)$ . La notación de índices abstractos o en coordenadas se hará explícita cuando sea usada.

La métrica plana (de Minkowski) la notaremos  $\eta_{\mu\nu}$ , y cuando no haya riesgo de confusión simplemente por  $\eta$ .

Sobre los distintos términos y fórmulas de geometría diferencial que usaremos a lo largo de este trabajo, referiremos al lector a los Apéndices A y B.

### 1.3. Reducción Dimensional

En este trabajo usaremos la acción de Einstein-Hilbert como objeto fundamental de la teoría. Sea  $M$  una variedad Lorentziana  $(n+1)$ -dimensional, y  $S$  la funcional de acción de Einstein-Hilbert, que tiene como argumentos los elementos de cierto subconjunto  $C$  del espacio de métricas de  $M$ , y toma valores reales. Cuando  $C$  corresponde a métricas para las que existe cierto campo de Killing, entonces la acción  $S$  sólo depende de  $n$  dimensiones. Este es el punto de partida de la reducción dimensional en relatividad general:

$$S = \frac{\kappa}{2} \int_M R \varepsilon \quad . \quad (1.1)$$

donde  $\kappa = \frac{1}{8\pi G}$ , y  $G$  la constante gravitacional de Newton.

Comencemos por establecer ciertas convenciones para facilitar la lectura de los cálculos que haremos en esta sección.

**Notación 1.1.** Los índices  $A, B, C, \dots$  tendrán valores de 0 a  $n$ , los índices  $a, b, c, \dots$  tendrán valores de 0 a  $n-1$ , los índices  $\mu, \nu, \dots$  valores de 0 a  $n$  y los índices  $\alpha, \beta, \dots$  valores de 0 a  $n-1$ . Las componentes tensoriales estarán referidas a algún sistema de coordenadas  $(x^0, \dots, x^n)$ .

Las matrices  $\eta := \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$  y  $\delta = \text{diag}(1, \dots, 1)$  tendrán dimensiones según los índices que tengan:  $\eta_{AB}$  es de dimensión  $(n+1) \times (n+1)$ , y  $\eta_{ab}$  es de dimensión  $n \times n$ .

**Definición 1.1.** Sea  $M$  una variedad Lorentziana de dimensión  $n+1$ . Una  $(n+1)$ -co-bein es un conjunto de  $(n+1)$  1-formas  $\check{e}^\mu_A$  linealmente independientes: en cada punto  $p \in M$  forman una base de  $T_p^*M$ , y que son ortogonales:

$$\eta_{\mu\nu} \check{e}^\mu_A \check{e}^\nu_B = g_{AB} \quad (1.2)$$

Los índices latinos son los índices abstractos, y los índices griegos son los índices internos de la co-bein.

El referencial asociado a  $\{\check{e}^\mu_A\}$  lo notaremos  $\{\check{e}^A_\mu\}$  (i.e., los vectores tales que  $\check{e}^\mu_A \check{e}^\nu_B = \delta_A^B$ ), y cumple

$$g_{\mu\nu} = \eta_{AB} \check{e}^A_\mu \check{e}^B_\nu \quad (1.3)$$

**Notación 1.2.** El grupo  $GL(n+1, \mathbb{R})$  actúa por izquierda (es decir, el índice interno indica las columnas de una matriz de elementos  $\{\check{e}^A_\mu\}$ ).

**Observación 1.1.** La elección de un referencial ortonormal y con cierta orientación fija está determinada a menos del grupo de rotaciones especiales de la métrica. En nuestro caso, que estamos trabajando con métricas Lorentzianas, este grupo es el de Lorentz especial,  $SO(1, n, \mathbb{R})$ .

Con las tétradas y cotétradas podemos asignar tensores  $T_{\mu\nu\dots}^{\sigma\rho\dots}$  de índices internos a los tensores de la variedad, como  $T_{AB\dots}^{CD\dots} := \check{e}^\mu_A \check{e}^\nu_B \check{e}^\sigma_C \check{e}^\rho_D T_{\mu\nu\dots}^{\sigma\rho\dots}$ .

La libertad bajo rotaciones del grupo de Lorentz especial nos permite realizar una fijación de gauge parcial: sea  $\{\check{e}_\mu^A\}$  un  $(n+1)$ -bein,  $D \subset M$  un dominio difeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Existe una familia de funciones  $e_\mu^a, \phi, A_\mu : D \rightarrow \mathbb{R}$  tales que

$$\check{e}_A^\mu = \begin{pmatrix} e_0^0 & \dots & e_0^{n-1} & \phi A_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ e_{n-1}^0 & \dots & e_{n-1}^{n-1} & \phi A_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \phi \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

notar que el símbolo  $\check{\cdot}$  lo utilizaremos para evitar confusión entre distintos sistemas de tétradas y agilizar la escritura, o entre la métrica  $(n+1)$ -dimensional y la  $n$ -dimensional.

Consideremos ahora que existe un campo de Killing espacial global sobre la variedad  $M$ , que llamaremos  $\chi^A$ .

**Observación 1.2.** En lo que resta de la sección, asumiremos sin pérdida de generalidad que  $\chi(p) = \partial_{n+1}(p) \forall p \in D$ .

Tener un campo de Killing nos permite tomar  $n$ -beins que no dependan de la coordenada que genera el campo de Killing. Simplemente, fijamos una hipersuperficie en  $M$  y Lie transportamos una  $(n-1)$ -bein a todo el espacio mediante  $\chi$ .

**Proposición 1.1.** Dada una  $(n+1)$ -bein  $\check{e}_\mu^A$  tal que  $\mathcal{L}_\chi \check{e}_\mu^A = 0$ , entonces los elementos de matriz son funciones que no dependen de la coordenada  $x^{n+1}$ .

*Demostración.* A partir de la fórmula de la derivada de Lie en términos de la conexión A.2, es inmediato:

$$0 = \mathcal{L}_\chi \check{e}_\mu^A = \chi^\nu \nabla_\nu \check{e}_\mu^A + \check{e}_\nu^A \nabla_\mu \chi^\nu \quad (1.5)$$

$$= \partial_{n+1} \check{e}_\mu^A - \Gamma_{(n+1)\mu}^\sigma \check{e}_\sigma^A + \check{e}_\nu^A \Gamma_{\mu\sigma}^\nu \delta_{n+1}^\sigma \quad (1.6)$$

$$= \partial_{n+1} \check{e}_\mu^A \quad (1.7)$$

Por tanto,  $0 = \partial_{n+1} \check{e}_\mu^A$ . □

Ahora, para una  $n$ -bein que cumple la proposición anterior, fijamos parcialmente el gauge de la ecuación 1.4. Tenemos las siguientes propiedades:

**Proposición 1.2.** Sean  $\phi, A_\alpha$  las funciones que definimos en la ecuación 1.4. Sea  $\xi$  un generador de difeomorfismos que preservan la coordenada  $x^n$  y que tampoco dependen de ella. Entonces  $\phi$  es un campo escalar y  $A_\alpha$  transforma como una 1-forma, es decir:

$$\mathcal{L}_\xi \phi = \xi^\mu \partial_\mu \phi \quad (1.8)$$

$$\mathcal{L}_\xi A_\mu = \xi^\nu \nabla_\nu A_\mu + A_\nu \nabla_\mu \xi^\nu \quad (1.9)$$

*Demostración.* En el espacio de difeomorfismos independientes de la coordenada  $x^{n+1}$ , y que la dejan invariante, sea  $\gamma(t)$  una curva tal que  $\gamma(0) = Id_M$ ,  $\dot{\gamma}(0) = \delta$ , un vector tangente al espacio de difeomorfismos. Resulta  $\delta(\check{e}_\mu^A) = \mathcal{L}_\xi \check{e}_\mu^A$ , donde  $\xi$  es el campo generador de la familia de difeomorfismos  $\gamma(t)$ .

Observar que para el campo de Killing  $\chi$ , tenemos que  $[\xi, \chi] = 0$ , pues  $\partial_{n+1}\xi = 0$ .

Por la fórmula para la derivada de Lie en términos de la conexión (A.2) tenemos:

$$\mathcal{L}_\xi \check{e}_\mu^A = \xi^\nu \nabla_\nu \check{e}_\mu^A + \check{e}_\nu^A \nabla_\mu \xi^\nu \quad (1.10)$$

Es decir, usando 1.4 y la proposición anterior:

$$\mathcal{L}_\xi \check{e}_\mu^A = \begin{pmatrix} \xi^\nu \nabla_\nu e_\alpha^a + \check{e}_\nu^a \nabla_\alpha \xi^\nu & \xi^\nu \nabla_\nu (\phi A_\alpha) + \check{e}_\nu^{n+1} \nabla_\alpha \xi^\nu \\ 0 & \xi^\nu \nabla_\nu \phi + \check{e}_\nu^{n+1} \nabla_{n+1} \xi^\nu \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

$$= \begin{pmatrix} \xi^\nu \nabla_\nu e_\alpha^a + e_\beta^a \nabla_\alpha \xi^\beta & \xi^\nu \nabla_\nu (\phi A_\alpha) + \phi A_\beta \nabla_\alpha \xi^\beta + \phi \nabla_\alpha \xi^{n+1} \\ 0 & \xi^\nu \nabla_\nu \phi \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

pues  $\check{e}_\nu^{n+1} \nabla_{n+1} \xi^\nu$  es una derivada de  $\xi$  en la dirección del campo de Killing.

$$\begin{aligned} \delta(\phi) &= \xi^\mu \partial_\mu \phi \\ \delta(A_\alpha) &= \mathcal{L}_\xi A_\alpha + \nabla_\alpha \xi^{n+1} \end{aligned}$$

□

La utilidad de esta reducción dimensional es que la  $n$ -bein  $e_\mu^a$  nos sirve para poder definir una métrica en la variedad cociente de  $M$  respecto a las órbitas del campo de Killing.

**Definición 1.2.** Sea  $(M, \check{g})$  una  $(n+1)$ -variedad Lorentziana que admite un campo de Killing espacial  $\chi^\mu$ . El campo de Killing establece una relación de equivalencia entre puntos de  $M$ ,  $x \sim y$  si existe una curva integral del campo que contiene a  $x$  e  $y$ . Definimos el conjunto cociente como:

$$M^{(n)} := M / \sim \quad (1.13)$$

que tiene estructura de variedad, con posibles singularidades.

**Definición 1.3.** Fijada una descomposición del  $(n+1)$ -bein inicial como en la ecuación 1.4, definimos un tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$  de la variedad  $n$ -dimensional  $M / \sim$  como

$$g_{\alpha\beta} := \eta_{ab} e_\alpha^a e_\beta^b \quad (1.14)$$

Como  $\chi^\mu$  es un campo espacial en todo punto, es claro que  $g$  es una métrica Lorentziana en la variedad cociente  $M^{(n)}$ .

**Definición 1.4.** Al campo vectorial  $A^\alpha$  se lo llama *vector de Kaluza-Klein*, y se define el tensor de curvatura de  $A^\alpha$  como  $F_{\alpha\beta} := \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ .

**Proposición 1.3.** Sea  $(M, \check{g})$  una  $(n+1)$ -variedad Lorentziana que admite un campo de Killing espacial  $\chi^\mu$ ,  $D \subset M$  un dominio difeomorfo a  $D^{(n)} \times [-1, 1]$ , donde las preimágenes bajo el difeomorfismo  $\varphi : D \rightarrow D^{(n)} \times [1, -1]$ ,  $\varphi^{-1}(\{t\} \times [-1, 1])$  son órbitas de  $\chi$ , y sea  $S$  la funcional de Einstein-Hilbert:

$$S = \frac{\kappa}{2} \int_D \varepsilon_{\check{g}} \check{R} \quad (1.15)$$

Sobre  $M$  definimos la cotétrada  $\check{e}_\mu^A$  como en 1.4. Entonces, a menos de términos de borde, se puede factorizar la funcional como

$$S = \int_{-1}^1 S^{(n)} dx^{n+1} \quad (1.16)$$

donde  $S^{(n)}$  es una funcional con dominio de integración  $D^{(n)}$ :

$$S^{(n)} = \frac{\kappa}{2} \int_{D^{(n)}} \varepsilon_g \phi \left( R - 2\phi^{-1} \nabla^\alpha \nabla_\alpha \phi - \frac{1}{4} \phi^2 F_\beta^\alpha F_\alpha^\beta \right) \quad (1.17)$$

con  $R$  es la curvatura de la métrica  $g$  en  $D^{(n)}$ .

*Demostración.* Expresaremos la curvatura escalar  $\check{R}$  en  $D$  en términos de la curvatura escalar en  $D^{(n)}$ , el campo  $\phi$  y el tensor  $F$ . Como tenemos la métrica en términos del  $(n+1)$ -bein 1.4, calcularemos  $\check{R}$  usando las ecuaciones de estructura:

$$d\check{e}^A = \check{e}^B \wedge \check{\omega}^A_B \quad (1.18)$$

$$\check{\Omega}^A_B = d\check{\omega}^A_B + \check{\omega}^A_C \wedge \check{\omega}^C_B \quad (1.19)$$

De la primera ecuación, podemos calcular la conexión  $\check{\omega}$ , resultando

$$\check{\omega}^{n+1}_a = \frac{1}{2} \phi F_{ab} \check{e}^b + \phi^{-1} \partial_a \phi \check{e}^{n+1} \quad (1.20)$$

$$\check{\omega}^a_b = \omega^a_b - \frac{1}{2} \phi F^a_b \check{e}^{n+1} \quad (1.21)$$

donde  $\omega_{ab}$  es la conexión asociada a la métrica  $g$  en  $D^{(n)}$ . Las componentes del tensor de Riemann son

$$\check{R}^a_b = d\check{\omega}^a_b + \check{\omega}^a_c \wedge \check{\omega}^c_b + \check{\omega}^a_{n+1} \wedge \check{\omega}^{n+1}_b \quad (1.22)$$

$$\check{R}^a_{n+1} = d\check{\omega}^a_{n+1} + \check{\omega}^a_c \wedge \check{\omega}^c_{n+1} \quad (1.23)$$

El tensor de Ricci lo calculamos contrayendo el tensor de Riemann con la  $(n+1)$ -cobain:

$$\check{R}_b = \check{E}_a \lrcorner \check{R}^a_b + \check{E}_{n+1} \lrcorner \check{R}^{n+1}_b \quad (1.24)$$

$$\check{R}_{n+1} = \check{E}_a \lrcorner \check{R}^a_{n+1} \quad (1.25)$$

Finalmente, la curvatura escalar resulta de contraer el tensor de Ricci con la  $(n + 1)$ -cobein:

$$\check{R} = \check{E}_a \lrcorner \check{R}^a + \check{E}_{n+1} \lrcorner \check{R}^{n+1} \quad (1.26)$$

$$\check{R} = R - 2\phi^{-1} (E_a \lrcorner \omega^{ab}) \partial_b \phi - 2\phi^{-1} \partial_a \partial^a \phi - \frac{1}{4} \phi^4 F^{ab} F_{ab} \quad (1.27)$$

La expresión  $2\phi^{-1} (E_a \lrcorner \omega^{ab}) \partial_b \phi + 2\phi^{-1} \partial_a \partial^a \phi$  es exactamente  $2\phi^{-1} \nabla_a \nabla^a \phi$ . La forma de volumen  $\varepsilon_{\check{g}}$  es  $\phi \varepsilon_g \wedge dx^{n+1}$ .

$$S = \frac{\kappa}{2} \int_D \check{R} \varepsilon_{\check{g}} \quad (1.28)$$

$$= \frac{\kappa}{2} \int_D \left( R - 2\phi^{-1} \nabla_a \nabla^a \phi - \frac{1}{4} \phi^4 F^{ab} F_{ab} \right) \phi \varepsilon_g \wedge dx^{n+1} \quad (1.29)$$

$$= \frac{\kappa}{2} \int_{D^{(n)} \times [-1,1]} \varphi^* \left( \left( R - 2\phi^{-1} \nabla_a \nabla^a \phi - \frac{1}{4} \phi^4 F^{ab} F_{ab} \right) \phi \varepsilon_g \wedge dx^{n+1} \right) \quad (1.30)$$

para el difeomorfismo  $\varphi$ . Podemos hacer la identificación canónica de  $D^{(n)}$  con las coordenadas de una hipersuperficie  $x^{n+1} = cte$ , y parametrizar  $D^{(n)}$  con las coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$ . Por otro lado,  $\varphi^*(dx^{n+1}) = f(t)dt$ , donde la función  $f$  corresponde al reescalo del campo de Killing para que las órbitas estén definidas en el intervalo  $[-1, 1]$ . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $f(t) = 1$ , y queda una integral trivial.

Por tanto, la funcional inicial es una densidad funcional  $S^{(n)}$  multiplicada por el parámetro de Killing, como muestra la ecuación 1.17.  $\square$

**Observación 1.3.** Debido a la integral sobre las órbitas del campo de Killing, la constante  $\kappa$  en la ecuación 1.17 es un múltiplo de la original. Esto lleva a un reescalo de la constante de gravitación de Newton:  $G \rightarrow G'$ .

## 1.4. Simetría Cilíndrica

En esta sección nos centraremos en el caso en que  $n+1 = 4$ . El objetivo será realizar una reducción dimensional dos veces, y obtener una acción en un espacio cociente bidimensional.

El siguiente resultado de geometría diferencial es útil para reducir dimensionalmente la acción cuando tenemos dos campos de Killing que conmutan, para una demostración ver [48], pág. 163:

**Teorema 1.4.** Sean  $\xi^a, \chi^a$  dos campos de Killing que conmutan y

1.  $\chi_{[a} \xi_b \nabla_c \xi_d]$  y  $\xi_{[a} \chi_b \nabla_c \chi_d]$  se anulan en algún punto de  $M$ .

2.  $\xi^a R_a^{[b} \xi^c \chi^d] = \chi^a R_a^{[b} \xi^c \chi^d] = 0$ .

Entonces, los planos bidimensionales ortogonales a  $\xi^a$  y a  $\chi^a$  son integrables.

**Observación 1.4.** A partir de ahora, asumiremos dada la 4-variedad Lorentziana  $M$ , con su métrica  $\check{g}$ , y dos campos vectoriales de Killing espaciales que conmutan y son ortogonales a superficies bidimensionales sobre ella. Asumiremos sin pérdida de generalidad que  $\xi = \partial_2$  y  $\psi = \partial_3$ .

En nuestro caso de interés, esto es, simetría cilíndrica para relatividad general en el vacío, tenemos que la presencia de un campo de Killing  $\chi$  de órbitas compactas implica que se existe un eje de simetría, y por tanto  $\chi$  se anula en al menos un punto de la variedad; por otro lado, la condición de vacío ( $R_{ab} = 0$ ) implica trivialmente la segunda hipótesis del teorema.

La integrabilidad de los dos planos nos permite factorizar la métrica para el caso en que tenemos dos campos de Killing, de la misma forma que lo hemos hecho para un campo de Killing, como mostramos en la siguiente proposición:

**Proposición 1.5.** *En presencia de dos campos de Killing espaciales que conmutan y son ortogonales a superficies y que además cumplen las hipótesis del teorema anterior, la tétrada se puede escribir de la siguiente manera*

$$\check{e}_\mu^A = \begin{pmatrix} e_0^1 & e_0^2 & 0 & 0 \\ e_1^1 & e_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma & \Delta^{1/2} B_2 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta^{1/2} \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

donde  $\Gamma, \Delta^{1/2}$  son campos escalares y  $B_\mu = (0, 0, B_2)$  es una 1-forma.

*Demostración.* Comenzamos por la forma de la tétrada 1.4, donde todas las funciones que aparecen son independientes de las coordenadas  $x^2$  y  $x^3$ .

Entonces, podemos hacer el procedimiento para  $x^3$  primer y luego  $x^2$ , resultando:

$$\check{e}_\mu^A = \begin{pmatrix} e_0^1 & e_0^2 & \Gamma A_0 & \Delta^{1/2} B_0 \\ e_1^1 & e_1^2 & \Gamma A_1 & \Delta^{1/2} B_1 \\ 0 & 0 & \Gamma & \Delta^{1/2} B_2 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta^{1/2} \end{pmatrix}$$

donde elegimos  $\Delta^{1/2}$  sólo para simplificar ciertas manipulaciones algebraicas.

Por último, el resultado se deduce tomando en cuenta que los campos de Killing son ortogonales a superficies bidimensionales, y que por lo tanto podemos tomar  $A_0 = A_1 = B_0 = B_1$ , simplemente eligiendo  $x^2$  y  $x^3$  como constantes en esas superficies.  $\square$

**Observación 1.5.** La métrica bidimensional  $g_{\alpha\beta} := e_\alpha^a e_\beta^b \eta_{ab}$  será una métrica Lorentziana en la variedad cociente.

La siguiente proposición nos muestra cómo se escribe la acción de Einstein-Hilbert para la métrica factorizada con  $\check{e}_\mu^a$ .

**Proposición 1.6.** *Sea  $S$  la acción de Einstein-Hilbert en un dominio  $D \subset M$  difeomorfo a  $D^{(2)} \times [-1, 1]^2$ , es decir, consideramos que los flujos de los campos de Killing están definidos para  $t \in [1, -1]$ . En las hipótesis de la proposición anterior,*

$$S = \frac{\kappa}{2} \int_D \Delta^{1/2} \Gamma \left( R^{(2)} - 2\Gamma^{-1} \square_g \Gamma - 2\Delta^{-1/2} (\Gamma^{-1} \partial^\mu \Gamma \partial_\mu \Delta^{1/2} + \square_g \Delta^{1/2}) - \frac{1}{2} \Delta \Gamma^{-2} (\partial^\mu B_2 \partial_\mu B_2) \right) \varepsilon_g \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (1.32)$$

*Demostración.* Comenzamos en  $n+1 = 4$ , y realizamos la reducción dimensional de la sección anterior tomando  $A_\alpha = B_2 \delta_\alpha^2$ , y  $\phi = \Delta^{1/2}$ . Entonces, la acción resulta

$$S = \frac{\kappa}{2} \int_D \Delta^{1/2} \left( R^{(3)} - 2\Delta^{-1/2} \nabla^\alpha \nabla_\alpha (\Delta^{1/2}) - \frac{1}{4} \Delta F^{\beta\gamma} F_{\beta\gamma} \right) \varepsilon_{g^{(3)}} \wedge dx^3 \quad (1.33)$$

Para  $n+1 = 3$ :  $A_\alpha = 0$  y  $\phi = \Gamma$ . La curvatura  $R^{(3)}$  resulta  $R^{(2)} - 2\Gamma^{-1} \nabla^\alpha \nabla_\alpha \Gamma$ . Tenemos que  $g^{(3)} = g^{(2)} + \Gamma^2 dx^2 \otimes dx^2$ . Esto establece las siguientes igualdades:

$$F^{bc} F_{bc} = -F_\mu{}^\nu F_\nu{}^\mu = 2\Gamma^{-2} (\partial^\mu B_2 \partial_\mu B_2) \quad (1.34)$$

$$\square_{g^{(3)}} \Delta^{1/2} := \nabla^a \nabla_a (\Delta^{1/2}) = \frac{1}{\sqrt{-g^{(3)}}} \partial^\mu \left( \sqrt{-g^{(3)}} \partial_\mu \Delta^{1/2} \right) \quad (1.35)$$

$$= \frac{1}{\Gamma \sqrt{-g}} \partial^\mu (\Gamma \sqrt{-g} \partial_\mu \Delta^{1/2}) \quad (1.36)$$

$$= \Gamma^{-1} \partial^\mu \Gamma \partial_\mu \Delta^{1/2} + \square_g \Delta^{1/2} \quad (1.37)$$

$$\varepsilon_{g^{(3)}} = \Gamma \varepsilon_g \wedge dx^2 \quad (1.38)$$

donde  $\square_{g^{(n)}}$  corresponde al Laplaciano respecto a la métrica  $g^{(n)}$ .

Sustituyendo cada término de la expresión anterior en la acción 1.33, obtenemos el resultado buscado.  $\square$

**Observación 1.6.** Observar que el integrando no depende de las coordenadas  $x^2, x^3$ , por lo que podemos hacer el pullback del integrando bajo el difeomorfismo  $\phi : D^{(2)} \times [-1, 1] \rightarrow D$ , y así obtener una densidad de acción:

$$S = \int_{[-1, 1]^2} S^{(2)} dx^2 dx^3 \quad (1.39)$$

donde

$$S^{(2)} = \frac{\kappa}{2} \int_{D^{(2)}} \Delta^{1/2} \Gamma \left( R^{(2)} - 2\Gamma^{-1} \square_g \Gamma - \frac{1}{2} \Delta \Gamma^{-2} (\partial^\mu B_2 \partial_\mu B_2) - 2\Delta^{-1/2} (\Gamma^{-1} \partial^\mu \Gamma \partial_\mu \Delta^{1/2} + \square_g \Delta^{1/2}) \right) \varepsilon_g \quad (1.40)$$

La constante de Newton está redimensionada  $G \rightarrow G'$ , con dimensiones de  $(\text{área})^{-1}$

## 1.5. Formulación sobre un espacio simétrico $G/H$

La acción que determina la ecuación de Einstein en el vacío en 4 dimensiones, al aplicar la reducción dimensional dos veces, resulta en una acción que tiene como campos a la métrica bidimensional  $g$  y a las tres funciones  $\Delta, \Gamma, B_2$ , todos viviendo en la variedad cociente  $M^{(2)}$ . En lo que sigue, hablaremos de la acción  $S$  sobre  $M^{(2)}$ , y los índices  $\mu, \nu, \dots$  valdrán 0, 1.

**Definición 1.5.** Definimos los siguientes campos, escalar y  $SL(2, \mathbb{R})$ -valuado respectivamente:

$$\rho := \Gamma \Delta^{1/2} \quad (1.41)$$

$$\mathcal{V} := \frac{1}{\sqrt{\rho}} \begin{pmatrix} \rho \Delta^{-1/2} & \Delta^{1/2} B_2 \\ 0 & \Delta^{1/2} \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

A  $\rho$  se lo denomina *dilatón*, y  $\mathcal{V}$  son las componentes de la zweibein sobre las órbitas de Killing.

**Observación 1.7.** El significado geométrico de  $\rho$  es claro: corresponde a la densidad de área de las órbitas de los campos de Killing. Fijando una base ortonormal tangente a las órbitas de los campos de Killing, podemos interpretar a  $\mathcal{V}$  en cada punto del espacio-tiempo cociente  $M^{(2)}$  tomando una matriz en  $SL(2, \mathbb{R})$ , de manera que el mapa  $x \in M^{(2)} \mapsto \mathcal{V}(x) \in SL(2, \mathbb{R})$  es diferenciable. Esta matriz son las coordenadas de la zweibein respecto a la base fijada. Verificar que  $\mathcal{V}$  son las componentes de la zweibein es inmediato a partir de la ecuación 1.31. Observar que elegimos un gauge triangular superior para  $\mathcal{V}$ ; como veremos en breve, la acción es invariante bajo la elección de gauge en  $\mathcal{V}$ .

En términos de  $\rho$ , la acción 1.40 es

$$S^{(2)} = \frac{\kappa}{2} \int_{D^{(2)}} \rho \left( R^{(2)} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\rho^2} (\partial B_2)^2 + \frac{1}{\rho \Delta} \partial_\mu \Delta \partial^\mu \rho - \frac{1}{2 \Delta^2} (\partial \Delta)^2 - \frac{2}{\rho} \square_g \rho \right) \varepsilon_g \quad (1.43)$$

Observar que el último de los sumandos conduce a un término de borde, que de ahora en más no tomaremos en cuenta. Ver [18] y [38] para más detalles acerca de los términos de borde.

La ventaja de pensar la acción en términos de  $\rho$  y  $\mathcal{V}$  se hará manifiesta en un momento, cuando veamos que la acción reducida y las ecuaciones de movimiento adquieren expresiones sencillas de manipular en términos de estas variables.

**Definición 1.6.** Sea  $J_\mu := \mathcal{V}^{-1} \partial_\mu \mathcal{V}$ . A este objeto le llamaremos *conexión*.

La conexión anteriormente definida es la que transporta paralelamente a  $\mathcal{V}$ : si tenemos la ecuación diferencial

$$\partial_\mu \mathcal{V} = \mathcal{V} J_\mu \quad (1.44)$$

una solución es

$$\mathcal{V}(x) = \mathcal{V}(0)Pe^{\int_0^x J} \quad (1.45)$$

para cierto camino entre los puntos 0 y  $x$ . Claramente el valor de la exponencial por caminos no es necesariamente independiente del camino elegido. Para que esta independencia sea efectivamente cierta, es suficiente que la curvatura de la conexión sea cero. En la proposición siguiente veremos que es el caso de  $J$ .

**Proposición 1.7.**  $J_\mu$  es una conexión plana.

*Demostración.* Calculamos la curvatura  $\Omega = dJ + J \wedge J$ : en términos de componentes, tenemos que  $\mathcal{V}_\mu^a$ , así que

$$\Omega_a^b = d(\mathcal{V}^{-1}{}^{\mu}{}_a d\mathcal{V}_\mu^b) + \mathcal{V}^{-1}{}^{\mu}{}_a d\mathcal{V}_\mu^c \wedge \mathcal{V}^{-1}{}^{\mu}{}_c d\mathcal{V}_\mu^b \quad (1.46)$$

$$= -\mathcal{V}^{-1}{}^{\nu}{}_a d\mathcal{V}_\nu^c \mathcal{V}^{-1}{}^{\mu}{}_c \wedge d\mathcal{V}_\mu^b + \mathcal{V}^{-1}{}^{\mu}{}_a d\mathcal{V}_\mu^c \wedge \mathcal{V}^{-1}{}^{\mu}{}_c d\mathcal{V}_\mu^b \quad (1.47)$$

$$= 0 \quad (1.48)$$

□

La conexión  $J$  es un elemento del álgebra de Lie de  $SL(2, \mathbb{R})$  para cada punto de la variedad cociente. A continuación daremos un rápido vistazo a la estructura de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ , sin entrar en los detalles, que están en el apéndice B.

**Definición 1.7.** En  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \text{Lie}(SL(2, \mathbb{R}))$  es el espacio de matrices de traza cero. Tenemos la estructura  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{q} \oplus \mathfrak{k}$ , donde  $\mathfrak{q}$  son las matrices antisimétricas y  $\mathfrak{k}$  son las matrices simétricas de traza cero.

Los generadores de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  como espacio vectorial son las matrices

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

En vista de la definición anterior, tenemos  $\mathfrak{q} = \text{span}(e - f)$ , y  $\mathfrak{k} = \text{span}(e + f, h)$ . La subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  está generada por  $h$ , y es un subespacio de  $\mathfrak{k}$ .

Las relaciones de conmutación indican las siguientes relaciones entre subespacios:

$$[\mathfrak{q}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k} \quad (1.50)$$

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{q} \quad (1.51)$$

$$[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}] \subset \mathfrak{q} \quad (1.52)$$

Tenemos la involución  $\omega$  que es un automorfismo del álgebra, y en los generadores vale  $\omega(e) = -f$   $\omega(f) = -e$   $\omega(h) = -h$ .

Esta involución nos permite definir un automorfismo  $\eta$  que consiste en tomar  $\omega$  y trasponer la matriz obtenida. Esto nos da autovalores 1 y  $-1$ , pues  $\eta^2 = id$ . El subespacio propio de 1 es  $\mathfrak{q}$  y el de  $-1$  es  $\mathfrak{k}$ .

**Definición 1.8.** Para la conexión  $J_\mu$ , en cada punto de la variedad cociente tenemos la descomposición en  $P_\mu \in \mathfrak{k}$  y  $Q_\mu \in \mathfrak{q}$ , de manera que

$$J_\mu(x) = Q_\mu(x) + P_\mu(x) \quad (1.53)$$

En términos de  $Q_\mu$  y  $P_\mu$ , la condición de curvatura cero para  $J_\mu$  nos da dos ecuaciones, separando en  $\mathfrak{k}$  y  $\mathfrak{q}$ :

$$2(dJ + J \wedge J) = \partial_\mu J_\nu - \partial_\nu J_\mu + [J_\mu, J_\nu] \quad (1.54)$$

$$[J_\mu, J_\nu] = [Q_\mu, Q_\nu] + [Q_\mu, P_\nu] + [P_\mu, Q_\nu] + [P_\mu, P_\nu] \quad (1.55)$$

de donde

$$\partial_\mu Q_\nu - \partial_\nu Q_\mu + [Q_\mu, Q_\nu] + [P_\mu, P_\nu] = 0 \quad (1.56)$$

$$\partial_\mu P_\nu - \partial_\nu P_\mu + [Q_\mu, P_\nu] + [P_\mu, Q_\nu] = 0 \quad (1.57)$$

De la descomposición de la conexión en los subespacios  $\mathfrak{k}$  y  $\mathfrak{q}$ , podemos expresar  $Q_\mu$  y  $P_\mu$ :

$$P_\mu = \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{2\rho} \partial_\mu \left( \frac{\rho}{\Delta} \right) & \frac{\Delta}{2\rho} \partial_\mu B_2 \\ \frac{\Delta}{2\rho} \partial_\mu B_2 & -\frac{\Delta}{2\rho} \partial_\mu \left( \frac{\rho}{\Delta} \right) \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

$$Q_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Delta}{2\rho} \partial_\mu B_2 \\ -\frac{\Delta}{2\rho} \partial_\mu B_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.59)$$

A continuación, veremos cómo se simplifica la acción utilizando las variables  $\rho$  y  $\mathcal{V}$ .

**Proposición 1.8.** *En términos de la conexión de la definición anterior, y a menos de términos de borde, el lagrangeano que define la acción  $S$  resulta*

$$\mathcal{L} = \rho R - \rho \text{Tr}(P_\mu P^\mu) + \frac{1}{2} \rho^{-1} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho \quad (1.60)$$

*Demostración.* Calculamos  $\text{Tr}(P_\mu P^\mu)$  a partir de 1.58:

$$\text{Tr}(P_\mu P^\mu) = 2 \left( \frac{\Delta^2}{4\rho^2} \partial_\mu \left( \frac{\rho}{\Delta} \right) \partial^\mu \left( \frac{\rho}{\Delta} \right) + \frac{\Delta^2}{4\rho^2} \partial_\mu B_2 \partial^\mu B_2 \right) \quad (1.61)$$

$$= \frac{1}{2\Delta^2} (\partial\Delta)^2 + \frac{1}{2\rho^2} (\partial\rho)^2 - \frac{1}{\Delta\rho} \partial_\mu \Delta \partial^\mu \rho + \frac{\Delta^2}{2\rho^2} (\partial B_2)^2 \quad (1.62)$$

Comparando con la expresión 1.43, obtenemos el resultado buscado a menos del término de borde  $\square$ .

La ventaja más importante de este lagrangeano es que tiene la forma de un modelo  $\sigma$  en un espacio tiempo de Minkowski: cierta conexión en un espacio simétrico  $G/H$ , y una función  $f$  que en nuestro caso es la curvatura  $R$ . La diferencia fundamental es que en nuestro caso aparece el dilatón  $\rho$  como factor multiplicativo, y eso introducirá estructuras más complejas en el estudio de este modelo.

**Definición 1.9.** La conexión  $J$  tiene asociada una derivada covariante, que notaremos  $D_\mu$ , y que se define como

$$D_\mu = \partial_\mu + ad_{Q_\mu} \quad (1.63)$$

es decir, si  $X$  es una función  $SL(2, \mathbb{R})$ -valuada,

$$D_\mu X = \partial_\mu X + [Q_\mu, X] \quad (1.64)$$

## 1.6. Geometría conforme

En lo que resta,  $M$  será una variedad Lorentziana de dimensión 2, que proviene de realizar la reducción dimensional de las secciones anteriores y pasar al cociente una variedad de dimensión 4.

El siguiente resultado es clásico, se lo puede ver en [48], pág. 446:

Dada una variedad Lorentziana  $M$ , supongamos que tenemos dos métricas,  $g, \hat{g}$ , tales que  $\hat{g} = \psi^2 g$ , para  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave. Entonces, las curvaturas escalares están relacionadas mediante la siguiente ecuación:

$$\hat{R} = \psi^{-2} (R - (n-1)(2-n)\nabla_c \ln \psi \nabla^c \ln \psi - 2(n-1)\square_g \ln \psi) \quad (1.65)$$

Para el caso de una variedad bidimensional, toda métrica es conformemente plana, como indica el siguiente resultado clásico, que puede ser encontrado en [50]:

**Proposición 1.9.** *Sea  $(M, g)$  una variedad Lorentziana bidimensional, y  $p \in M$  un punto. Entonces, existe una carta local  $(U, \varphi)$ , con  $U$  entorno de  $p$ , y una función  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $g_{\mu\nu} = e^{2\sigma} \eta_{\mu\nu}$ .*

Sea  $D \subset M$  un conjunto abierto, entorno de un punto  $p \in M$  donde vale el resultado de la proposición anterior. Las *coordenadas lumínicas o nulas* las notaremos  $(x^-, x^+)$ , donde la métrica de Minkowski adquiere la forma  $\eta = -dx^- dx^+$ .

Sea  $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}$  la función tal que en coordenadas lumínicas tenemos  $g_{\mu\nu} = e^{2\sigma} \eta_{\mu\nu}$ . Denominaremos a esta función *factor conforme* o *exponente conforme* de  $g$ . Como veremos, nuevamente el objetivo de introducir una función auxiliar es simplificar la escritura de las ecuaciones de movimiento.

**Proposición 1.10.** *En las coordenadas lumínicas, a menos de términos de borde la acción resulta,*

$$S = \int_D (-2\rho \square \tilde{\sigma} - \rho \text{Tr}(P_\mu P^\mu)) \varepsilon_\eta \quad (1.66)$$

donde  $\tilde{\sigma} = \sigma + \frac{1}{4} \ln \rho$ .

*Demostración.* Tenemos

$$S = \int_D \left( \rho R - \rho \text{Tr}(P_\mu P^\mu) + \frac{1}{2} \rho^{-1} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho \right) \varepsilon_g \quad (1.67)$$

En coordenadas nulas,  $\eta_{\pm\mp} = -\frac{1}{2}$ ,  $\eta_{--} = \eta_{++} = 0$ . Entonces, tenemos las siguientes igualdades:

$$R = -2e^{-2\sigma}\square_{\eta}\sigma \quad (1.68)$$

$$P_{\mu}P^{\mu} = g^{\mu\nu}P_{\mu}P_{\nu} = e^{-2\sigma}\eta^{\mu\nu}P_{\mu}P_{\nu} \quad (1.69)$$

$$\varepsilon_g = e^{2\sigma}\varepsilon_{\eta} \quad (1.70)$$

Sustituyendo todo en la acción, tenemos

$$S = \int_D \left( -2\rho\square_{\eta}\sigma - \rho\text{Tr}(P_{\mu}P^{\mu}) + \frac{1}{2}\rho^{-1}\partial_{\mu}\rho\partial^{\mu}\rho \right) \varepsilon_{\eta} \quad (1.71)$$

Usando la igualdad

$$\rho\square\ln\rho = \square\rho - \rho^{-1}\partial_{\mu}\rho\partial^{\mu}\rho \quad (1.72)$$

a menos de términos de borde, tenemos

$$S = \int_D \left( -2\rho\square \left( \sigma + \frac{1}{4}\ln\rho \right) - \rho\text{Tr}(P_{\mu}P^{\mu}) \right) \varepsilon_{\eta} \quad (1.73)$$

□

**Observación 1.8.** El factor conforme no transforma como una función escalar bajo difeomorfismo, como se puede calcular explícitamente:

Si vamos a la proposición 1.2, los difeomorfismos conformes actúan sobre  $\sigma$  como

$$\mathcal{L}_{\xi}\sigma = \xi^{\pm}\partial_{\pm}\sigma + \frac{1}{2}\partial_{\pm}\xi_{\pm} \quad (1.74)$$

## 1.7. Ecuaciones de Movimiento

Para hallar las ecuaciones de movimiento, nuestro punto de partida es el Lagrangiano 1.60, que es una funcional respecto a la métrica bidimensional  $g$ , la densidad de área  $\rho$  y la zweibein  $\mathcal{V}$ .

**Proposición 1.11.** *Las ecuaciones de movimiento para la acción de Einstein-Hilbert en la variedad cociente*

$$S = \int_D \left( \rho R - \rho\text{Tr}(P^2) + \frac{1}{2}\rho^{-1}\nabla_{\mu}\rho\nabla^{\mu}\rho \right) \varepsilon_g \quad (1.75)$$

son

$$0 = D^{\mu}(\rho P_{\mu}) \quad (1.76)$$

$$0 = R - \text{Tr}(P^2) - \frac{1}{2}\rho^{-2}\nabla_{\mu}\rho\nabla^{\mu}\rho - \square\ln\rho \quad (1.77)$$

$$0 = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\rho\text{Tr}(P^2) + \rho\text{Tr}(P^{\mu}P^{\nu}) + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\rho^{-1}\nabla_{\lambda}\rho\nabla^{\lambda}\rho - \frac{1}{2}\rho^{-1}\nabla^{\mu}\rho\nabla^{\nu}\rho + \nabla^{\mu}\nabla^{\nu}\rho - g^{\mu\nu}\square\rho \quad (1.78)$$

*Demostración.* Realizando una variación de la acción, tenemos

$$S = \int_D \left( \rho R - \rho \text{Tr}[P^2] + \frac{1}{2} \rho^{-1} \nabla_\mu \rho \nabla^\mu \rho \right) \delta \varepsilon_g + \delta \left( \rho R - \rho \text{Tr}(P^2) + \frac{1}{2} \rho^{-1} \nabla_\mu \rho \nabla^\mu \rho \right) \varepsilon_g \quad (1.79)$$

Para la forma de volumen tenemos que

$$\delta \varepsilon_g = \frac{1}{2} \varepsilon_g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} := \frac{1}{2} \varepsilon_g \delta g_\mu^\mu \quad (1.80)$$

donde estamos definiendo  $\delta g_\mu^\mu$ . Las variaciones de los otros términos se hallan de manera usual:

$$\delta(\rho R) = R \delta \rho + \rho R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \rho g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \quad (1.81)$$

$$\delta(\rho \text{Tr}[P^2]) = \text{Tr}[P^2] \delta \rho + 2\rho \text{Tr}[P_\mu g^{\mu\nu} \delta P_\nu] + \rho \text{Tr}[P_\mu P_\nu \delta g^{\mu\nu}] \quad (1.82)$$

$$\delta(\rho^{-1} \nabla^2 \rho) = -\rho^{-2} \nabla^2 \rho \delta \rho + 2\rho^{-1} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \rho \nabla_\nu \delta \rho + \rho^{-1} \nabla_\mu \rho \nabla_\nu \rho \delta g^{\mu\nu} \quad (1.83)$$

donde

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla^\sigma (\nabla^\mu \delta g_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma \delta g_\mu^\mu) \quad (1.84)$$

Ahora veremos el término que contiene  $2\rho \text{Tr}[P_\mu g^{\mu\nu} \delta P_\nu]$ :

$$\rho \text{Tr}[P_\mu g^{\mu\nu} \delta P_\nu] = \text{Tr}[(\nabla_\mu(\rho P^\mu) + [J_\mu, \rho P^\mu])\mathcal{V}^{-1} \delta \mathcal{V}] - \nabla_\mu (\rho \text{Tr}[P^\mu \mathcal{V}^{-1} \delta \mathcal{V}]) \quad (1.85)$$

Agrupando todo:

$$\begin{aligned} S = & \int_D \left( \rho R - \rho \text{Tr}[P^2] + \frac{1}{2} \rho^{-1} \nabla_\mu \rho \nabla^\mu \rho \right) \frac{1}{2} \varepsilon_g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \\ & + \left( \rho R_{\mu\nu} + \rho \text{Tr}[P_\mu P_\nu] + \frac{1}{2} \rho^{-1} \nabla_\mu \rho \nabla_\nu \rho \right) \delta g^{\mu\nu} \varepsilon_g \\ & + \delta \rho \left( R - \text{Tr}(P^2) - \frac{1}{2} \rho^{-2} \nabla^2 \rho \right) \varepsilon_g + \\ & + 2 \text{Tr}[(\nabla_\mu(\rho P^\mu) + [J_\mu, \rho P^\mu])\mathcal{V}^{-1} \delta \mathcal{V}] \varepsilon_g + \\ & + (\rho^{-1} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \rho \nabla_\nu \delta \rho + \rho \nabla^\sigma (\nabla^\mu \delta g_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma \delta g_\mu^\mu) - \\ & - 2 \nabla_\mu (\rho \text{Tr}[P^\mu \mathcal{V}^{-1} \delta \mathcal{V}])) \varepsilon_g \end{aligned} \quad (1.86)$$

El último renglón contiene variaciones dentro de derivadas covariantes. Observar que el tercer sumando corresponde a un término de borde (teorema de Stokes). Los otros dos sumandos los podemos integrar por partes:

$$\rho^{-1} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \rho \nabla_\nu \delta \rho = -\delta \rho \nabla_\nu (\rho^{-1} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \rho) + \nabla_\nu (\delta \rho \rho^{-1} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \rho) \quad (1.87)$$

$$= -\delta \rho \square \ln \rho + \nabla_\nu (\rho^{-1} \delta \rho g^{\mu\nu} \nabla_\mu \rho) \quad (1.88)$$

y

$$\begin{aligned} \rho \nabla^\sigma (\nabla^\mu \delta g_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma \delta g_\mu^\mu) &= -\nabla^\sigma \rho (\nabla^\mu \delta g_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma \delta g_\mu^\mu) + \\ &+ \nabla^\sigma (\rho \nabla^\mu \delta g_{\sigma\mu} - \rho \nabla_\sigma \delta g_\mu^\mu) \end{aligned} \quad (1.89)$$

$$\begin{aligned} -\nabla^\sigma \rho (\nabla^\mu \delta g_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma \delta g_\mu^\mu) &= (\nabla^\mu \nabla^\sigma \rho - g^{\sigma\mu} \square \rho) \delta g_{\sigma\mu} + \\ &+ \nabla^\sigma (\nabla_\sigma \rho \delta g_\mu^\mu - \nabla^\mu \rho \delta g_{\mu\sigma}) \end{aligned} \quad (1.90)$$

Los sumandos que nos lleva a un término de borde son

$$\int_D \nabla^\sigma (\rho^{-1} \delta \rho \nabla_\sigma \rho - 2\rho \text{Tr}[P_\sigma \mathcal{V}^{-1} \delta \mathcal{V}] + \rho \nabla^\mu \delta g_{\sigma\mu} - \rho \nabla_\sigma \delta g_\mu^\mu + \nabla_\sigma \rho \delta g_\mu^\mu - \nabla^\mu \rho \delta g_{\mu\sigma}) \varepsilon_g \quad (1.91)$$

que en el capítulo siguiente veremos que nos llevará a calcular el potencial simpléctico.

Las ecuaciones de movimiento se deducen agrupando los términos en el bulk según las variaciones independientes  $\delta \rho$ ,  $\mathcal{V}^{-1} \delta \mathcal{V}$  y  $\delta g_{\mu\nu}$ .  $\square$

Las ecuaciones de movimiento de la proposición anterior las podemos escribir en coordenadas nulas alrededor de un punto, tomando  $\sigma$  como el factor conforme.

1. La primera de las ecuaciones resulta

$$D^\pm (\rho P_\pm) = 0 \quad (1.92)$$

2. La última de las ecuaciones la podemos escribir tomando las componentes  $\pm\mp$  y  $\pm\pm$  por separado: las componente  $\pm\mp$  dan

$$\square \rho = 0 \quad (1.93)$$

que en coordenadas lumínicas es  $\partial_- \partial_+ \rho = 0$ .

La diagonal es

$$\rho \text{Tr}(P_\pm P_\pm) - \frac{1}{2} \rho^{-1} \partial_\pm \rho \partial_\pm \rho + \nabla_\pm \nabla_\pm \rho = 0 \quad (1.94)$$

que se puede simplificar en

$$2\partial_\pm \hat{\sigma} \partial_\pm \rho = \rho \text{Tr}(P_\pm P_\pm) + \partial_\pm \partial_\pm \rho \quad (1.95)$$

3. La ecuación que contiene la curvatura es

$$0 = -2\square_\eta \sigma - \text{Tr}(P^\pm P_\pm) - \frac{1}{2} \rho^{-2} \partial_\pm \rho \partial^\pm \rho - \square_\eta \ln \rho \quad (1.96)$$

$$= -2\square_\eta \left( \sigma + \frac{1}{4} \ln \rho \right) - \text{Tr}(P^\pm P_\pm) - \frac{1}{2} \rho^{-1} \square_\eta \rho \quad (1.97)$$

que en vista de la ecuación para  $\rho$  es

$$2\Box_\eta(\hat{\sigma}) + \text{Tr}(P^\pm P_\pm) = 0 \quad (1.98)$$

**Observación 1.9.** La ecuación de segundo orden es una consecuencia más débil de las dos ecuaciones de primer orden. Ambas corresponden a una combinación de los vínculos de difeomorfismos Hamiltoniano y Espacial en la variedad cociente.

### 1.7.1. Gauge Conforme

Como ya vimos, la métrica  $g$  es conformemente plana,  $g = e^{2\sigma}\eta$ , y expresar el lagrangeano como funcional de  $\sigma, \rho, \mathcal{V}$ . Variando la acción construida con este lagrangeano, obtendremos las ecuaciones de movimiento en este gauge, que deben ser equivalentes a las obtenidas primero variando la acción y luego fijando el gauge.

**Observación 1.10.** Como veremos a continuación, las ecuaciones de primer orden para  $\sigma$  que hallamos son vínculos del sistema, compatibles con la ecuación de segundo orden para  $\sigma$  de la proposición siguiente.

**Proposición 1.12.** *Para la acción*

$$S = \int_D (-2\rho\Box(\tilde{\sigma}) - \rho\text{Tr}(P_\mu P^\mu)) \varepsilon_\eta \quad (1.99)$$

las ecuaciones de movimiento son (en coordenadas nulas)

$$\partial_- \partial_+ \rho = 0 \quad (1.100)$$

$$D_+(\rho P_-) + D_-(\rho P_+) = 0 \quad (1.101)$$

$$\partial_- \partial_+ \tilde{\sigma} + \frac{1}{2} \text{Tr}(P_+ P_-) = 0 \quad (1.102)$$

*Demostración.* Tomamos una variación  $\delta$  en la acción, variación que actúa en los campos  $\rho, \tilde{\sigma}$  y  $\mathcal{V}$ :

$$\delta S = \int_D (-2\delta\rho\Box(\tilde{\sigma}) - 2\rho\Box\delta\tilde{\sigma} - \delta\rho\text{Tr}(P_\mu P^\mu) - 2\rho\text{Tr}(P_\mu\delta P^\mu)) \varepsilon_\eta \quad (1.103)$$

$$\begin{aligned} &= - \int_D (2\Box\rho\delta\tilde{\sigma} - \delta\rho(2\Box\tilde{\sigma} + \text{Tr}(P_\mu P^\mu)) - 2\text{Tr}(D^\mu(\rho P_\mu)\mathcal{V}^{-1}\delta\mathcal{V})) \varepsilon_\eta \\ &+ \int_{\partial D} (-2\rho\nabla^\mu\delta\tilde{\sigma} + 2\nabla^\mu\rho\delta\tilde{\sigma} - 2\text{Tr}(\rho P_\mu\mathcal{V}^{-1}\delta\mathcal{V})) \varepsilon_{\eta\mu}. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Asumiendo que las variaciones se anulan en el borde, al igual que  $\nabla^\mu\delta\tilde{\sigma}$ , resultan las ecuaciones de movimiento del enunciado.  $\square$

**Observación 1.11.** Observar que obtuvimos la ecuación de segundo orden para  $\sigma$ , en vez de las ecuaciones de primer orden. Esto es debido a que fijamos parcialmente la libertad de difeomorfismos al tomar una métrica plana de la clase conforme de  $g$ , es decir, parte de la fijación del gauge la realizamos al exigir que no se varía la estructura de conos de luz relativos a la coordenadas y eso limita la variación.

### 1.7.2. Comentario sobre el exponente conforme

Las ecuaciones de vínculos para el factor conforme se pueden reescribir de una manera más compacta, como veremos a continuación.

**Proposición 1.13.** *El campo  $\rho$ , la densidad de área, puede ser utilizado como coordenada radial, y su conjugado armónico  $\tilde{\rho}$  como coordenada temporal.*

*Demostración.* Sean  $(z^-, z^+)$  coordenadas lumínicas en un entorno de un punto  $p \in M$ .

La ecuación de movimiento para  $\rho$  es  $\partial_- \partial_+ \rho = 0$ , que tiene solución inmediata  $\rho = \frac{1}{2}(\rho^+(z^+) - \rho^-(z^-))$ , donde  $\rho^+, \rho^-$  son dos funciones suaves que sólo dependen de  $z^+, z^-$  respectivamente. El conjugado armónico es  $\tilde{\rho} = \frac{1}{2}(\rho^+(z^+) + \rho^-(z^-))$ .

La línea de mundo del eje de simetría es una curva donde  $\rho = 0$ , pero  $d\rho \neq 0$ , pues en analogía con las coordenadas cilíndricas, la densidad de área de las órbitas de los campos de Killing crece linealmente con la distancia desde la línea de mundo del eje, a primer orden. Asumiremos que  $d\rho$  es espacial. Entonces:

$$0 < d\rho \cdot d\rho = -\partial_- \rho \partial_+ \rho \quad (1.105)$$

de donde  $\partial_- \rho, \partial_+ \rho \neq 0$ . Deducimos entonces que ambas son monótonas. Análogamente para la función  $\tilde{\rho}$ . Por tanto, pueden ser tomadas como coordenadas:  $\rho$  corresponde a una coordenada radial, y  $\tilde{\rho}$  a una coordenada temporal, asumiendo que  $z^-$  y  $z^+$  crecen hacia el futuro.  $\square$

De lo anterior, tenemos coordenadas lumínicas de preferencia una vez fijada la solución, i.e.,  $(\rho^-, \rho^+)$ .

**Definición 1.10.** Sean  $\gamma^\pm$  dos congruencias de geodésicas nulas tales que: sobre cada geodésica de  $\gamma^-$  la coordenada  $\rho^-$  es constante, y sobre cada geodésica de  $\gamma^+$  la coordenada  $\rho^+$  es constante, con  $\rho$  creciente hacia el futuro en  $\gamma^-$  y decreciente hacia el futuro en  $\gamma^+$ .

Supongamos entonces que tenemos una solución, las funciones  $\rho^-, \rho^+$  especificadas. La métrica depende de  $z^-, z^+$  como

$$g(z^-, z^+) = -e^{2\sigma(z^-, z^+)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.106)$$

Haciendo el cambio de coordenadas a  $\rho^-, \rho^+$ , obtenemos

$$g(\rho^-, \rho^+) = -e^{2\sigma(\rho^-, \rho^+)} (\partial_- \rho^- \partial_+ \rho^+)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.107)$$

$$= -e^{2\sigma(\rho^-, \rho^+) - \ln(\partial_- \rho^- \partial_+ \rho^+)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.108)$$

$$= -e^{2\sigma(\rho^-, \rho^+) - \ln(\partial_- \rho^- \partial_+ \rho^+) - \ln 4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.109)$$

que corresponde a definir un factor conforme de manera que  $\eta = d\rho^+ d\rho^-$ .

Es decir, a menos de una constante, siempre podemos reabsorber las coordenadas  $\rho^\pm$  dentro del factor conforme. Esto nos permite hacer la siguiente

**Definición 1.11.** Dada una solución a las ecuaciones de movimiento, sea  $\hat{\sigma} := \tilde{\sigma} - \frac{1}{2} \ln(\partial_+ \rho \partial_- \rho)$ .

De esta manera, el factor conforme de la métrica bidimensional de toda solución se escribe en términos de las coordenadas  $\rho^-, \rho^+$  como  $e^{\hat{\sigma}}$ .

**Observación 1.12.** Las ecuaciones de primer orden en términos de  $\hat{\sigma}$  resultan

$$2\partial_{\pm}\rho\partial_{\pm}\hat{\sigma} = \rho\text{Tr}(P_{\pm}P_{\pm}) \quad (1.110)$$

Observar que lo único que hicimos fue reescribir el factor conforme para que la métrica  $g$  siga siendo de la forma  $f^2\eta$ , aún bajo cambios de las funciones  $\rho$ . Expresado de otra manera, estamos construyendo un campo  $\hat{\sigma}$  que varía covariantemente al variar la solución  $\rho$  a la ecuación  $\partial_- \partial_+ \rho = 0$ . Sobre las ventajas de tomar tal campo, aparte de simplificar las ecuaciones, hablaremos más adelante cuando estudiemos la integrabilidad del sistema.

Efectivamente, bajo un difeomorfismo conforme la función  $\hat{\sigma}$  es un campo escalar:

$$\mathcal{L}_{\xi}\hat{\sigma} = \xi^{\pm}\partial_{\pm}\hat{\sigma} \quad (1.111)$$

**Observación 1.13.** Denominaremos *covariancia conforme* a la propiedad que mostramos más arriba: dadas dos métricas relacionadas por un cambio de coordenadas conforme, siempre podemos reabsorber una de las métricas en la otra mediante un reescalo del factor conforme  $\hat{\sigma}$ . Estas métricas estarán representadas por la misma clase conforme.

Esta covariancia es debido a la libertad de difeomorfismos correspondiente a los difeomorfismos conformes. De esta manera, estamos fijando parcialmente esta libertad al tomar un representante de la clase conforme de cada métrica.

## 1.8. Datos iniciales sobre una doble hoja nula

Consideremos un punto  $p \in M$ , la variedad cociente, que en la variedad original corresponde a un cilindro  $S_0$ . De ahora en adelante, denotaremos por  $S_0$  a  $p$ . Este punto tiene ciertas coordenadas lumínicas  $(x_0^-, x_0^+)$ . En un entorno suficientemente pequeño de  $S_0$ , consideramos los segmentos de geodésicas nulas  $\mathcal{N}_R := \{(x_0^-, s)\}_{s \in I}$  y  $\mathcal{N}_L := \{(s, x_0^+)\}_{s \in J}$ , con  $I = [x_0^+, x_R^+]$  y  $J = [x_L^-, x_0^-]$  dos intervalos de interior no vacío.

Observar que, por construcción, las geodésicas están en el futuro de  $S_0$ . Notaremos  $S_R, S_L$  a los extremos de  $\mathcal{N}_R, \mathcal{N}_L$  que no son  $S_0$ . En la figura 1.1 se muestran los elementos. Sea  $\mathcal{N} := \mathcal{N}_L \cup \mathcal{N}_R$ , que llamaremos *doble hoja nula*.

En un entorno suficientemente chico de  $S_0$ , los segmentos de geodésicas  $\mathcal{N}_L$  y  $\mathcal{N}_R$  forman una parte del borde de un dominio de dependencia<sup>1</sup> que es un diamante hacia el futuro de  $S_0$ .

<sup>1</sup>El dominio de dependencia de un subconjunto cerrado  $N$  del espacio-tiempo es el conjunto de puntos con la siguiente propiedad: toda curva causal que contiene al punto en cuestión intersecta a  $N$

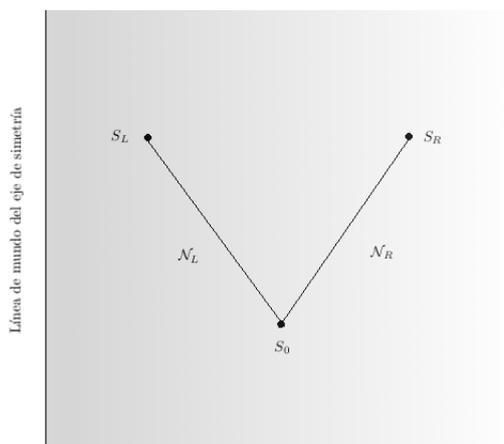


Figura 1.1: Esquema de  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_L \cup \mathcal{N}_R$  y de la variedad bidimensional sobre la que trabajaremos (sombreada).

En vista de la sección anterior, para obtener una solución a las ecuaciones de movimiento a partir de datos sobre  $\mathcal{N}$ , debemos especificar  $\rho, \sigma$  y  $\mathcal{V}$  en todo el dominio de Cauchy de  $\mathcal{N}$ .

Como primer paso, observar que la covariancia conforme nos independiza de la elección de las funciones  $\rho^\pm$  que elijamos, excepto por el valor de su suma (o resta) en un punto de referencia, a elección. Es decir, una vez fijado un punto sobre la variedad y un valor de las funciones  $\rho^\pm$  en él, todas las soluciones a  $\partial_- \partial_+ \rho = 0$  las trataremos como equivalentes. En particular, se pueden tomar como coordenadas nulas a las funciones  $\rho^+$  y  $\rho^-$ , como es el caso de las coordenadas de Weyl.

Una vez fijadas las coordenadas, la ecuación

$$D^\mu (\rho P_\mu) = 0 \tag{1.112}$$

nos indica que debemos conocer  $\mathcal{V}$  en la frontera pasada (o futura) del dominio de dependencia.

Esto es un caso especial de la situación general de la teoría de ecuaciones hiperbólicas: para un dominio espacial de datos iniciales, precisamos conocer el valor de los campos sobre el dominio, más su derivada normal. Para un dominio nulo, como es nuestro caso ( $\mathcal{N}$  son dos segmentos de geodésicas nulas), la dirección normal coincide con la dirección tangente.

Finalmente,  $\hat{\sigma}$  lo obtenemos integrando las ecuaciones de primer orden, una vez conocida la solución  $\mathcal{V}$ . Partiendo de un valor  $\hat{\sigma}_0$  de referencia, integramos una de las ecuaciones sobre una geodésica nula, luego al valor obtenido lo usamos como la constante de integración para la otra ecuación, y así obtendremos  $\hat{\sigma}$  en todo el dominio de Cauchy.

Por tanto, los datos iniciales serán:

1.  $\hat{\sigma}$  en un punto, que sin pérdida de generalidad será  $S_0$ . A tal dato lo llamaremos  $\hat{\sigma}_0$ .

2.  $\rho$  en un punto, que al igual que antes asumiremos que es  $S_0$ . Llamaremos a este dato  $\rho_0$ .
3. Por último, las funciones  $\mathcal{V}$  las debemos especificar en toda  $\mathcal{N}$ .

Nuestro espacio de soluciones estará parametrizado por los datos definidos arriba:

$$\mathcal{F} := \{(\rho_0, \hat{\sigma}_0, \mathcal{V}) : \rho_0, \hat{\sigma}_0 \in \mathbb{R}, \mathcal{V} : \mathcal{N} \rightarrow SL(2, \mathbb{R})\} \quad (1.113)$$

# Estructura simpléctica

## 2.1. Objetivos

Como vimos en el capítulo anterior, el espacio de fase que consideramos (a menos de una transformación conforme) está parametrizado por dos números  $\rho_0$  y  $\hat{\sigma}_0$ , y una función  $\mathcal{V} : \mathcal{N} \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ . Integrando las ecuaciones de movimiento a partir de estos datos nos da una solución en un dominio de dependencia de  $\mathcal{N}$ . Ver [42] y [10] para más detalles.

El espacio de fase tiene una estructura simpléctica estándar, construida a partir de la acción. El camino estándar comienza con la acción, luego se calcula el potencial simpléctico a partir de los términos de borde en la variación de la acción, y con éste la 2-forma simpléctica.

Nosotros seguiremos ese camino, sólo que en nuestro caso no tenemos explícitamente los datos iniciales  $\rho_0$  y  $\hat{\sigma}_0$  en la acción inicial, y siempre estamos cocientando las soluciones módulo transformaciones conformes. Esto nos introduce ciertos detalles técnicos que tenemos que resolver para obtener una 2-forma simpléctica en términos de los datos iniciales (i.e., en el espacio de fase, pues recordar que espacio de fase y el espacio de los datos iniciales tienen una correspondencia uno a uno).

Como primer paso, debemos definir sistemas de coordenadas adecuados para poder trabajar incorporando la libertad gauge de difeomorfismos conformes (la covarianza conforme de la que hablamos en la subsección 1.7.2), y luego definir qué tipo de variaciones consideraremos para los cálculos.

Una vez hecho esto, presentaremos los cálculos explícitos para el potencial simpléctico y la 2-forma simpléctica en términos de los datos iniciales, y por último comparemos los resultados con [36].

## 2.2. Coordenadas sobre $\mathcal{N}$

A partir de ahora notaremos a la variedad reducida como  $M$ . Como ya vimos:

**Definición 2.1.** Los datos iniciales serán  $\rho_0$  y  $\hat{\sigma}_0$ , correspondientes a los valores de  $\rho$  y  $\hat{\sigma}$  en  $S_0$ , y la zweibein  $\mathcal{V}$  especificada en  $\mathcal{N}$ , suave en  $\mathcal{N} \setminus S_0$  y continua en  $S_0$ .

En nuestro estudio de los datos iniciales, consideraremos a  $\mathcal{N}$  como un subconjunto del borde de una región  $D$  en  $M$ , como indica la figura 2.1. Esto implica que

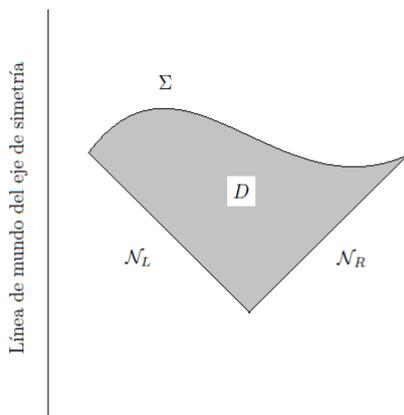


Figura 2.1: Dominio  $D$ , y sus bordes  $\Sigma$  y  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_L \cup \mathcal{N}_R$ .

la orientación en  $\mathcal{N}$  es la heredada como orientación borde de  $D$ . Entonces  $\mathcal{N}_L$  y  $\mathcal{N}_R$  tendrán orientaciones coherentes si utilizamos la misma carta sobre ellas.

Cualquier función  $\rho(z^-, z^+) = \rho^+(z^+) \pm \rho^-(z^-)$  cumple la ecuación de movimiento 1.100, donde  $\rho^-$  es una función solamente de  $z^-$ , y  $\rho^+$  es función solamente de  $z^+$ . Sin embargo, recordar de la sección 1.7.2 que  $\hat{\sigma}$  absorbe esta libertad. Por tanto, a menos de un difeomorfismo conforme que transforme dos soluciones  $\rho^\pm$  en  $\rho'^\pm$ , podemos considerar a las funciones  $\rho^\pm$  como coordenadas en  $M$  (ver la demostración de la proposición 1.13 para más detalles).

En las secciones siguientes trataremos con variaciones en el espacio de soluciones que tienen ciertas propiedades especiales, por ejemplo que dejan fijos entornos del borde de  $\mathcal{N}$ . Con el objetivo de poder tratar a  $\mathcal{N}_L$  y  $\mathcal{N}_R$  de manera análoga en los cálculos, definiremos dos sistemas de coordenadas sobre  $\mathcal{N}$ , cada uno solidario a una rama.

### 2.2.1. Coordenadas $x^\pm$

De ahora en adelante, las coordenadas que llamaremos  $(x^-, x^+)$  son coordenadas nulas tales que

$$x^\pm = \rho^\pm - \rho^-(S_0) \tag{2.1}$$

es decir, el dilatón está dado por

$$\rho = \frac{1}{2}(x^+ - x^-) \tag{2.2}$$

Observar que, por definición,  $x^-(S_0) = 0$ . En estas coordenadas, la métrica es

$$\eta(x^-, x^+) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Primero, observemos que  $(x^-, x^+)$  están determinadas unívocamente por su valor en un punto ( $S_0$  en este caso) y la función  $\rho$ . Para que esto quede claro, veamos el

valor de las coordenadas en los puntos  $S_L, S_0$  y  $S_R$ :

- En  $S_0$ , de la definición de las coordenadas se deduce que  $x^+(S_0) = 2\rho_0$ ; i.e.  $(x^-(S_0), x^+(S_0)) = (0, 2\rho_0)$ .
- Para ir de  $S_0$  a  $S_L$  nos movemos sobre  $\mathcal{N}_L$ , que es un segmento de geodésica nula y sobre la cual  $x^+$  es constante (por ser coordenada lumínica). Entonces  $x^+(S_L) = x^+(S_0) = 2\rho_0$ , y se deduce que  $x^-(S_L) = 2\rho_0 - 2\rho_L$  con  $\rho_L := \rho(S_L)$ ; i.e.  $(x^-(S_L), x^+(S_L)) = (2(\rho_0 - \rho_L), 2\rho_0)$ .
- Para ir de  $S_0$  a  $S_R$ , nos movemos sobre  $\mathcal{N}_R$ , que es un segmento de geodésica nula sobre la que  $x^-$  es constante. Por tanto,  $x^-(S_R) = x^-(S_0) = 0$ , y de la definición tenemos  $x^+(S_R) = 2\rho_R$ , con  $\rho_R := \rho(S_R)$ . Entonces  $(x^-(S_R), x^+(S_R)) = (0, 2\rho_R)$ .

Por último, sea  $p$  un punto en el interior de la región  $D$ . Por la única geodésica nula  $l$  tal que la función  $\rho$  es creciente hacia el pasado sobre ella, podemos definir un punto  $q$  sobre  $\mathcal{N}_R$ , de manera  $q = \mathcal{N}_L \cap l$ . Sobre  $l$  la coordenada  $x^+$  es constante, así que  $x^+(p) = x^+(q)$ , y este último valor es  $2\rho(q)$ , por lo visto en el tercer ítem anterior. Finalmente, de la definición,

$$x^-(p) = x^+(p) - 2\rho(p) = 2(\rho(q) - \rho(p))$$

Por tanto, las coordenadas  $x^\pm$  están unívocamente determinadas por su valor en  $S_0$  y la función  $\rho$ . Ver figura 2.2

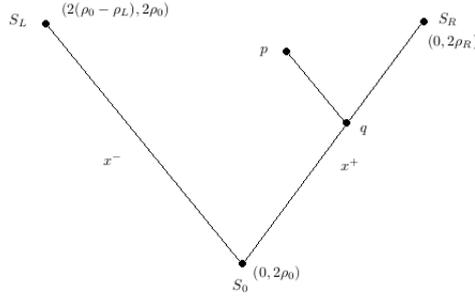


Figura 2.2: Coordenadas  $(x^-, x^+)$  en un entorno de la doble hoja nula  $\mathcal{N}$ , donde se indican los valores particulares de las coordenadas en los puntos  $S_L, S_0$  y  $S_R$ .

Ahora, veamos la orientación de  $\mathcal{N}$  con estas coordenadas. Para  $\mathcal{N}_R$  como borde de  $D$ , estas coordenadas dan a  $\mathcal{N}_R$  la misma orientación que la orientación borde:  $\partial_-$  es un vector entrante en  $D$ , así que  $\partial_- \lrcorner dx^- \wedge dx^+ = dx^+$ .

Observar que  $\mathcal{N}_L$  tiene la orientación contraria a la orientación borde de  $D$ :  $\partial_+$  es el vector entrante en  $D$ ,  $\partial_+ \lrcorner dx^- \wedge dx^+ = -dx^-$ .

### 2.2.2. Coordenadas $y^\pm$

Las coordenadas  $(y^+, y^-)$  son coordenadas nulas solidarias a  $\mathcal{N}_L$ , definidas como

$$y^\pm = \rho^\pm - \rho^+(S_0) \quad (2.4)$$

es decir, ahora el dilatón está dado por

$$\rho = \frac{1}{2}(y^+ - y^-) \quad (2.5)$$

y  $y^+(S_0) = 0$ .

La métrica en estas coordenadas es la misma que antes.

Al igual que verificamos para el caso de las coordenadas  $x^\pm$ , las coordenadas  $y^\pm$  están unívocamente determinadas por su valor en un punto y la función  $\rho$ . La deducción de los valores de  $y^\pm$  en  $S_L, S_0$  y  $S_R$  es análoga a la que hicimos en la subsección anterior, a continuación presentamos solamente el resultado

- $(y^-(S_0), y^+(S_0)) = (-2\rho_0, 0)$ .
- $(y^-(S_L), y^+(S_L)) = (-2\rho_L, 0)$ .
- $(y^-(S_R), y^+(S_R)) = (-2\rho_0, 2(\rho_R - \rho_0))$ .

En  $\mathcal{N}_L$ ,  $\partial_+$  es entrante en  $D$ , así que  $\partial_{+\lrcorner}(dy^- \wedge dy^+) = -dy^-$ , i.e., tiene orientación coherente con  $\mathcal{N}_R$ , y contraria a la orientación borde de  $D$ .

**Observación 2.1.** Es directo establecer la relación entre las coordenadas definidas antes:

$$x^+ = y^+ + 2\rho_0 \quad (2.6)$$

$$x^- = y^- + 2\rho_0 \quad (2.7)$$

donde es claro que el Jacobiano tiene determinante 1, preservando la orientación. Esta relación será de utilidad en el capítulo 5.

## 2.3. Variaciones sobre el espacio de soluciones

En nuestro cálculo del potencial simpléctico y de la forma simpléctica, y más tarde de los corchetes de Poisson, es necesario considerar las variaciones de la métrica que dejan fijas ciertas cartas y otras que no. A razón de poder entender bien el cálculo, es necesario que nos detengamos para explicar la distinción que hacemos de las variaciones, y cómo afectan a las coordenadas que definimos en la sección anterior.

Una variación de la métrica se define como la derivada a lo largo de una familia uniparamétrica dentro del espacio de métricas de la variedad  $M$ ,  $g_\lambda$ , de manera que para  $\lambda = 0$  estamos sobre la métrica de referencia  $g_0$ .

Cualquier familia uniparamétrica del espacio de métricas no es útil para nuestro propósito, pues nos interesa el caso en que las variaciones son tangentes al espacio de

soluciones. Para esto, es suficiente pedir que la familia uniparamétrica esté contenida en el espacio de soluciones a las ecuaciones de movimiento. Las ecuaciones linealizadas de movimiento para las variaciones  $\delta\sigma$ ,  $\delta\rho$  y  $\delta\mathcal{V}$  surgen como consecuencia de ello, y las soluciones a las ecuaciones linealizadas corresponden a las variaciones tangentes al espacio de soluciones de las ecuaciones originales.

Hasta ahora, hemos tomado un atlas de cartas que cubre la variedad cociente  $M$ . Tales cartas son independientes de la solución a las ecuaciones de Einstein, pues muñen a  $M$  con la estructura de variedad. Sin embargo, ciertas cartas locales son más útiles que otras.

El ejemplo más conocido son las coordenadas normales: en estas coordenadas, tomamos la proyección mediante el mapa exponencial del espacio tangente a un punto,  $\exp_p : \mathcal{B} \subset T_p M \rightarrow M$ , obteniendo la métrica en términos del tensor de Riemann y sus derivadas:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{3}R_{\alpha\mu\nu\beta}x^\alpha x^\beta + \frac{1}{6}(\nabla_\gamma R_{\alpha\mu\nu\beta})x^\alpha x^\beta x^\gamma + \dots \quad (2.8)$$

Entonces, el atlas compuesto por coordenadas normales (los números con los que especificamos la posición de un punto respecto de otro) dependen de la métrica y sus derivadas superiores.

Al variar la métrica (y como consecuencia también sus derivadas de orden superior), vamos continuamente de la métrica  $g_0$  a  $g_\lambda$ , de manera que, si nos paramos en un conjunto  $U_\alpha \subset M$  de la partición de la unidad y  $\phi_{\alpha,\lambda}$  las coordenadas normales asociadas a la métrica  $g_\lambda$  en tal abierto, tendremos que en general  $\phi_{\alpha,0}(p) \neq \phi_{\alpha,\lambda}(p)$ . Esto es lo que se conoce por *coordenadas móviles*.

Un atlas que no dependa de la métrica cumplirá que  $\phi_{\alpha,0}(p) = \phi_{\alpha,\lambda}(p)$ ,  $\forall \alpha, \lambda$ . Las denominaremos *coordenadas fijas*.

En términos más formales, consideremos  $M$  una variedad y  $\mathcal{A}$  un atlas maximal. *Sistemas de coordenadas móviles* son sistemas de coordenadas que dependen de un parámetro, digamos  $\lambda$ , de manera que para cada valor de  $\lambda$  cada carta traza una curva en  $\mathcal{A}$ . En particular,  $\lambda$  puede ser el parámetro de una familia de métricas que genera una variación sobre el espacio de métricas.

**Ejemplo 2.1.** Sea  $M = \mathbb{R}^2$ , y  $g_\lambda = (1 + \lambda)^2 dx^2 + dy^2$  la familia uniparamétrica de métricas. Las coordenadas normales polares en términos de las coordenadas cartesianas usuales son  $r(\frac{1}{1+\lambda} \cos \theta, \sin \theta)$ , que claramente depende de  $\lambda$ .

Ahora, si consideramos el punto de coordenadas normales ( $r = 1, \theta = 0$ ), vemos que su posición en  $\mathbb{R}^2$  respecto a las coordenadas cartesianas (que son fijas) cambia según varía  $\lambda$ . Ver la figura 2.3.

En nuestro caso, observar que estamos haciendo una elección de un atlas móvil al tomar como coordenadas las funciones  $\rho^\pm$ , pues son funciones que dependen de la métrica.

Por lo tanto, dada una variación  $\delta$ , y un campo  $F$  (escalar, vectorial o tensorial) sobre el que actúa, debemos especificar si las coordenadas en las que está expresado  $F$  son móviles o fijas, pues debemos tener en cuenta el movimiento entre valores para el mismo punto de la variedad en caso que las coordenadas sean móviles. En otras palabras, siempre podemos considerar las variaciones de  $F$  respecto a un atlas

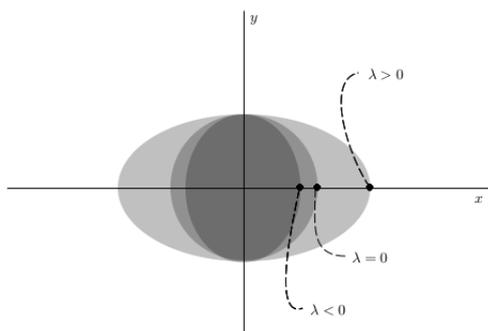


Figura 2.3: Podemos apreciar el cambio de la región  $x^2 + y^2 \leq 1$  según varía el parámetro  $\lambda$ .

arbitrario sobre la variedad. Sin embargo, si el atlas es móvil debemos tener cuidado al calcular la variación, pues aparece un término extra debido al movimiento de las coordenadas del atlas móvil.

Para ilustrar esto, volvamos al ejemplo anterior:

Consideremos el campo escalar  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $(x, y) \mapsto \text{dist}^2\left((0, 0), (x, y)\right)$ .

Entonces, la variación de  $f$  respecto a  $\lambda$  es

$$\delta_{fijas} f = 2(1 + \lambda) \quad (2.9)$$

Ahora, pensemos en  $f$  sobre el atlas móvil dado por las coordenadas normales polares:  $(x, y) \mapsto r$ , simplemente la distancia al origen en coordenadas normales. La variación de  $f$  respecto a  $\lambda$  en estas coordenadas será

$$\delta_{normales} f = 0 \quad (2.10)$$

Por otro lado, la variación de la métrica puede ser descrita como el pullback de la misma bajo la familia de difeomorfismos  $\phi_\lambda(x, y) = ((1 + \lambda)x, y)$ . El campo vectorial que genera tales difeomorfismos es  $\xi = (x, 0)$ , que no es otra cosa que el difeomorfismo que lleva las cartas polares normales a las cartas polares cartesianas usuales. Observar que

$$\mathcal{L}_\xi f = 2(1 + \lambda) \quad (2.11)$$

Juntando las ecuaciones 2.9, 2.10 y 2.11, obtenemos la siguiente igualdad

$$\delta_{fijas} f = \delta_{normales} f + \mathcal{L}_\xi f \quad (2.12)$$

Esta igualdad que obtuvimos en un caso muy simplificado vale en general, como se explica en el apéndice A, en particular la ecuación A.7. Toda variación la podemos escribir como una variación que deja fija la carta móvil más una variación que genera difeomorfismos, i.e., una derivada de Lie respecto a cierto campo vectorial  $\xi$ :

$$\delta = \delta^x + \mathcal{L}_\xi \quad (2.13)$$

donde  $\delta^x$  nos indica que la variación deja fija las coordenadas móviles  $x$ , y  $\xi$  es un campo vectorial que genera difeomorfismos, y que sus coordenadas están dadas por

$$\delta x^\pm = \xi^\pm \quad (2.14)$$

Para mostrar cómo operar con el difeomorfismo, observar que en nuestras coordenadas  $x^\pm$  tenemos

$$\xi^\pm = \delta x^\pm = \delta(\rho^\pm - \rho^-(S_0)) \quad (2.15)$$

Parte de la idea de invertir la 2-forma simpléctica (ver [38]), es tener variaciones que preservan el carácter nulo de la superficie nula  $\mathcal{N}$ , en nuestro caso dos geodésicas (recordar que tratamos el problema en el cociente por las órbitas de Killing); de esta manera podemos comparar datos que corresponden a una solución con datos que corresponden a otra solución, infinitesimalmente apartada, ambas soluciones con la misma superficie de datos iniciales nulos. Por otro lado, como mostraremos en la sección siguiente, es suficiente que la variación se anule en un entorno del borde de  $\mathcal{N}$  para asegurar la invertibilidad.

Las hipótesis sobre las variaciones que usaremos para el cálculo de la 2-forma simpléctica son las siguientes <sup>1</sup>:

**Definición 2.2.** Una *variación admisible*  $\delta$  será aquella que cumpla las siguientes condiciones:

1. Preserva el carácter nulo de las geodésicas nulas  $\mathcal{N}_L$  y  $\mathcal{N}_R$ , en el sentido que existe una familia uniparamétrica de métricas generadas por  $\delta$  que mantienen como segmentos de geodésicas nulas a  $\mathcal{N}_L$  y  $\mathcal{N}_R$ .
2. Existen entornos de los puntos  $S_L$  y  $S_R$  dentro de los cuales la métrica permanece fija.

Veremos en el capítulo siguiente que debemos agregar una condición más para poder invertir la forma simpléctica y calcular todos los corchetes de Poisson entre  $\rho_0$ ,  $\hat{\sigma}_0$  y  $\mathcal{V}$ .

**Observación 2.2.** En la sección siguiente, veremos que la primer condición que imponemos en la definición de variación admisible es una consecuencia de un resultado general sobre variaciones, junto con la condición 2.

A modo de ilustrar la definición, observemos la figura 2.4. En ella se muestran, como líneas punteadas, el resultado de mover  $\mathcal{N}$  sobre una carta fija sobre la variedad, usando para eso dos familias uniparamétricas de soluciones, tales que las variaciones que generan ambas trayectorias son tales que dejan invariante la métrica en entornos de  $S_L$  y  $S_R$ , marcados en color gris en la figura.

---

<sup>1</sup>Ver [36] para una demostración de esto

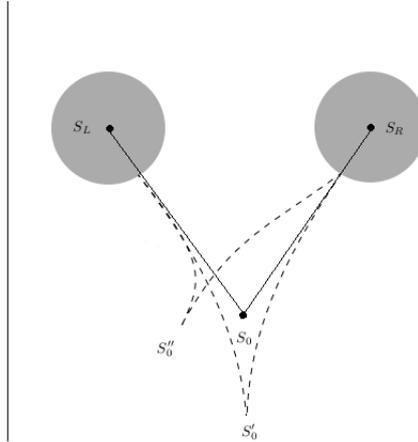


Figura 2.4: Variaciones arbitrarias  $\delta$  que dejan fijos entornos de  $S_L$  y  $S_R$ , pero que no cumplen el ítem 1 de la definición anterior.

El punto de intersección de ambas geodésicas nulas,  $S_0$ , se mueve respecto a un atlas fijo sobre la variedad: el carácter nulo de las curvas no es preservado por variaciones arbitrarias. Observar que  $S'_0$  y  $S_0$  están separados temporalmente, mientras que  $S''_0$  y  $S_0$  están separados espacialmente.

Para obtener una variación admisible, consideremos un generador de difeomorfismos que nos restituye  $\mathcal{N}$  al conjunto inicial sobre las coordenadas fijas en la variedad. Esto lo veremos en más detalle en la observación 2.3.

En las cartas  $x^\pm$  e  $y^\pm$ , podemos ver geoméricamente las variaciones respecto a una variación admisible, veamos la figura 2.5

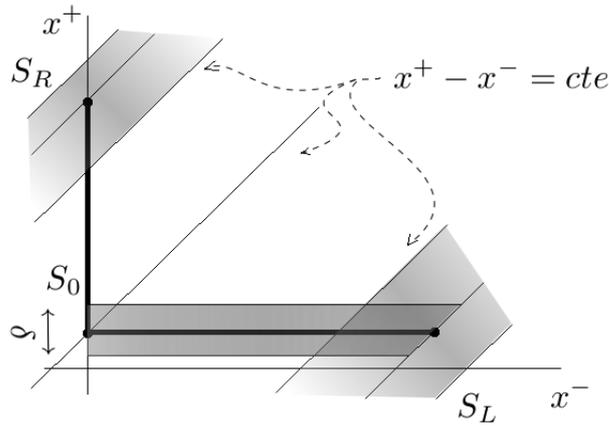


Figura 2.5: Las rectas  $x^+ - x^- = 2\rho$  corresponden a los valores de  $\rho$ , por definición. Alrededor de  $S_R$  y  $S_L$  el sobreado indica que no hay variaciones de  $\rho$ ; el sobreado alrededor de  $\mathcal{N}_L$  indica que hay variaciones en los valores de  $\rho$ .

La rectas  $x^+ - x^- = cte$  corresponden a valores  $2\rho$ , por definición de las coordenadas  $x^\pm$ . Como  $\delta$  es una variación admisible, existen dos entornos alrededor de  $S_L$  y  $S_R$  en los que no varía la métrica, en particular  $\rho$  se mantiene fijo. Esto lo inter-

pretamos en el plano  $x^-, x^+$  como dos rectas paralelas de pendiente 1 que forman un entorno de  $S_L$  y  $S_R$ , como observamos en la figura.

La variación fuera de tales entornos es arbitraria, con la condición que la doble hoja nula  $\mathcal{N}$  sea mantenida como segmentos de geodésicas nulas. Por eso, el valor de  $\rho$  en  $S_0$ , que notamos como  $\rho_0$  en el capítulo anterior, varía al variar la métrica.

Las coordenadas de  $S_R$  son  $(0, 2\rho_R)$ . Como  $x^- = 0$  por definición y  $\rho$  fijo en un entorno de  $S_R$ , resulta que  $\delta\rho_R = 0$  y entonces el punto que corresponde a  $S_R$  en el plano  $x^-, x^+$  estará fijo bajo variaciones admisibles. Las coordenadas de  $S_0$  son  $0, 2\rho_0$ . Una variación generará un movimiento tangente al eje  $x^+$ , pues la componente en  $x^-$  está fija, por construcción. Por último, la variación de las coordenadas en  $S_L$  nos da  $(2\delta\rho_0, 2\delta\rho_0)$ , que induce un movimiento en la recta de pendiente 1 que contiene a  $S_L$ .

Finalmente, como la variación preserva la nulidad de  $\mathcal{N}$ , la rama  $\mathcal{N}_L$  se mueve de manera paralela a la recta  $S_0S_R$ , pues es una geodésica nula de coordenada  $x^+$  constante. Un análisis análogo se hace para la carta  $y^\pm$ .

Todavía queda cierta libertad en el difeomorfismo que restituye a su lugar  $\mathcal{N}$ . Como veremos en la sección siguiente, tales difeomorfismos son vectores gauge de la forma simpléctica, y podemos sumarlos o restarlos sin tener una dinámica diferente.

Dentro de los difeomorfismos que constituyen el conjunto de vectores gauge, tendremos cierto subconjunto de difeomorfismos conformes. Como ejemplo, consideremos nuevamente la figura 2.5. De ella, resulta claro que el campo vectorial de coordenadas

$$\chi(x^-, x^+) = \left( - (2\delta\rho_0) \frac{x^-}{\rho_0}, (2\delta\rho_0) \frac{x^+}{\rho_0} - (2\delta\rho_0) \frac{\rho_R}{\rho_0} \right) \quad (2.16)$$

restituye la doble hoja nula al conjunto inicial en el plano  $x^-, x^+$ . Este campo vectorial es conforme, pues  $\chi^\pm$  es función de  $x^\pm$  respectivamente.

De esta manera, construimos un campo vectorial que genera difeomorfismo gauge de la forma simpléctica, como veremos en la sección siguiente.

## 2.4. Resultados generales

En esta sección veremos las definiciones de potencial simpléctico y de 2-forma simpléctica que usaremos, y luego repasaremos algunos resultados generales acerca de la estructura simpléctica derivada de la acción de Einstein-Hilbert en 4 dimensiones, y cómo se aplican al caso de nuestro estudio: relatividad general en el vacío con dos campos de Killing espaciales que conmutan y son ortogonales a superficies, caso que llamaremos “simetría cilíndrica”.

Sea  $\mathcal{L}$  un lagrangeano para cierta teoría de campos, con acción sobre un dominio  $D \subset M$  del espacio-tiempo dada por

$$S = \int_D \mathcal{L}(\phi^\alpha, \nabla_\mu \phi^\alpha, x^\nu) \varepsilon \quad (2.17)$$

donde  $\phi^\alpha : M \rightarrow F$ , siendo  $F$  el espacio donde toma valores el campo: un espacio de métricas, un grupo, etc.  $x^\nu$  denotan coordenadas sobre  $M$  en un entorno de  $D$ . En el caso de relatividad general,  $\mathcal{L} = \frac{\kappa}{2} \sqrt{-g} R$ .

Tomando una variación de la acción e igualando a cero:

$$\int_D \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} - \nabla_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \phi^\alpha} \right) \delta \phi^\alpha + \nabla_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \phi^\alpha} \delta \phi^\alpha \right) \right] \varepsilon = 0 \quad (2.18)$$

El último sumando del miembro izquierdo corresponde a un término de borde, por el teorema de Stokes. Las ecuaciones de movimiento se deducen tomando  $\delta$  tal que  $\delta \phi^\alpha|_D = 0$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} - \nabla_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \phi^\alpha} = 0$$

Ahora, consideramos variaciones  $\delta$  tal que son tangentes al espacio de soluciones a las ecuaciones de movimiento, pero que no necesariamente se anulen en el borde de  $D$ , que asumiremos está formado por dos hipersuperficies  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ . Esto nos lleva al término de borde:

$$\delta S = \int_{\partial D_{\Sigma\Sigma'}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \phi^\alpha} \delta \phi^\alpha \lrcorner \varepsilon \quad (2.19)$$

**Definición 2.3.** El potencial simpléctico asociado al lagrangiano  $\mathcal{L}$ , para la superficie  $\Sigma$ , se define sobre variaciones tangentes al espacio de soluciones como

$$\Theta_\Sigma[\delta] := \int_\Sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \phi^\alpha} \delta \phi^\alpha \lrcorner \varepsilon \quad (2.20)$$

con la orientación positiva respecto a un vector orientado hacia el futuro.

A partir del potencial simpléctico podemos definir la 2-forma simpléctica:

**Definición 2.4.** Dadas dos variaciones  $\delta_1, \delta_2$ , ambas tangentes al espacio de soluciones a las ecuaciones de movimiento, la 2-forma simpléctica  $\omega_\Sigma$  asociada al potencial simpléctico  $\Theta_\Sigma$  se calcula como

$$\omega_\Sigma[\delta_1, \delta_2] = \delta_2(\Theta_\Sigma[\delta_1]) - \delta_1(\Theta_\Sigma[\delta_2]) + \Theta_\Sigma[[\delta_1, \delta_2]] \quad (2.21)$$

Esta es una derivada exterior del potencial simpléctico en el espacio de datos iniciales.

Junto con la 2-forma simpléctica vienen además ciertas variaciones, que llamaremos *variaciones de gauge*, que a continuación damos su definición

**Definición 2.5.** Los vectores de degeneración de la 2-forma simpléctica son variaciones  $\Delta$  tales que

$$\omega_\Sigma[\Delta, \delta] = 0 \quad (2.22)$$

para toda variación  $\delta$  tangente al espacio de soluciones (i.e., solución a las ecuaciones linealizadas de movimiento).

Ahora que tenemos los objetos básicos, comenzaremos por escribir el potencial simpléctico para una hipersuperficie  $\Sigma$  en toda generalidad para la acción de Einstein-Hilbert:

$$\Theta_{\Sigma}[\delta] = -\kappa \int_{\Sigma} \delta \Gamma_{cb}^{[c} g^{a]b} \varepsilon_{a\dots} \quad (2.23)$$

ver [36] para una deducción del mismo<sup>2</sup>.

A partir de 2.23, se calcula la 2-forma simpléctica, dando como resultado

$$\omega_{\Sigma}[\delta_1, \delta_2] = \kappa \int_{\Sigma} \delta_2 \Gamma_{cb}^{[c} \delta_1 (g^{a]b} \varepsilon_{a\dots}) - (1 \leftrightarrow 2) \quad (2.24)$$

Es usual pensar a los difeomorfismos como los vectores gauge de relatividad general: tal es la covariancia bajo difeomorfismos. Sin embargo, como veremos a continuación, cuando la hipersuperficie  $\Sigma$  tiene borde no vacío, ser generador de difeomorfismos no es una condición suficiente para ser vector gauge.

Tomemos un generador de difeomorfismos,  $\mathcal{L}_v$ , es decir, la derivada de Lie a lo largo de un campo de vectores  $v$ , y calculemos la 2-forma simpléctica usando las ecuaciones 2.23 y 2.24.

Antes de mostrar el resultado final, cuya deducción puede encontrarse en [36], mencionamos la siguiente propiedad del potencial simpléctico: al evaluarlo en un generador de difeomorfismos  $\mathcal{L}_v$  es un término de borde:

$$\Theta_{\Sigma}[\mathcal{L}_v] = -\frac{\kappa}{2} \int_{\partial\Sigma} \nabla^a v^b \varepsilon_{ab\dots} \quad (2.25)$$

La 2-forma simpléctica evaluada sobre un generador de difeomorfismos es

$$\omega_{\Sigma}[\mathcal{L}_v, \delta] = \frac{\kappa}{2} \int_{\partial\Sigma} 3v^{[a} \delta \Gamma_{cd}^{c} g^{b]d} \varepsilon_{ab\dots} + \delta(g^{ca} \varepsilon_{ab\dots}) \nabla_c v^b \quad (2.26)$$

**Observación 2.3.** ■ Si  $v$  es un generador de difeomorfismos que se anula en un entorno del borde de  $\Sigma$ , entonces  $\nabla_a v_b \equiv 0$  en tal entorno, y por tanto el potencial simpléctico se anula. Además, de la ecuación 2.26, vemos que  $\omega[\cdot, \mathcal{L}_v] = 0$ , es un operador nulo sobre las variaciones que son soluciones a las ecuaciones linealizadas de movimiento. Esto último no es más que la definición de variación de gauge aplicada a  $\mathcal{L}_v$ .

- Por esta razón, si a una variación que cumpla la condición 2 de la definición 2.2 le sumamos un generador de difeomorfismos que restituya a  $\mathcal{N}$  como geodésicas nulas, será sumarle un vector de degeneración de la 2-forma, y por tanto no cambia el resultado. De esta manera, la hipótesis 1 en la definición 2.2 es una consecuencia de la hipótesis 2.

---

<sup>2</sup>Para evitar confusiones cuando hay índices tensoriales contraídos y otros sin contraer, denotaremos los índices que están sin contraer con puntos. Es una manera de mezclar la notación de índices abstractos usual para tensores con la notación sin índices para formas diferenciales.

## 2.5. Potencial Simpléctico en términos de datos iniciales

En esta sección calcularemos el potencial simpléctico 2.30 en términos de los datos iniciales sobre la doble rama nula  $\mathcal{N}$ .

Para que el cálculo sea más claro para el lector, evaluaremos el potencial simpléctico para cada rama por separado,  $\Theta_{\mathcal{N}_L}$  y  $\Theta_{\mathcal{N}_R}$ , siendo el cálculo en ambos casos análogo.

A su vez, como toda variación admisible la podemos escribir como  $\delta = \delta^x + \mathcal{L}_\chi$ , con  $\chi$  un generador de difeomorfismos conformes, y el potencial simpléctico es lineal en las variaciones, ambas contribuciones las calcularemos por separado. Como es esperable, cf. ecuación 2.25, el resultado de evaluar el potencial simpléctico en un generador de difeomorfismos es un término de borde. Al final, sumaremos  $\Theta_{\mathcal{N}_L} + \Theta_{\mathcal{N}_R} = \Theta_{\mathcal{N}}$ .

Comenzamos por aplicar la definición 2.3. A partir de los términos de borde descartados en la proposición 1.11, tenemos

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathcal{N}_A}[\delta] = & \frac{\kappa}{2} \int_{\Sigma} \varepsilon_{\mu} \cdot (\rho^{-1} \delta \rho \nabla^{\mu} \rho - 2 \text{Tr}(\rho P^{\mu} \mathcal{V}^{-1} \delta \mathcal{V}) + \\ & + \rho (\nabla^{\nu} \delta g_{\nu}^{\mu} - \nabla^{\mu} \delta g_{\nu}^{\nu}) - \delta g^{\mu\nu} \nabla_{\nu} \rho + \delta g_{\nu}^{\nu} \nabla^{\mu} \rho) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Reescribiendo el potencial simpléctico (módulo una variación total) en términos de  $\sigma$  en lugar de la métrica bidimensional  $g$ , y haciendo uso de las identidades

$$\rho (\nabla^{\nu} \delta g_{\nu}^{\mu} - \nabla^{\mu} \delta g_{\nu}^{\nu}) - \delta g^{\mu\nu} \nabla_{\nu} \rho + \delta g_{\nu}^{\nu} \nabla^{\mu} \rho = 2 (\delta \sigma \nabla^{\mu} \rho - \rho \nabla^{\mu} \delta \sigma) \quad (2.28)$$

y

$$\delta \sigma = \delta \hat{\sigma} - \frac{1}{4} \rho^{-1} \delta \rho, \quad (2.29)$$

el resultado es

$$\Theta_{\Sigma}[\delta] = \frac{\kappa}{2} \int_{\Sigma} \varepsilon_{\mu} \cdot (-2 \rho \text{Tr}(P^{\mu} \mathcal{V}^{-1} \delta \mathcal{V}) + 2 (\delta \hat{\sigma} \nabla^{\mu} \rho - \rho \nabla^{\mu} \delta \hat{\sigma})) \quad (2.30)$$

**Observación 2.4.** A partir de la definición de  $\tilde{\sigma}$ , observar que en las coordenadas  $x^{\pm}$  e  $y^{\pm}$  coincide con  $\hat{\sigma}$ . A partir de ahora trabajaremos con  $\tilde{\sigma}$ .

### 2.5.1. Potencial simpléctico en la rama derecha

En la rama derecha  $\mathcal{N}_R$  haremos uso de las coordenadas  $x^{\pm}$ . Como toda variación admisible  $\delta$  se descompone como suma de un generador de difeomorfismos conformes y una variación que deja fija las coordenadas, calcularemos primero la valuación del potencial simpléctico en un generador de difeomorfismos conformes. Sea  $\delta$  una variación admisible, y  $\xi$  un generador de difeomorfismos conformes, tal que  $\delta = \delta^x + \mathcal{L}_{\xi}$ . De la ecuación 2.15, se deduce que  $\xi^{+}(S_0) = 2\rho_0$  y  $\xi^{-}(S_0) = 0$ .

En la ecuación 2.30, calculamos en las coordenadas  $x^\pm$ :

$$\frac{1}{\kappa} \Theta_{\mathcal{N}_R} [\delta] = \int_{\mathcal{N}_R} \frac{1}{2} (dx^- \lrcorner \partial_-) dx^+ ((\delta \hat{\sigma} \partial^- \rho - \rho \partial^- \delta \hat{\sigma}) - \rho \text{Tr}(P^- \mathcal{V}^{-1} \delta \mathcal{V})) \quad (2.31)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{N}_R} (-\rho \text{Tr}(P^- \mathcal{V}^{-1} \delta \mathcal{V}) + (\delta \hat{\sigma} \partial^- \rho - \rho \partial^- \delta \hat{\sigma})) dx^+ \quad (2.32)$$

$$= \int_{\mathcal{N}_R} (\rho \text{Tr}(P_+ \mathcal{V}^{-1} \delta \mathcal{V}) - \delta \hat{\sigma} \partial_+ \rho + \rho \partial_+ \delta \hat{\sigma}) dx^+ \quad (2.33)$$

Ahora sustituimos en 2.33  $\delta$  por  $\mathcal{L}_\xi$ . Tanto  $\mathcal{V}$  como  $\hat{\sigma}$  transforman como campos escalares bajo los difeomorfismos conformes  $\xi$  del espacio cociente. Por tanto,

$$\frac{1}{\kappa} \Theta_{\mathcal{N}_R} [\mathcal{L}_\xi] = \int_{\mathcal{N}_R} (\rho \text{Tr}(P_+ \mathcal{V}^{-1} \xi^\mu \partial_\mu \mathcal{V}) - \xi^\mu \partial_\mu \hat{\sigma} \partial_+ \rho + \rho \partial_+ \mathcal{L}_\xi \hat{\sigma}) dx^+ \quad (2.34)$$

La componente de  $\xi$  transversal a  $\mathcal{N}_R$  es cero sobre la geodésica: sobre  $\mathcal{N}_R$  la coordenada  $x^-$  es fija, eso implica que  $\xi^-(x^-)$  es constante de valor  $\xi^-(x_0^-)$  en toda  $\mathcal{N}_R$ , pues  $\xi$  es un difeomorfismo conforme. Como las variaciones que estamos considerando fijan  $S_R$ , entonces  $\xi^-(x_0^-) = 0$ .

Así que se anulan las contribuciones de  $\xi^-$ :

$$\frac{1}{\kappa} \Theta_{\mathcal{N}_R} [\mathcal{L}_\xi] = \int_{\mathcal{N}_R} (\xi^+ \rho \text{Tr}(P_+ \mathcal{V}^{-1} \partial_+ \mathcal{V}) - \xi^+ \partial_+ \hat{\sigma} \partial_+ \rho + \rho \partial_+ (\mathcal{L}_\xi \hat{\sigma})) dx^+ \quad (2.35)$$

$$= \int_{\mathcal{N}_R} (\xi^+ (\text{Tr}(\rho P_+ \mathcal{V}^{-1} \partial_+ \mathcal{V}) - 2 \partial_+ \hat{\sigma} \partial_+ \rho) + \partial_+ (\rho \mathcal{L}_\xi \hat{\sigma})) dx^+ \quad (2.36)$$

$$= (\rho \mathcal{L}_\xi \hat{\sigma}) |_{\partial \mathcal{N}_R} \quad (2.37)$$

donde en la última igualdad usamos la ortogonalidad de  $P_+$  y  $Q_+$  respecto a la forma bilineal invariante  $\text{Tr}$  (ver Apéndice B) y la ecuación de primer orden para  $\hat{\sigma}$ .

Por último,  $\xi$  (en particular también  $\xi^+$ ) se anula en un entorno de  $S_R$ , debido a que la variación admisible  $\delta$ , por definición, se anula dentro de un entorno de  $S_R$ . Esto implica que la valuación del resultado anterior en  $S_R$  es cero, y por tanto

$$\Theta_{\mathcal{N}_R} [\mathcal{L}_\xi] = -\kappa \rho_0 \mathcal{L}_\xi \hat{\sigma} |_{S_0} \quad (2.38)$$

Observar que, en concordancia con la ecuación 2.25, evaluar el potencial simpléctico en un generador de difeomorfismos nos da un término de borde.

Ahora veremos el resultado de evaluar el potencial simpléctico en una variación  $\delta^x$  que deja fija la carta  $x^\pm$ , es decir,  $\rho = \frac{1}{2}(x^+ - x^-)$  no varía, pero  $\hat{\sigma}$  y  $\mathcal{V}$  sí. Sustituimos  $\delta$  por  $\delta^x$  en 2.33:

$$\frac{1}{\kappa} \Theta_{\mathcal{N}_R} [\delta^x] = \int_{\mathcal{N}_R} (\rho \text{Tr}(P_+ \mathcal{V}^{-1} \delta^x \mathcal{V}) - \partial_+ \rho \delta^x \hat{\sigma} + \rho \partial_+ \delta^x \hat{\sigma}) dx^+ \quad (2.39)$$

$$= \int_{\mathcal{N}_R} (\rho \text{Tr}(P_+ \mathcal{V}^{-1} \delta^x \mathcal{V}) - 2 \partial_+ \rho \delta^x \hat{\sigma} + \partial_+ (\rho \delta^x \hat{\sigma})) dx^+ \quad (2.40)$$

Al igual que el difeomorfismo, la componente  $\delta^x$  de una variación admisible se anula en un entorno de  $S_R$ . Teniendo en cuenta esto, el tercer sumando es un término de borde evaluado sólo en  $S_0$ :  $-\kappa\rho_0\delta^x\hat{\sigma}|_{S_0}$ .

El segundo término se puede expresar como una variación total más una contribución del borde, pues en el caso de las coordenadas que estamos usando,  $\partial_{\pm}\rho = \pm\frac{1}{2}$ :

$$\int_{\mathcal{N}_R} \delta^x \hat{\sigma} dx^+ = \delta \left( \int_{\mathcal{N}_R} \hat{\sigma} dx^+ \right) + \hat{\sigma}_0 \delta x^+(S_0) \quad (2.41)$$

$$= 2\hat{\sigma}_0 \delta \rho_0 + \delta \left( \int_{\mathcal{N}_R} \hat{\sigma} dx^+ \right) \quad (2.42)$$

donde hemos usado que los extremos de integración también varían bajo  $\delta$ , y por eso aparece el segundo término en la primera ecuación.

Por lo tanto, a menos de variaciones totales,

$$\frac{1}{\kappa} \Theta_{\mathcal{N}_R} [\delta^x] = -2\hat{\sigma}_0 \delta \rho_0 - \rho_0 \delta^x \hat{\sigma} |_{S_0} + \int_{\mathcal{N}_R} \rho \text{Tr}(P_+ \mathcal{V}^{-1} \delta^x \mathcal{V}) dx^+ \quad (2.43)$$

Sumando la contribución del generador de difeomorfismos y la variación  $\delta^x$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \Theta_{\mathcal{N}_R} [\mathcal{L}_\xi + \delta^x] &= -\rho_0 (\mathcal{L}_\xi \hat{\sigma} + \delta^x \hat{\sigma}) |_{S_0} - 2\hat{\sigma}_0 \delta \rho_0 + \\ &+ \int_{\mathcal{N}_R} \rho \text{Tr}(P_+ \mathcal{V}^{-1} \delta^x \mathcal{V}) dx^+ \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$= -\rho_0 \delta \hat{\sigma}_0 - 2\hat{\sigma}_0 \delta \rho_0 + \int_{\mathcal{N}_R} \rho \text{Tr}(P_+ \mathcal{V}^{-1} \delta^x \mathcal{V}) dx^+ \quad (2.45)$$

$$= \rho_0 \delta \hat{\sigma}_0 - 2\delta (\hat{\sigma}_0 \rho_0) + \int_{\mathcal{N}_R} \rho \text{Tr}(P_+ \mathcal{V}^{-1} \delta^x \mathcal{V}) dx^+ \quad (2.46)$$

Quitando la variación total, el potencial simpléctico en términos de los datos iniciales en la rama derecha es

$$\boxed{\Theta_{\mathcal{N}_R} = \kappa \rho_0 \delta \hat{\sigma}_0 + \kappa \int_{\mathcal{N}_R} \rho \text{Tr}(P_+ \mathcal{V}^{-1} \delta^x \mathcal{V}) dx^+} \quad (2.47)$$

**Observación 2.5.** El resultado que obtuvimos en la ecuación 2.47 es el mismo que se obtiene de la ecuación para 3+1 dimensiones 2.23 luego de reducir a dos dimensiones y trabajar con las coordenadas que hemos definido.

### 2.5.2. Potencial simpléctico en la rama izquierda

En la rama izquierda usamos las coordenadas  $y^\pm$ . Veamos que el resultado se deduce de manera análoga al que obtuvimos para la rama derecha. En la ecuación 2.30, la orientación en la curva  $\Sigma$  es la de una curva que es el borde de un dominio en la variedad cociente, y por tanto tiene la orientación futura. En el caso de  $\mathcal{N}_L$  con la carta  $y^\pm$ , tiene la orientación contraria a la futura, pues  $\partial_+$  es el vector futuro, y  $\partial_{+\lrcorner}(dy^- \times dy^+) = -dy^-$ . Así que

$$\int_{\Sigma} \longrightarrow - \int_{\mathcal{N}_L} \quad (2.48)$$

y entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \Theta_{\mathcal{N}_L} [\delta] &= - \int_{\mathcal{N}_L} \frac{1}{4} (-1) (dx^+ \lrcorner \partial_+) dx^- (-2\rho \text{Tr}(P^+ \mathcal{V}^{-1} \delta \mathcal{V}) + \\ &\quad + 2(\delta \hat{\sigma} \partial^+ \rho - \rho \partial^+ \delta \hat{\sigma})) \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$= \frac{1}{4} \int_{\mathcal{N}_L} (-2\rho \text{Tr}(P^+ \mathcal{V}^{-1} \delta \mathcal{V}) + 2(\delta \hat{\sigma} \partial^+ \rho - \rho \partial^+ \delta \hat{\sigma})) dx^- \quad (2.50)$$

$$= \int_{\mathcal{N}_L} (\rho \text{Tr}(P_- \mathcal{V}^{-1} \delta \mathcal{V}) - \delta \hat{\sigma} \partial_- \rho + \rho \partial_- \delta \hat{\sigma}) dx^- \quad (2.51)$$

que es la misma expresión que la ecuación 2.33, sólo que en la rama izquierda. Por tanto, el cálculo sigue igual que antes, y obtenemos

$$\Theta_{\mathcal{N}_L} [\delta] = \kappa \rho_0 \delta \hat{\sigma}_0 + \kappa \int_{\mathcal{N}_L} \text{Tr}(\rho P_- \mathcal{V}^{-1} \delta^y \mathcal{V}) dy^- \quad (2.52)$$

### 2.5.3. Potencial Simpléctico Total

Ahora que hemos calculado las contribuciones de ambas ramas al potencial simpléctico, nos queda sumar las expresiones 2.47 y 2.52 para obtener el potencial total sobre la doble hoja nula  $\mathcal{N}$ :

$$\boxed{\frac{1}{\kappa} \Theta_{\mathcal{N}} = 2\rho_0 \delta \hat{\sigma}_0 + \int_{\mathcal{N}_L} \rho \text{Tr}(P_- \mathcal{V}^{-1} \delta^y \mathcal{V}) dy^- + \int_{\mathcal{N}_R} \rho \text{Tr}(P_+ \mathcal{V}^{-1} \delta^x \mathcal{V}) dx^+} \quad (2.53)$$

## 2.6. 2-forma simpléctica en términos de datos iniciales

Como la definición 2.4 para la 2-forma simpléctica es lineal en el potencial simpléctico, calcularemos por separado las contribuciones de los tres términos de la ecuación 2.53. Comenzaremos por el más sencillo: la contribución de  $S_0$ . En  $\omega_{\mathcal{N}}$  da lugar al término:

$$2\kappa \delta_2 \rho_0 \delta_1 \hat{\sigma}_0 - 2\kappa \delta_1 \rho_0 \delta_2 \hat{\sigma}_0 \quad (2.54)$$

pues la evaluación del potencial simpléctico en  $[\delta_1, \delta_2]$  se cancela con términos que provienen de las otras dos evaluaciones (cf. ecuación 2.21).

**Observación 2.6.** Frecuentemente en este trabajo tendremos que escribir un término y a continuación otro con el signo cambiado y las variaciones  $\delta_1$  y  $\delta_2$  invertidas de lugar. Para no recargar las ecuaciones, anotaremos  $(1 \leftrightarrow 2)$ . Por ejemplo:

$$2\kappa \delta_2 \rho_0 \delta_1 \hat{\sigma}_0 - 2\kappa \delta_1 \rho_0 \delta_2 \hat{\sigma}_0 = 2\kappa \delta_2 \rho_0 \delta_1 \hat{\sigma}_0 - (1 \leftrightarrow 2)$$

Los términos segundo y tercero en 2.53 son integrales sobre  $\mathcal{N}_L$  y  $\mathcal{N}_R$  respectivamente. La proposición A.1 nos permite calcular variaciones de integrales donde los extremos también varían. La integral sobre la rama derecha que aparece en el potencial simpléctico contribuye a la 2-forma simpléctica con los siguientes términos:

$$\left[ -2\kappa\rho_0\delta_2\rho_0\text{Tr}(P_+\mathcal{V}^{-1}\delta_1^x\mathcal{V})_{S_0} + \kappa \int_{\mathcal{N}_R} \rho\text{Tr}(\delta_2^x(P_+\mathcal{V}^{-1})\delta_1^x\mathcal{V})dx^+ \right] - (1 \leftrightarrow 2) \quad (2.55)$$

Pasaremos ahora a la demostración de la ecuación anterior: calculemos las segundas variaciones:

$$\begin{aligned} \delta_2 \left( \int_{\mathcal{N}_R} \rho\text{Tr}(P_+\mathcal{V}^{-1}\delta_1^x\mathcal{V})dx^+ \right) &= \delta_2 \left( \int_{2\rho_0}^{2\rho_R} \rho\text{Tr}(P_+\mathcal{V}^{-1}\delta_1^x\mathcal{V})dx^+ \right) \\ &= 2\rho_R\delta_2\rho_R\text{Tr}(P_+\mathcal{V}^{-1}\delta_1^x\mathcal{V})_{S_R} - \\ &\quad - 2\delta_2\rho_0\rho_0\text{Tr}(P_+\mathcal{V}^{-1}\delta_1^x\mathcal{V})_{S_0} + \\ &\quad + \int_{2\rho_0}^{2\rho_R} \delta_2^x (\rho\text{Tr}(P_+\mathcal{V}^{-1}\delta_1^x\mathcal{V})) dx^+ \quad (2.56) \end{aligned}$$

Por definición de variaciones admisible,  $\delta_1\rho_R = \delta_2\rho_R = 0$ . Además, por definición de variación que deja fija la carta  $x$ , tenemos que  $\delta_1^x\rho = \delta_2^x\rho = 0$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \delta_2 \left( \int_{\mathcal{N}_R} \rho\text{Tr}(P_+\mathcal{V}^{-1}\delta_1^x\mathcal{V})dx^+ \right) &= -2\rho_0\delta_2\rho_0\text{Tr}(P_+\mathcal{V}^{-1}\delta_1^x\mathcal{V})_{S_0} + \\ &\quad + \int_{2\rho_0}^{2\rho_R} \rho\text{Tr}(\delta_2^x(P_+\mathcal{V}^{-1})\delta_1^x\mathcal{V})dx^+ + \\ &\quad + \int_{2\rho_0}^{2\rho_R} \rho\text{Tr}(P_+\mathcal{V}^{-1}\delta_2^x(\delta_1^x\mathcal{V}))dx^+ \quad (2.57) \end{aligned}$$

Análogamente, para la contribución de  $\delta_1\Theta_{\mathcal{N}_R}[\delta_2]$ , cambiamos  $1 \leftrightarrow 2$ . A su vez, el término con el conmutador se cancela nuevamente, y se deduce el resultado. El mismo cálculo lo podemos realizar para la rama izquierda; su contribución a la 2-forma simpléctica es

$$2\kappa\rho_0\delta_2\rho_0\text{Tr}(P_-\mathcal{V}^{-1}\delta_1^y\mathcal{V})_{S_0} + \kappa \int_{\mathcal{N}_L} \rho\text{Tr}(\delta_2^y(P_-\mathcal{V}^{-1})\delta_1^y\mathcal{V})dy^- - (1 \leftrightarrow 2) \quad (2.58)$$

donde el signo del primero término es + porque la coordenada  $y^-$  va de  $-2\rho_0$  a  $-2\rho_L$  sobre  $\mathcal{N}_L$ .

La 2-forma simpléctica en función de los datos iniciales se obtiene sumando las contribuciones que calculamos en 2.54, 2.55 y 2.58:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\kappa} \omega_{\mathcal{N}} [\delta_1, \delta_2] &= \left[ 2\delta_2 \rho_0 \delta_1 \hat{\sigma}_0 - 2\rho_0 \delta_2 \rho_0 (\text{Tr}(-P_- \mathcal{V}^{-1} \delta_1^y \mathcal{V}) + \text{Tr}(P_+ \mathcal{V}^{-1} \delta_1^x \mathcal{V}))_{S_0} \right. \\
 &\quad + \int_{\mathcal{N}_L} \rho \text{Tr}(\delta_2^y (P_- \mathcal{V}^{-1}) \delta_1^y \mathcal{V}) dy^- \\
 &\quad \left. + \int_{\mathcal{N}_R} \rho \text{Tr}(\delta_2^x (P_+ \mathcal{V}^{-1}) \delta_1^x \mathcal{V}) dx^+ \right] - (1 \leftrightarrow 2)
 \end{aligned}
 \tag{2.59}$$

La ecuación 2.59 es el resultado principal de este capítulo: la 2-forma simpléctica para el espacio de fase, parametrizado por los datos iniciales sobre la doble rama nula  $\mathcal{N}$ . Lo que resta de la presente sección consiste en simplificar lo máximo posible la expresión obtenida, con el objetivo que el cálculo de los corchetes sea lo más claro y sencillo posible.

Como primer paso hacia una simplificación de la expresión 2.59, queremos que quede expresada explícitamente en términos de  $\mathcal{V}$ , pues como se puede apreciar en las integrales, tenemos variaciones de  $P_{\pm} \mathcal{V}^{-1}$ .

**Definición 2.6.** Dada una variación logarítmica de  $\mathcal{V}$ , i.e.  $\mathcal{V}^{-1} \delta \mathcal{V}$ , notaremos su componente en  $\mathfrak{k}$  punto a punto de la variedad como

$$\mathcal{V}^{-1} \Delta \mathcal{V}(p) := (\mathcal{V}^{-1} \delta \mathcal{V}(p))_{\mathfrak{k}}$$

lo cual define una variación  $\Delta \mathcal{V}$  de  $\mathcal{V}$ .

$\Delta \mathcal{V}$  es una variación  $q$ -covariante en el siguiente sentido: para todo  $h(x)$  un campo  $q$ -valuado:

$$\Delta(\mathcal{V}h) = \mathcal{V}h (h^{-1} \mathcal{V}^{-1} \delta(\mathcal{V}h))_{\mathfrak{k}} \tag{2.60}$$

$$= \mathcal{V}h (h^{-1} \mathcal{V}^{-1} \delta \mathcal{V}h + h^{-1} \delta h)_{\mathfrak{k}} \tag{2.61}$$

$$= \mathcal{V} (\mathcal{V}^{-1} \delta \mathcal{V})_{\mathfrak{k}} h \tag{2.62}$$

$$= (\Delta \mathcal{V}) h \tag{2.63}$$

donde en la tercera ecuación usamos que las conjugaciones bajo elementos de  $q$  preservan  $\mathfrak{k}$ .

Sea  $P$  la componente simétrica de traza cero de la conexión  $J$ . Definimos  $\Delta P$  como la variación de  $P$  correspondiente a  $\Delta \mathcal{V}$ . Calcularemos  $\Delta P$  en términos de  $\delta P$  para poder simplificar la forma simpléctica.

- Si  $P = (\mathcal{V}^{-1} d\mathcal{V})_{\mathfrak{k}}$ , entonces

$$\Delta P = \delta P + \left[ (\mathcal{V}^{-1} \delta \mathcal{V})_{\mathfrak{h}}, P \right] \tag{2.64}$$

*Demostración.* Consideremos la conexión  $J = \mathcal{V}^{-1} d\mathcal{V}$  definida en el capítulo 1. Entonces:

$$\Delta P = (\Delta(\mathcal{V}^{-1}d\mathcal{V}))_{\mathfrak{k}} \quad (2.65)$$

$$= (-\mathcal{V}^{-1}\Delta\mathcal{V}J + \mathcal{V}^{-1}d\Delta\mathcal{V})_{\mathfrak{k}} \quad (2.66)$$

$$= \left(-\mathcal{V}^{-1}\delta\mathcal{V}J + (\mathcal{V}^{-1}\delta\mathcal{V})_{\mathfrak{h}}J + \mathcal{V}^{-1}d(\delta\mathcal{V} - \mathcal{V}(\mathcal{V}^{-1}\delta\mathcal{V})_{\mathfrak{q}})\right)_{\mathfrak{k}} \quad (2.67)$$

$$= \left(\delta J + (\mathcal{V}^{-1}\delta\mathcal{V})_{\mathfrak{q}}J - J(\mathcal{V}^{-1}\delta\mathcal{V})_{\mathfrak{q}} - d(\mathcal{V}^{-1}\delta\mathcal{V})_{\mathfrak{q}}\right)_{\mathfrak{k}} \quad (2.68)$$

$$= \delta P + [(\mathcal{V}^{-1}\delta\mathcal{V})_{\mathfrak{q}}, J]_{\mathfrak{k}} \quad (2.69)$$

Como vimos en la sección 1.5,  $[\mathfrak{k}, \mathfrak{q}] \subset \mathfrak{k}$  y  $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}], [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{q}$ , en el conmutador la contribución de  $Q$  es nula <sup>3</sup>.  $\square$

- Los integrandos de la forma simpléctica se pueden reescribir como

$$\mathrm{Tr}(\delta_2(P\mathcal{V}^{-1})\delta_1\mathcal{V}) - (1 \leftrightarrow 2) = \mathrm{Tr}(\Delta_2P\mathcal{V}^{-1}\Delta_1\mathcal{V}) - (1 \leftrightarrow 2) \quad (2.70)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\delta_2(P\mathcal{V}^{-1})\delta_1\mathcal{V}) - (1 \leftrightarrow 2) &= \mathrm{Tr}(\delta_2P\mathcal{V}^{-1}\delta_1\mathcal{V} - P\mathcal{V}^{-1}\delta_2\mathcal{V}\mathcal{V}^{-1}\delta_1\mathcal{V}) - (1 \leftrightarrow 2) \\ &= \mathrm{Tr}(\delta_2P\mathcal{V}^{-1}\delta_1\mathcal{V}) - (1 \leftrightarrow 2) \\ &\quad + \mathrm{Tr}(P[\mathcal{V}^{-1}\delta_1\mathcal{V}, \mathcal{V}^{-1}\delta_2\mathcal{V}]) \end{aligned} \quad (2.71)$$

A su vez, por la ortogonalidad respecto a la forma de Cartan-Killing de la descomposición  $\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \oplus \mathfrak{k}$ :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(P[\mathcal{V}^{-1}\delta_1\mathcal{V}, \mathcal{V}^{-1}\delta_2\mathcal{V}]) &= \mathrm{Tr}(P[\mathcal{V}^{-1}\Delta_1\mathcal{V}, (\mathcal{V}^{-1}\delta_2\mathcal{V})_{\mathfrak{q}}]) \\ &\quad + \mathrm{Tr}(P[(\mathcal{V}^{-1}\delta_1\mathcal{V})_{\mathfrak{q}}, \mathcal{V}^{-1}\Delta_2\mathcal{V}]) \\ &= \mathrm{Tr}((\mathcal{V}^{-1}\delta_1\mathcal{V})_{\mathfrak{q}}[\mathcal{V}^{-1}\Delta_2\mathcal{V}, P]) - (1 \leftrightarrow 2) \end{aligned} \quad (2.72)$$

Volviendo a la primera ecuación, y volviendo a usar la ortogonalidad respecto a  $\mathrm{Tr}$ :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\delta_2(P\mathcal{V}^{-1})\delta_1\mathcal{V}) - (1 \leftrightarrow 2) &= \mathrm{Tr}(\delta_2P\mathcal{V}^{-1}\delta_1\mathcal{V} + (\mathcal{V}^{-1}\delta_1\mathcal{V})_{\mathfrak{q}}[\mathcal{V}^{-1}\Delta_2\mathcal{V}, P]) - (1 \leftrightarrow 2) \\ &= \mathrm{Tr}\left[\left(\delta_2P + [(\mathcal{V}^{-1}\delta_2\mathcal{V})_{\mathfrak{q}}, P]\right)\mathcal{V}^{-1}\Delta_1\mathcal{V}\right] - (1 \leftrightarrow 2) \\ &= \mathrm{Tr}(\Delta_2P\mathcal{V}^{-1}\Delta_1\mathcal{V}) - (1 \leftrightarrow 2) \end{aligned} \quad (2.73)$$

donde en la última igualdad usamos el resultado anterior.  $\square$

---

<sup>3</sup>Recordar que  $\mathfrak{q}$  es el subespacio asociado al subgrupo compacto maximal, y que en el caso particular de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  es unidimensional, y por tanto es conmutativo. En general, se cumple  $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}] \subset \mathfrak{q}$ .

- Por último, escribimos  $\Delta P$  en términos de la derivada covariante  $D$ :

$$\Delta P = D(\mathcal{V}^{-1}\Delta\mathcal{V}) \quad (2.74)$$

donde  $D$  es la derivada covariante  $\partial + ad_Q$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \Delta P &= (-\mathcal{V}^{-1}\Delta\mathcal{V}J + \mathcal{V}^{-1}\Delta\partial\mathcal{V})_{\mathfrak{k}} \\ &= (\partial(\mathcal{V}^{-1}\Delta\mathcal{V}) + [J, \mathcal{V}^{-1}\Delta\mathcal{V}])_{\mathfrak{k}} \\ &= \partial(\mathcal{V}^{-1}\Delta\mathcal{V}) + [Q, \mathcal{V}^{-1}\Delta\mathcal{V}] \\ &= D(\mathcal{V}^{-1}\Delta\mathcal{V}) \end{aligned} \quad (2.75)$$

□

**Observación 2.7.** Expresiones de la forma  $\text{Tr}[P\mathcal{V}^{-1}\delta\mathcal{V}]$  son iguales a  $\text{Tr}[P\mathcal{V}^{-1}\Delta\mathcal{V}]$ , debido a que  $P \in \mathfrak{k}$  y que la descomposición en  $\mathfrak{g}$  es ortogonal.

Estos cálculos nos permiten escribir la 2-forma simpléctica en términos de  $\rho_0$ ,  $\hat{\sigma}_0$ ,  $\mathcal{V}$  y sus variaciones covariantes

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa}\omega_{\mathcal{N}}[\delta_1, \delta_2] &= \left[ 2\delta_2\rho_0\delta_1\hat{\sigma}_0 - 2\rho_0\delta_2\rho_0\text{Tr}[-P_-\mathcal{V}^{-1}\Delta_1^y\mathcal{V} + P_+\mathcal{V}^{-1}\Delta_1^x\mathcal{V}]_{S_0} \right. \\ &\quad + \int_{\mathcal{N}_L} \rho\text{Tr}[\mathcal{V}^{-1}\Delta_1^y\mathcal{V}D(\mathcal{V}^{-1}\Delta_2^y\mathcal{V})] \\ &\quad \left. + \int_{\mathcal{N}_R} \rho\text{Tr}[\mathcal{V}^{-1}\Delta_1^x\mathcal{V}D(\mathcal{V}^{-1}\Delta_2^x\mathcal{V})] \right] - (1 \leftrightarrow 2) \end{aligned} \quad (2.76)$$

De esta manera, observamos que las variaciones correspondientes a rotaciones puramente en  $Q$  son gauge: no contribuyen a la forma simpléctica.

El siguiente paso en la simplificación de los cálculos del capítulo siguiente es que la expresión 2.76 contenga una sola integral por rama, pues de esta manera resultará evidente la solución para los corchetes entre los  $\mathcal{V}$ . En este paso debemos elegir a qué variación le calculamos la derivada covariante en los integrandos. Resulta que nos será útil tener las distintas expresiones para la forma simpléctica que se construyen tomando tanto la variación 1 o la variación 2 dentro de la derivada covariante. Este proceso de integrar por partes de distintas maneras nos será de extrema ayuda en el capítulo siguiente.

Un cálculo sencillo nos permite simplificar las integrales en la forma simpléctica. La igualdad

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{N}_L} \text{Tr}[\sqrt{\rho}\mathcal{V}^{-1}\Delta_1^y\mathcal{V}D(\sqrt{\rho}\mathcal{V}^{-1}\Delta_2^y\mathcal{V})] &= \int_{\mathcal{N}_L} \rho\text{Tr}[\mathcal{V}^{-1}\Delta_1^y\mathcal{V}D(\mathcal{V}^{-1}\Delta_2^y\mathcal{V})] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{N}_L} \text{Tr}[\mathcal{V}^{-1}\Delta_1^y\mathcal{V}\mathcal{V}^{-1}\Delta_2^y\mathcal{V}] d\alpha \end{aligned} \quad (2.77)$$

junto con

$$\int_{\mathcal{N}_L} \text{Tr} [\sqrt{\rho} \mathcal{V}^{-1} \Delta_1^y \mathcal{V} D(\sqrt{\rho} \mathcal{V}^{-1} \Delta_2^y \mathcal{V})] = - \int_{\mathcal{N}_L} \text{Tr} [D(\sqrt{\rho} \mathcal{V}^{-1} \Delta_1^y \mathcal{V}) \sqrt{\rho} \mathcal{V}^{-1} \Delta_2^y \mathcal{V}] - \rho_0 \text{Tr} [\mathcal{V}^{-1} \Delta_1^y \mathcal{V} \mathcal{V}^{-1} \Delta_2^y \mathcal{V}]_{S_0} + \quad (2.78)$$

$$+ \rho_L \text{Tr} [\mathcal{V}^{-1} \Delta_1^y \mathcal{V} \mathcal{V}^{-1} \Delta_2^y \mathcal{V}]_{S_L} \quad (2.79)$$

nos permite reescribir las integrales en la forma simpléctica como

$$\int_{\mathcal{N}_L} \rho \text{Tr} [\mathcal{V}^{-1} \Delta_1^y \mathcal{V} D(\mathcal{V}^{-1} \Delta_2^y \mathcal{V})] - (1 \leftrightarrow 2) = 2 \int_{\mathcal{N}_L} \text{Tr} [\sqrt{\rho} \mathcal{V}^{-1} \Delta_1^y \mathcal{V} D(\sqrt{\rho} \mathcal{V}^{-1} \Delta_2^y \mathcal{V})] + \rho_0 \text{Tr} [\mathcal{V}^{-1} \Delta_1^y \mathcal{V} \mathcal{V}^{-1} \Delta_2^y \mathcal{V}]_{S_0} \quad (2.80)$$

donde usamos que  $\text{Tr} [\mathcal{V}^{-1} \Delta_1^y \mathcal{V} \mathcal{V}^{-1} \Delta_2^y \mathcal{V}]_{S_L} = 0$ , por ser variaciones admisibles.

Para mayor claridad en la exposición, sean  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$  los siguientes campos:

$$\Psi_1 = \sqrt{\rho} \mathcal{V}^{-1} \Delta_1 \mathcal{V} \quad (2.81)$$

$$\Psi_2 = \sqrt{\rho} \mathcal{V}^{-1} \Delta_2 \mathcal{V} \quad (2.82)$$

En términos de estos campos, la forma simpléctica resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \omega_{\mathcal{N}} [\delta_1, \delta_2] &= 2\delta_2 \rho_0 \delta_1 \hat{\sigma}_0 - 2\sqrt{\rho_0} \delta_2 \rho_0 \text{Tr} [-P_- \Psi_1^y + P_+ \Psi_1^x]_{S_0} - (1 \leftrightarrow 2) \\ &+ \text{Tr} [\Psi_1^y \Psi_2^y + \Psi_1^x \Psi_2^x]_{S_0} \\ &+ \int_{\mathcal{N}_L} 2\text{Tr}(\Psi_1^y D(\Psi_2^y)) + \int_{\mathcal{N}_R} 2\text{Tr}(\Psi_1^x D(\Psi_2^x)) \end{aligned} \quad (2.83)$$

Las distintas expresiones de la forma simpléctica que usaremos toman la siguiente forma, integrando por partes los últimos dos sumandos de 2.83

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \omega_{\mathcal{N}} [\delta_1, \delta_2] &= 2\delta_2 \rho_0 \delta_1 \hat{\sigma}_0 - 2\sqrt{\rho_0} \delta_2 \rho_0 \text{Tr} [-P_- \Psi_1^y + P_+ \Psi_1^x]_{S_0} - (1 \leftrightarrow 2) \\ &+ \text{Tr} [-\Psi_1^y \Psi_2^y + \Psi_1^x \Psi_2^x]_{S_0} \\ &- \int_{\mathcal{N}_L} 2\text{Tr}(\Psi_2^y D(\Psi_1^y)) + \int_{\mathcal{N}_R} 2\text{Tr}(\Psi_1^x D(\Psi_2^x)) \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \omega_{\mathcal{N}} [\delta_1, \delta_2] &= 2\delta_2 \rho_0 \delta_1 \hat{\sigma}_0 - 2\sqrt{\rho_0} \delta_2 \rho_0 \text{Tr} [-P_- \Psi_1^y + P_+ \Psi_1^x]_{S_0} - (1 \leftrightarrow 2) \\ &+ \text{Tr} [\Psi_1^y \Psi_2^y - \Psi_1^x \Psi_2^x]_{S_0} \\ &+ \int_{\mathcal{N}_L} 2\text{Tr}(\Psi_1^y D(\Psi_2^y)) - \int_{\mathcal{N}_R} 2\text{Tr}(\Psi_2^x D(\Psi_1^x)) \end{aligned} \quad (2.85)$$

Ahora ya tenemos todas las herramientas para proceder al cálculo de la estructura de Poisson de los datos iniciales, que dejamos para el capítulo siguiente. A continuación, compararemos el potencial simpléctico y la forma simpléctica obtenidos anteriormente con [36].

## 2.7. Métrica conforme y coeficientes de Beltrami

Comenzaremos definiendo la métrica unimodular tal como está definida en [36], siguiendo con nuestras variables.

Como antes, los índices  $i, j, k, l, \dots$  indicarán los índices internos de la zweibein, mientras que los índices espaciotemporales serán  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ . En esta sección queremos evitar confusiones de notación, por lo que no utilizaremos la convención de  $\mu, \nu, \dots$  para los índices espaciotemporales debido a que definiremos los coeficientes de Beltrami como  $\mu, \bar{\mu}$ .

**Definición 2.7.** La métrica unimodular en términos de  $\mathcal{V}$  es

$$e_{\alpha\beta} = \mathcal{V}_\alpha^i \delta_{ij} \mathcal{V}_\beta^j \quad (2.86)$$

**Definición 2.8.** El coeficiente de Beltrami  $\mu(p) \in \mathbb{C}, \forall p \in \mathcal{N}$ , se define como aquel campo complejo tal que

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{1 - \mu\bar{\mu}} \begin{pmatrix} (1 + \mu)(1 + \bar{\mu}) & -i(\mu - \bar{\mu}) \\ -i(\mu - \bar{\mu}) & (1 - \mu)(1 - \bar{\mu}) \end{pmatrix} \quad (2.87)$$

A partir de la definición, podemos calcular explícitamente los símbolos a partir de la métrica:

$$\mu = \left( \frac{e_{11} - e_{22}}{2} + ie_{12} \right) / \left( \frac{2 + e_{11} + e_{22}}{2} \right) \quad (2.88)$$

**Observación 2.8.** En el gauge simétrico para la zweibein  $\mathcal{V}$ , tenemos la siguiente expresión en términos de  $\mu$ :

$$\mathcal{V}_\alpha^i = \frac{1}{\sqrt{1 - \mu\bar{\mu}}} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\mu + \bar{\mu}}{2} & -i\frac{\mu - \bar{\mu}}{2} \\ -i\frac{\mu - \bar{\mu}}{2} & 1 - \frac{\mu + \bar{\mu}}{2} \end{pmatrix}_\alpha^i \quad (2.89)$$

En  $SL(2, \mathbb{R})$ , la expresión de  $\mathcal{V}_\alpha^i$  está escrita en términos de los campos  $\rho, \Delta, B$  como vimos en el capítulo 1. Sin embargo, realizando una conjugación de  $SL(2, \mathbb{R})$  como subgrupo de  $SL(2, \mathbb{C})$ , obtendremos una base compleja donde el zweibein unimodular es dado por una expresión más sencilla en términos de  $\mu$  y  $\bar{\mu}$ .

La 2-forma simpléctica contiene a  $\mathcal{V}$  siempre dentro de  $\text{Tr}$ , lo que implica que las transformaciones de conjugación globales dentro de  $SL(2, \mathbb{C})$  serán puramente gauge. Por tanto, podemos actuar en  $\mathcal{V}_\alpha^i$  por conjugación mediante la matriz

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

que corresponde al jacobiano del cambio de coordenadas  $z^1 = \frac{x^2 + ix^3}{\sqrt{2}}, z^2 = \frac{x^2 - ix^3}{\sqrt{2}}$  (siendo  $x^2$  y  $x^3$  las coordenadas sobre los cilindros que genera la acción de los campos de Killing), y así obtener una matriz  $v$  más simple en términos de los coeficientes de Beltrami:

**Definición 2.9.** La matriz  $v$  está dada por

$$v_\alpha^i = (u^{-1})_\alpha^\beta \mathcal{V}_\beta^j u_j^i \quad (2.91)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\mu\bar{\mu}}} \begin{pmatrix} 1 & \bar{\mu} \\ \mu & 1 \end{pmatrix}_\alpha^i \quad (2.92)$$

La métrica construida con la matriz  $v$  resulta:

$$e_{\alpha\beta} = \frac{2}{1-\mu\bar{\mu}} \begin{pmatrix} \bar{\mu} & \frac{1+\mu\bar{\mu}}{2} \\ \frac{1+\mu\bar{\mu}}{2} & \mu \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

**Observación 2.9.** La 2-forma simpléctica en términos de  $v$  o de  $\mathcal{V}$  tiene la misma expresión, debido a la contracción completa de los índices internos en las expresiones. Recordar que la diferencia entre  $v$  y  $\mathcal{V}$  es una rotación global de  $SL(2, \mathbb{R})$  dentro de  $SL(2, \mathbb{C})$ . Esta rotación corresponde a una elección de base para la zweibein en las órbitas de los campos de Killing, y la forma simpléctica es independiente de la base elegida. Al ser dos expresiones con el mismo contenido físico, en lo que sigue notaremos  $\mathcal{V}$  en lugar de  $v$ .

Veamos ahora la forma simpléctica en términos de  $e_{\alpha\beta}$ . Para eso, tenemos la siguiente

**Proposición 2.1.**

$$\text{Tr}(\Delta_2 P_\alpha \mathcal{V}^{-1} \Delta_1 \mathcal{V}) - (1 \leftrightarrow 2) = \frac{1}{4} \partial_\alpha \delta_1 e_{ab} \delta_2 e^{ab} - (1 \leftrightarrow 2) \quad (2.94)$$

*Demostración.* Para una derivación  $\mathfrak{D}$  cualquiera:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(e_{ab}) &= \mathfrak{D}(\mathcal{V}_a^i \delta_{ij} \mathcal{V}^{Tj}_b) \\ &= \delta_a^c \mathfrak{D} \mathcal{V}_c^i \delta_{ij} \mathcal{V}^{Tj}_b + \mathcal{V}_a^i \delta_{ij} \mathfrak{D} \mathcal{V}^{Tj}_c \delta_b^c \\ &= (\mathcal{V}_a^l \mathcal{V}^{-1l c}) \mathfrak{D} \mathcal{V}_c^i \delta_{ij} \mathcal{V}^{Tj}_b + \mathcal{V}_a^i \delta_{ik} \mathfrak{D} \mathcal{V}^{Tk}_c (\mathcal{V}^{T-1c}_j \mathcal{V}^{Tj}_b) \\ &= \mathcal{V}_a^l (\mathcal{V}^{-1l c} \mathfrak{D} \mathcal{V}_c^i \delta_{ij} + \delta_{lk} \mathfrak{D} \mathcal{V}^{Tk}_c \mathcal{V}^{T-1c}_j) \mathcal{V}^{Tj}_b \\ &= \mathcal{V}_a^l \left( \mathcal{V}^{-1l c} \mathfrak{D} \mathcal{V}_c^i \delta_{ij} + (\mathcal{V}^{-1j c} \mathfrak{D} \mathcal{V}_c^i \delta_{il})^T \right) \mathcal{V}^{Tj}_b \\ &= 2\mathcal{V}_a^l ([\mathcal{V}^{-1 \cdot c} \mathfrak{D} \mathcal{V}_c^i \delta_{i \cdot}]_{\mathfrak{k}})_{lj} \mathcal{V}^{Tj}_b \\ &\implies ([\mathcal{V}^{-1 \cdot c} \mathfrak{D} \mathcal{V}_c^i \delta_{i \cdot}]_{\mathfrak{k}})_{lj} = \frac{1}{2} \mathcal{V}^{-1l a} \mathfrak{D} e_{ab} \mathcal{V}^{T-1b}_j \end{aligned} \quad (2.95)$$

Ahora calculamos el integrando:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(P_\alpha \mathcal{V}^{-1} \Delta \mathcal{V}) &= \text{Tr}(P_\alpha [\mathcal{V}^{-1} \delta \mathcal{V}]_{\mathfrak{k}}) = \delta^{il} \frac{1}{2} \mathcal{V}^{-1l a} \partial_\alpha e_{ab} \mathcal{V}^{T-1b}_j \delta^{jk} \frac{1}{2} \mathcal{V}^{-1k c} \delta e_{cd} \mathcal{V}^{T-1d}_i \\ &= \frac{1}{4} \partial_\alpha e_{ab} e^{bc} \delta e_{cd} e^{da} \\ &= -\frac{1}{4} \partial_\alpha e_{ab} \delta e^{ba} \end{aligned} \quad (2.96)$$

Realizando una segunda variación se obtiene el resultado.  $\square$

La notación utilizada en [36] para el exponente conforme es  $\lambda = -2\hat{\sigma}_0$ . Entonces, la forma simpléctica 2.76 coincide con la expuesta en [36], tomando  $\frac{1}{\kappa} = 8\pi G'$ , donde  $G'$  es la constante de Newton reescalada debido a la reducción dimensional que llevamos a cabo en el capítulo anterior.

Ahora vamos a ver algunas propiedades de la transformación entre los coeficientes de Beltrami y  $\mathcal{V}$ .

El álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  está generada por las matrices de Pauli  $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  y  $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

**Observación 2.10.** 1.  $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$  es una base de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial, donde  $\sigma_z$  genera la subálgebra de Cartan, y  $\sigma_x, \sigma_y$  son los generadores de Chevalley (ver Apéndice B).

2.  $\{\sigma_x, i\sigma_y, \sigma_z\}$  es una base de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, con  $i\sigma_y$  generando  $\mathfrak{q}$ , y las matrices  $\sigma_x$  y  $\sigma_z$  generando  $\mathfrak{k}$ .

3. La transformación que hicimos mediante la matriz  $u$  al grupo  $SL(2, \mathbb{R})$  mapea este a  $u^{-1}SL(2, \mathbb{R})u \subset SL(2, \mathbb{C})$ , y actúa en el álgebra de Lie de la siguiente manera:

$$\sigma_z \rightarrow u^{-1}\sigma_z u = \sigma_x \quad (2.97)$$

$$\sigma_x \rightarrow u^{-1}\sigma_x u = \sigma_y \quad (2.98)$$

$$i\sigma_y \rightarrow u^{-1}i\sigma_y u = i\sigma_z \quad (2.99)$$

4. Para simplificar la escritura, notaremos  $\sigma_{\pm} := \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$ .

El siguiente lema será muy útil cuando comparemos los corchetes que obtendremos con los de [37].

**Lemma 2.2.** *Sea  $\mathcal{D}$  una derivación arbitraria. Entonces*

$$\mathcal{V}^{-1}\mathcal{D}\mathcal{V} = \frac{1}{1 - \mu\bar{\mu}} \left( \left( \sigma_- - \frac{\bar{\mu}}{2}\sigma_z \right) \mathcal{D}\mu + \left( \sigma_+ + \frac{\mu}{2}\sigma_z \right) \mathcal{D}\bar{\mu} \right) \quad (2.100)$$

*Demostración.* A partir de la ecuación 2.92, calculamos

$$\mathcal{D}\mathcal{V} = \frac{\bar{\mu}\mathcal{D}\mu + \mu\mathcal{D}\bar{\mu}}{2(1 - \mu\bar{\mu})^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 & \bar{\mu} \\ \mu & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{(1 - \mu\bar{\mu})^{1/2}} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}\bar{\mu} \\ \mathcal{D}\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (2.101)$$

Entonces

$$\mathcal{V}^{-1}\mathcal{D}\mathcal{V} = \frac{1}{1 - \mu\bar{\mu}} \begin{pmatrix} \frac{\mu\mathcal{D}\bar{\mu} - \bar{\mu}\mathcal{D}\mu}{2} & \mathcal{D}\bar{\mu} \\ \mathcal{D}\mu & \frac{-\mu\mathcal{D}\bar{\mu} + \bar{\mu}\mathcal{D}\mu}{2} \end{pmatrix} \quad (2.102)$$

de donde se deduce el resultado.  $\square$

A partir del resultado anterior podemos expresar  $Q_\alpha$  y  $P_\alpha$  en términos de las matrices de Pauli, ahora en la estructura rotada de  $SL(2, \mathbb{R})$  (cf. 1.58 y 1.59)

$$P_\alpha = \frac{\partial_\alpha \mu \sigma_- + \partial_\alpha \bar{\mu} \sigma_+}{1 - \mu \bar{\mu}} \quad (2.103)$$

$$Q_\alpha = \frac{1}{2} \frac{\mu \partial_\alpha \bar{\mu} - \bar{\mu} \partial_\alpha \mu}{1 - \mu \bar{\mu}} \sigma_z \quad (2.104)$$

A continuación, escribiremos los integrandos que aparecen en la forma simpléctica 2.76, en términos de los coeficientes de Beltrami.

**Proposición 2.3.** *Para variaciones arbitrarias  $\delta, \delta_1, \delta_2$ , se cumplen las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathcal{V}^{-1} \Delta_1 \mathcal{V} D_a (\mathcal{V}^{-1} \Delta_2 \mathcal{V})) - (1 \leftrightarrow 2) &= \frac{\Delta_1 \bar{\mu} \partial_a \Delta_2 \mu + \Delta_1 \mu \partial_a \Delta_2 \bar{\mu}}{(1 - \mu \bar{\mu})^2} + \\ &+ 2 \frac{\mu \partial_a \bar{\mu} - \bar{\mu} \partial_a \mu}{(1 - \mu \bar{\mu})^3} \Delta_1 \mu \Delta_2 \bar{\mu} - \\ &-(1 \leftrightarrow 2) \end{aligned} \quad (2.105)$$

$$\text{Tr}(P_a \mathcal{V}^{-1} \Delta \mathcal{V}) = \frac{\partial_a \mu \Delta \bar{\mu} + \partial_a \bar{\mu} \Delta \mu}{(1 - \mu \bar{\mu})^2} \quad (2.106)$$

*Demostración.* Se deduce del lema 2.2. □

**Definición 2.10.** Sean

$$\alpha(x^+) := \int_{x_0^+}^{x^+} \frac{\bar{\mu} \partial_+ \mu - \mu \partial_+ \bar{\mu}}{1 - \mu \bar{\mu}} dx^+ \quad (2.107)$$

$$\beta(y^-) := \int_{y^-}^{y_0^-} \frac{\bar{\mu} \partial_- \mu - \mu \partial_- \bar{\mu}}{1 - \mu \bar{\mu}} dy^- \quad (2.108)$$

Concentremos la atención sobre la rama derecha. El tratamiento de la rama izquierda será análogo.

La siguiente ecuación, nos muestra que la expresión de la 2-forma simpléctica en términos de los coeficientes de Beltrami resulta más sencilla de lo que a primera vista parece:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathcal{V}^{-1} \Delta_1 \mathcal{V} D_+ (\mathcal{V}^{-1} \Delta_2 \mathcal{V})) - (1 \leftrightarrow 2) &= \frac{e^\alpha \delta_1 \mu}{1 - \mu \bar{\mu}} \partial_+ \left( \frac{e^{-\alpha} \delta_2 \bar{\mu}}{1 - \mu \bar{\mu}} \right) + \\ &+ \frac{e^{-\alpha} \delta_1 \bar{\mu}}{1 - \mu \bar{\mu}} \partial_+ \left( \frac{e^\alpha \delta_2 \mu}{1 - \mu \bar{\mu}} \right) - (1 \leftrightarrow 2) \end{aligned} \quad (2.109)$$

Todavía podemos compactar aún más la escritura de las integrales en la 2-forma simpléctica. Para eso, definimos los siguientes campos:

**Definición 2.11.**

$$\Upsilon := \frac{\sqrt{\rho}e^\alpha}{1 - \mu\bar{\mu}}\delta\mu \quad (2.110)$$

$$\tilde{\Upsilon} := \frac{\sqrt{\rho}e^{-\alpha}}{1 - \mu\bar{\mu}}\delta\bar{\mu} \quad (2.111)$$

$$(2.112)$$

De esta manera, la integral sobre la rama derecha en 2.76 se escribe como

$$\int_{\mathcal{N}_R} \left( \Upsilon_1^x \partial_+ \tilde{\Upsilon}_2^x + \tilde{\Upsilon}_1^x \partial_+ \Upsilon_2^x \right) dx^+ - (1 \leftrightarrow 2) \quad (2.113)$$

Finalmente, a modo de completar la comparación, podemos dar la relación entre los  $\Upsilon$  y los  $\Psi = \sqrt{\rho}\mathcal{V}^{-1}\Delta\mathcal{V}$ :

$$\mathcal{P}e^{\int_0^p Q} \Psi \mathcal{P}e^{\int_p^0 Q} = \begin{pmatrix} 0 & \Upsilon \\ \tilde{\Upsilon} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.114)$$

y es una simple manipulación algebraica verificar que la integración por partes 2.80 es equivalente a la integración por partes de 2.113.

# Corchetes de Poisson para los datos iniciales

## 3.1. Objetivos

En este capítulo presentaremos la estructura básica que usaremos en el resto del trabajo: los corchetes de Poisson entre los datos iniciales sobre la doble hoja nula  $\mathcal{N}$ .

En el contexto de simetría cilíndrica, en [18] está hecho el cálculo de los corchetes entre las matrices  $\mathcal{V}$ . En el contexto de relatividad general sin simetrías, en [37] se presenta la estructura de Poisson de todos los datos iniciales. Parte de nuestro trabajo consiste en ampliar los resultados de [18].

En este capítulo extendemos la familia de corchetes de Poisson a los datos iniciales  $\rho_0$  y  $\hat{\sigma}_0$ , en el contexto del modelo de simetría cilíndrica que hemos estudiado en los dos capítulos previos. Los corchetes entre  $\rho_0$  y  $\mathcal{V}$  resultan ser nulos; sin embargo, los corchetes entre  $\hat{\sigma}_0$  y  $\mathcal{V}$  son no triviales.

Compararemos los corchetes obtenidos con los de [37], mostrando que coinciden si tomamos una carta particular sobre  $\mathcal{N}$ . De esta manera, extendemos la familia de corchetes de Poisson a todos los datos iniciales del modelo de relatividad general con simetría cilíndrica.

## 3.2. Corchetes de Poisson: ¿por qué?

El objetivo de calcular corchetes de Poisson entre datos iniciales es el cálculo del corchete de Poisson entre observables, que contienen el contenido físico relevante de la teoría. Supongamos que parametrizamos los datos iniciales (sobre una superficie  $\mathcal{N}$ ) como  $\phi^\alpha$ , entonces dos observables  $f$  y  $g$  tienen el siguiente corchete de Poisson

$$\{f(x), g(y)\} = \int_{\mathcal{N}} dx \int_{\mathcal{N}} dy \frac{\delta f}{\delta \phi^\alpha}(x) \frac{\delta g}{\delta \phi^\beta}(y) \{\phi^\alpha(x), \phi^\beta(y)\} \quad (3.1)$$

donde  $\{\phi^\alpha(x), \phi^\beta(y)\}$  son los corchetes de Poisson entre los datos iniciales  $\phi^\alpha(x)$ .

Formalmente, si consideramos las funcionales de evaluación en un punto  $x \in M$ ,  $ev_x : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ , del espacio de fase a los reales, que mapea  $\phi \mapsto \phi(x)$ , entonces el corchete entre las evaluaciones se escribe, por abuso de notación, como:

$$(\{ev_x, ev_y\}(\phi^\alpha, \phi^\beta))(x, y) = \{\phi^\alpha(x), \phi^\beta(y)\} \quad (3.2)$$

Dos parámetros  $\phi(x), \psi(x)$  del espacio de fase se dicen que son conjugados canónicos si

$$\{\phi(x), \psi(y)\} = cte \times \delta(x - y) \quad (3.3)$$

Vemos en esta ecuación que los corchetes de Poisson son bidistribuciones en el sentido formal: pertenecen al espacio dual de los observables sobre el espacio de fase. Por esto diremos que son bidistribuciones: tienen sentido siempre y cuando se los evalúe contra funciones de prueba como operadores bilineales.

### 3.3. Estrategia de cálculo

Como se explica en [37], y en forma más detallada en [38], el cálculo de los corchetes entre los datos iniciales se realiza a partir de la relación

$$\delta\phi = \omega[\{\cdot, \phi\}, \delta] \quad (3.4)$$

donde  $\delta$  es una variación que cumple determinadas propiedades y  $\phi$  una funcional del espacio de fase. A pesar de tener ciertos vectores de gauge, como vimos en el capítulo anterior, es posible invertir la forma simpléctica  $\omega$  gracias a lo siguiente:

- usamos variaciones que fijan cartas sobre la variedad. Esto permite fijar los difeomorfismos gauge.
- Proyectando las variaciones logarítmicas en el espacio  $\mathfrak{k}$  eliminamos el gauge en el grupo  $Q$ . De esta manera la libertad de elegir una base para la zweibein se elimina.
- Que las variaciones cumplan la siguiente propiedad:

$$\text{Tr}[S_- \mathcal{V}^{-1} \Delta \mathcal{V}] = 0 \quad (3.5)$$

siendo  $S_\pm := \frac{1}{2}(\sigma_z \pm i\sigma_x)$ . Esta condición es puramente técnica, y se usa en el cálculo de los corchetes.

Esta es nuestra nueva definición de *variaciones admisibles*.

Observamos que la tercer condición sobre las variaciones admisibles nos dice que, para dos variaciones  $\delta_1$  y  $\delta_2$ :

$$\text{Tr}[\mathcal{V}^{-1} \Delta_1 \mathcal{V} \mathcal{V}^{-1} \Delta_2 \mathcal{V}] = \text{Tr}\left[\mathcal{V}^{-1} \Delta_1 \overset{1}{\mathcal{V}} \overset{112}{\Omega} \overset{2}{\mathcal{V}^{-1}} \Delta_2 \overset{2}{\mathcal{V}}\right] \quad (3.6)$$

$$= \text{Tr}\left[\mathcal{V}^{-1} \Delta_1 \overset{1}{\mathcal{V}} (\overset{1}{S_+} \overset{2}{S_-} + \overset{1}{S_-} \overset{2}{S_+}) \overset{2}{\mathcal{V}^{-1}} \Delta_2 \overset{2}{\mathcal{V}}\right] = 0 \quad (3.7)$$

que será importante en el cálculo de los corchetes entre  $\hat{\sigma}_0$  y  $\mathcal{V}$ . Observar que sigue valiendo la ecuación 2.80.

Tomando convenientemente la funcional  $\phi$ , podemos calcular los distintos corchetes de Poisson. El orden en que los iremos calculando es el siguiente:

1.  $\{\rho_0, \hat{\sigma}_0\}$
2.  $\{\rho_0, \mathcal{V}(q)\}$ , con  $q \in \mathcal{N}$
3.  $\{\mathcal{V}(p), \mathcal{V}(q)\}$ , con  $p, q \in \mathcal{N}$ . Compararemos el resultado con los corchetes entre  $\mu, \bar{\mu}$  obtenidos en [37]:
  - a)  $\{\mu(p), \mu(q)\}$
  - b)  $\{\mu(p), \bar{\mu}(q)\}$
  - c)  $\{\bar{\mu}(p), \bar{\mu}(q)\}$
4.  $\{\hat{\sigma}_0, \mathcal{V}(p)\}$ , para  $p \in \mathcal{N} \setminus S_0$
5.  $\{\hat{\sigma}_0, \mathcal{V}_0\}$ , donde  $\mathcal{V}_0 := \mathcal{V}(S_0)$ .
6. Por último, compararemos los dos corchetes anteriores con los resultados en [37]:
  - a)  $\{\hat{\sigma}_0, \mu(p)\}$ , en  $p \in \mathcal{N} \setminus S_0$  y en  $S_0$ .
  - b)  $\{\hat{\sigma}_0, \bar{\mu}(p)\}$  en  $p \in \mathcal{N} \setminus S_0$  y en  $S_0$ .

Los dos primeros son los más sencillos de obtener y por esa razón están primeros. Los corchetes entre las  $\mathcal{V}$  son más complicados, y forman parte del trabajo de [18]. Por último, los corchetes entre  $\hat{\sigma}_0$  y  $\mathcal{V}$  son discontinuos en  $S_0$ , lo que introduce detalles técnicos que se solucionan haciendo uso de las diferentes expresiones que calculamos para la forma simpléctica en la proposición 2.83.

### 3.4. $\{\rho_0, \hat{\sigma}_0\}$

Para calcular  $\{\rho_0, \hat{\sigma}_0\}$ , en la ecuación 3.4, para la expresión de la forma simpléctica 2.76, tomamos una variación admisible  $\delta$  tal que  $\delta\rho_0 = \delta\mathcal{V} = \Delta^x\mathcal{V} = \Delta^y\mathcal{V} = 0$ , y como funcional  $\phi$  al valor de  $\hat{\sigma}_0$ . Es decir, si  $\mathcal{S}$  es el espacio de fase,  $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  es el mapa  $(\rho_0, \hat{\sigma}_0, \mathcal{V}) \mapsto \hat{\sigma}_0$ . Sea  $X(p)$  el siguiente campo sobre  $\mathcal{N}$

$$X(p) := \mathcal{V}^{-1}(p) \{\mathcal{V}(p), \hat{\sigma}_0\} \quad (3.8)$$

campo que definimos para hacer más fácil la lectura de las deducciones de los corchetes.

En detalle, a partir de la expresión 2.76 para la forma simpléctica, la ecuación 3.4 resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\kappa} \delta \hat{\sigma}_0 &= \frac{1}{\kappa} \omega_{\mathcal{N}} [\{\cdot, \hat{\sigma}_0\}, \delta] \\
&= 2\delta \rho_0 \{\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_0\} - 2\rho_0 \delta \rho_0 \text{Tr} [-P_- X^y + P_+ X^x]_{S_0} \\
&\quad - \int_{\mathcal{N}_L} \rho \text{Tr} [D(\mathcal{V}^{-1} \Delta^y \mathcal{V}) [X^y]_{\mathfrak{k}}] \\
&\quad + \int_{\mathcal{N}_R} \rho \text{Tr} [D(\mathcal{V}^{-1} \Delta^x \mathcal{V}) [X^x]_{\mathfrak{k}}] \\
&\quad - 2 \{\rho_0, \hat{\sigma}_0\} \delta \hat{\sigma}_0 + 2\rho_0 \{\rho_0, \hat{\sigma}_0\} \text{Tr} [-P_- \mathcal{V}^{-1} \Delta^y \mathcal{V} + P_+ \mathcal{V}^{-1} \Delta^x \mathcal{V}]_{S_0} \\
&\quad + \int_{\mathcal{N}_L} \rho \text{Tr} [D(X_{\mathfrak{k}}^y) \mathcal{V}^{-1} \Delta^y \mathcal{V}] \\
&\quad - \int_{\mathcal{N}_R} \rho \text{Tr} [D(X_{\mathfrak{k}}^x) \mathcal{V}^{-1} \Delta^x \mathcal{V}] \tag{3.9}
\end{aligned}$$

donde  $\{\psi, \phi\}^x$ , es la componente de la variación sobre  $\psi$ , generada por  $\phi$  via el corchete de Poisson, que deja la carta  $x$  fija. Análogamente se define  $\{\psi, \phi\}^y$

Por las condiciones que les pedimos a  $\delta$ , todos los términos se anulan excepto los correspondientes a  $\delta \hat{\sigma}_0$ :

$$\frac{1}{\kappa} = -2 \{\rho_0, \hat{\sigma}_0\} \tag{3.10}$$

de donde obtenemos (sin ningún trabajo extra) el corchete entre los datos iniciales  $\rho_0$  y  $\hat{\sigma}_0$ :

$$\boxed{\{\hat{\sigma}_0, \rho_0\} = \frac{1}{2\kappa} = 4\pi G'} \tag{3.11}$$

Este resultado nos muestra que  $\rho_0$  y  $\hat{\sigma}_0$  son conjugados canónicos.

### 3.5. $\{\rho_0, \mathcal{V}\}$

Consideramos las mismas variaciones admisibles como en la sección anterior, y tomemos como funcional a  $\phi$  al valor de  $\mathcal{V}$  en  $p \in \mathcal{N}$ , siendo  $p$  un punto arbitrario de  $\mathcal{N}$ <sup>1</sup>.

Nuevamente, todos los términos en la 2-forma simpléctica se anulan, excepto uno:

$$\delta \mathcal{V}(p) = -2\kappa \{\rho_0, \mathcal{V}(p)\} \delta \hat{\sigma}_0$$

Ahora bien,  $\delta \mathcal{V}(p) = 0$ , pues las variaciones que elegimos no varían  $\mathcal{V}$ , mientras que  $\delta \hat{\sigma}_0$  es arbitrario, i.e. no hay restricción sobre los valores que puede tomar. Por tanto,

<sup>1</sup>Notaremos a puntos de la variedad como  $p, q, \dots$ , mientras que cuando nos estamos refiriendo a las coordenadas de los puntos, por ejemplo usando las cartas  $x^\pm$  e  $y^\pm$ , notaremos  $x_1, x_2, \dots$  e  $y_1, y_2, \dots$  respectivamente

$$\boxed{\{\rho_0, \mathcal{V}(p)\} = 0 \quad \forall p \in \mathcal{N}} \quad (3.12)$$

Esto nos indica que la densidad de área en  $S_0$  y el dato  $\mathcal{V}$  conmutan Poisson.

### 3.6. Corchetes de $\mathcal{V}$

Para simplificar la notación, seguiremos la siguiente convención:

**Observación 3.1.** El producto tensorial  $S \otimes T$  de operadores lineales  $S$  actuando en el espacio vectorial  $V_1$  y  $T$  actuando en el espacio vectorial  $V_2$  se denota  $\overset{1}{S}\overset{2}{T}$ , con el índice sobre cada factor indicando en qué espacio actúa.

Para cada par de elementos de matriz  $\mathcal{V}_\alpha^i(p), \mathcal{V}_\beta^j(q)$ , podemos calcular el corchete  $\{\mathcal{V}_\alpha^i(p), \mathcal{V}_\beta^j(q)\}$ . Esto nos da una familia de funciones, indexada por  $\alpha, i, \beta$  y  $j$ . Tal familia forma una bidistribución de operadores lineales de  $SL(2, \mathbb{R}) \otimes SL(2, \mathbb{R})$ , y la notaremos

$$\left\{ \overset{1}{\mathcal{V}}(p), \overset{2}{\mathcal{V}}(q) \right\} \quad (3.13)$$

indicando que los índices  $\alpha, i$  corresponden al espacio 1, y los índices  $\beta, j$  al espacio 2. Este corchete corresponde al espacio tensorial  $T_{\mathcal{V}(p)}G \otimes T_{\mathcal{V}(q)}G$ , siendo  $G = SL(2, \mathbb{R})$

Para el corchete logarítmico, multiplicamos los elementos de cada espacio por  $\mathcal{V}^{-1}$  en los índices correspondientes:

$$\mathcal{V}^{-1}_k{}^\alpha \mathcal{V}^{-1}_l{}^\beta \left\{ \mathcal{V}_\alpha^i(p), \mathcal{V}_\beta^j(q) \right\} \quad (3.14)$$

donde ahora la bidistribución es un operador lineal de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \otimes \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ :

$$\mathcal{V}^{-1}(p)\mathcal{V}^{-1}(q) \left\{ \overset{1}{\mathcal{V}}(p), \overset{2}{\mathcal{V}}(q) \right\} \quad (3.15)$$

donde ahora los índices  $k, i$  corresponden al espacio 1 y los índices  $j, l$  al espacio 2.

En la notación que definimos anteriormente, el corchete logarítmico de los  $\mathcal{V}$  en la componente  $\mathfrak{k} \otimes \mathfrak{k}$  del producto tensorial lo notamos:

$$\left[ \mathcal{V}^{-1}(p)\mathcal{V}^{-1}(q) \left\{ \overset{1}{\mathcal{V}}(p), \overset{2}{\mathcal{V}}(q) \right\} \right]_{\mathfrak{k} \otimes \mathfrak{k}} \quad (3.16)$$

y corresponde, volviendo a la familia de funciones, a tomar los índices que indican una base que genera  $\mathfrak{k}$  como subespacio de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ .

En [19] se muestra que para  $p$  y  $q$  en la misma rama de  $\mathcal{N}$ , ambos distintos de  $S_0$ , sea izquierda o derecha, tenemos:

$$\boxed{\mathcal{V}^{-1}(p)\mathcal{V}^{-1}(q) \left\{ \overset{1}{\mathcal{V}}(p), \overset{2}{\mathcal{V}}(q) \right\} = \frac{1}{4\kappa\sqrt{\rho(p)\rho(q)}} \mathcal{P}e^{\int_p^q \frac{1}{Q}} (s(p, q)\Omega_{\mathfrak{k}} + c\varepsilon_{\mathfrak{k}}) \mathcal{P}e^{\int_q^p \frac{1}{Q}} } \quad (3.17)$$

donde  $s(p, q)$  es la función  $-sign(p - q)$  que vale 1 si  $p$  está más cerca de  $S_0$  que  $q$ ,  $-1$  en el caso en que  $q$  esté más cerca de  $S_0$  que  $p$ , y  $s_0$  en el caso en que  $q = p$ .  $\Omega_{\mathfrak{k}}$  es la componente en  $\mathfrak{k} \otimes \mathfrak{k}$  del elemento de Casimir  $\Omega = \frac{1}{2}(\sigma_x^1 \sigma_x^2 + i\sigma_y^1 i\sigma_y^2 + \sigma_z^1 \sigma_z^2)$ , y  $\varepsilon_{\mathfrak{k}}$  es la 2-forma de volumen en  $\mathfrak{k}$ .

Para  $p$  y  $q$  ambos siendo  $S_0$ , el corchete es

$$\boxed{\mathcal{V}^{-1}(S_0)\mathcal{V}^{-1}(S_0) \left\{ \mathcal{V}^1(S_0), \mathcal{V}^2(S_0) \right\} = \frac{1}{4\kappa\rho_0} 2c\varepsilon_{\mathfrak{k}}} \quad (3.18)$$

En el caso en que  $p \in \mathcal{N}_L \setminus S_0$  y  $q \in \mathcal{N}_R \setminus S_0$ , el corchete es nulo. Esto corresponde a la propiedad que dos puntos que no estén causalmente conectados no pueden tener dinámica no trivial entre ellos.

**Observación 3.2.** La antisimetría de los corchetes exige que  $s_0 = 0$ .

Es importante notar que hemos calculado la componente  $\mathfrak{k} \otimes \mathfrak{k}$  de los corchetes. Sólo esta parte será necesaria para el resto del trabajo, por lo que cuando mencionemos los corchetes entre los  $\mathcal{V}$  estaremos haciendo referencia a los corchetes 3.17.

A modo de facilitar la lectura, definimos

$${}^{12}A(p, q) := \mathcal{V}^{-1}(p)\mathcal{V}^{-1}(q) \left\{ \mathcal{V}^1(p), \mathcal{V}^2(q) \right\} \quad (3.19)$$

### 3.7. $\{\hat{\sigma}_0, \mathcal{V}(x)\}$

Para calcular estos corchetes, distinguimos dos casos: cuando  $x = S_0$ , y cuando  $x \in \mathcal{N} \setminus S_0$ . En ambos casos, son las componentes en  $\mathfrak{k}$  que se calculan, pues son las que toman relevancia en la segunda parte del presente trabajo.

#### 3.7.1. $x \in \mathcal{N}_R \setminus S_0$

Consideramos variaciones  $\delta$  tales que  $\delta\hat{\sigma}_0 = \mathcal{V}^{-1}(x)\Delta\mathcal{V}(x) = 0$ . Recordar que  $\delta\mathcal{V} = \delta^x\mathcal{V} + \mathcal{L}_{\xi^x}\mathcal{V} = \delta^y\mathcal{V} + \mathcal{L}_{\xi^y}\mathcal{V}$ , así que las derivadas de Lie no tienen porqué anularse. Recordamos además que  $-\mathcal{L}_{\xi^x}$  y  $-\mathcal{L}_{\xi^y}$  son las derivadas de Lie respecto a los generadores de difeomorfismos que restauran los puntos en la carta  $x^\pm$  e  $y^\pm$  respectivamente.

La ecuación 3.4 toma la siguiente forma:

$$\left[ \mathcal{V}^{-1}(x)\delta \left( \mathcal{V}^1(x) \right) \right]_{\mathfrak{k}} = \left[ \mathcal{V}^{-1}(x)\omega_{\mathcal{N}} \left[ \left\{ \cdot, \mathcal{V}^1(x) \right\}, \delta \right] \right]_{\mathfrak{k}} \quad (3.20)$$

el miembro izquierdo no es más que

$$\left[ \mathcal{V}^{-1}(x) \left( \delta^x \mathcal{V}^1 \right) (x) \right]_{\mathfrak{k}} \quad (3.21)$$

pues estamos considerando una variación  $\delta$  de  $\mathcal{V}$  sobre las coordenadas  $x^\pm$ . Recordar que  $\delta(\mathcal{V}(x))$  es la variación de  $\mathcal{V}$  en el valor dado de  $x$ , y esto último lo escribimos como  $[\delta^x \mathcal{V}](x)$ .

Ahora utilizamos la expresión de la forma simpléctica de la ecuación 2.84:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\kappa} \left[ \mathcal{V}^{-1}(x) \left( \delta^x \mathcal{V} \right) (x) \right]_{\mathfrak{k}} &= 2\delta\rho_0 \left[ \mathcal{V}^{-1}(x) \left\{ \hat{\sigma}_0, \mathcal{V}(x) \right\} \right]_{\mathfrak{k}} \\
 &\quad - 2\rho_0 \delta\rho_0 \text{Tr} \left[ -P_- \overset{\cdot 1}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, x) + P_+ \overset{\cdot 1}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, x) \right]_{S_0} \\
 &\quad + \rho_0 \text{Tr} \left[ \overset{\cdot 1}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, x) \mathcal{V}^{-1} \Delta^y \mathcal{V} - \overset{\cdot 1}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, x) \mathcal{V}^{-1} \Delta^x \mathcal{V} \right]_{S_0} \\
 &\quad + \int_{\mathcal{N}_L} 2\sqrt{\rho} \text{Tr} \left[ \overset{\cdot 1}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, x) D(\sqrt{\rho} \mathcal{V}^{-1} \Delta^y \mathcal{V}) \right] \\
 &\quad - \int_{\mathcal{N}_R} 2\sqrt{\rho} \text{Tr} \left[ \mathcal{V}^{-1} \Delta^x \mathcal{V} D(\sqrt{\rho} \overset{\cdot 1}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, x)) \right] \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

donde  $\overset{\cdot 1}{X}$  indica que tomamos la traza  $\text{Tr}$  de este operador en el espacio indicado por  $\cdot$ . Recordar que los corchetes entre los  $\mathcal{V}$  no ven la diferencia entre la componente  $\delta^x, \delta^y$  de una variación admisible  $\delta$ , pues  $\mathcal{V}$  conmuta Poisson con  $\rho_0$ .

Como vimos en la sección anterior, si dos puntos no están causalmente conectados, el corchete de los  $\mathcal{V}$  es cero. Por tanto, como  $\mathcal{N}_L \setminus S_0$  no está causalmente conectado con  $x \in \mathcal{N}_R \setminus S_0$ , el integrando en la integral sobre  $\mathcal{N}_L$  sería no nulo (y finito) solamente en  $S_0$ . Como  $\delta^y \mathcal{V}$  es suave y  $S_0$  tiene medida nula con la medida del integrando, entonces la integral sobre la rama izquierda se anula. Por otro lado, la integral en la rama derecha es:

$$- \int_{\mathcal{N}_R} 2\sqrt{\rho} \text{Tr} \left[ \mathcal{V}^{-1} \Delta^x \mathcal{V} D(\sqrt{\rho} \overset{\cdot 1}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, x)) \right] = \frac{1}{\kappa} \mathcal{V}^{-1}(x) \Delta^x \mathcal{V}(x) \quad (3.23)$$

ver la sección 5 de [19] para más detalles sobre estos cálculos.

Por último, tenemos que  $\delta^y = \delta^x + \mathcal{L}_{\xi^x} - \mathcal{L}_{\xi^y}$ . Entonces:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\kappa} \left[ \mathcal{V}^{-1}(x) \left( \delta^x \mathcal{V} \right) (x) \right]_{\mathfrak{k}} &= 2\delta\rho_0 \left[ \mathcal{V}^{-1}(x) \left\{ \hat{\sigma}_0, \mathcal{V}(x) \right\} \right]_{\mathfrak{k}} \\
 &\quad - 2\rho_0 \delta\rho_0 \text{Tr} \left[ -P_- \overset{\cdot 1}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, x) + P_+ \overset{\cdot 1}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, x) \right]_{S_0} \\
 &\quad + \rho_0 \text{Tr} \left[ \overset{\cdot 1}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, x) \mathcal{V}^{-1} \mathcal{L}_{\xi^x} \mathcal{V} - \overset{\cdot 1}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, x) \mathcal{V}^{-1} \mathcal{L}_{\xi^y} \mathcal{V} \right]_{S_0} \\
 &\quad + \frac{1}{\kappa} \mathcal{V}^{-1}(x) \Delta^x \mathcal{V}(x) \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

Además, por definición, la derivada de los difeomorfismos  $\xi$  en  $S_0$  es

$$[\mathcal{V}^{-1}(S_0)\mathcal{L}_{\xi^x}\mathcal{V}(S_0)]_{\mathfrak{k}} = \xi^{x+}P_+ = 2\delta\rho_0P_+ \quad (3.25)$$

$$[\mathcal{V}^{-1}(S_0)\mathcal{L}_{\xi^y}\mathcal{V}(S_0)]_{\mathfrak{k}} = \xi^{y-}P_- = -2\delta\rho_0P_- \quad (3.26)$$

sobre  $\mathcal{N}_R$  y  $\mathcal{N}_L$  respectivamente. Cancelando términos, la expresión resultante es

$$\begin{aligned} 0 &= 2\delta\rho_0 \left[ \mathcal{V}^{-1}(x) \left\{ \hat{\sigma}_0, \mathcal{V}(x) \right\} \right]_{\mathfrak{k}} + \\ &\quad + 4\rho_0\delta\rho_0 \text{Tr} \left[ P_- \overset{\cdot}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, x) \right]_{S_0} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Finalmente:

$$\boxed{\left[ \mathcal{V}^{-1}(x) \left\{ \hat{\sigma}_0, \mathcal{V}(x) \right\} \right]_{\mathfrak{k}} = -2\rho_0 \text{Tr} \left[ P_- \overset{\cdot}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, x) \right]_{S_0}} \quad (3.28)$$

### 3.7.2. $y \in \mathcal{N}_L \setminus S_0$

El cálculo es completamente análogo al de la subsección anterior, utilizando la proposición 2.113 para tomar las integrales con las derivadas covariantes de los otros términos del producto tensorial. Explícitamente, tomamos la expresión 2.85:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \left[ \mathcal{V}^{-1}(y) \left( \delta^y \mathcal{V} \right) (y) \right]_{\mathfrak{k}} &= 2\delta\rho_0 \left[ \mathcal{V}^{-1}(y) \left\{ \hat{\sigma}_0, \mathcal{V}(y) \right\} \right]_{\mathfrak{k}} \\ &\quad - 2\rho_0\delta\rho_0 \text{Tr} \left[ -P_- \overset{\cdot}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, y) + P_+ \overset{\cdot}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, y) \right]_{S_0} \\ &\quad - \rho_0 \text{Tr} \left[ \overset{\cdot}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, y) \mathcal{V}^{-1} \Delta^y \mathcal{V} - \overset{\cdot}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, y) \mathcal{V}^{-1} \Delta^x \mathcal{V} \right]_{S_0} \\ &\quad - \int_{\mathcal{N}_L} 2\sqrt{\rho} \text{Tr} \left[ \mathcal{V}^{-1} \Delta^y \mathcal{V} D(\sqrt{\rho} \overset{\cdot}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, y)) \right] \\ &\quad + \int_{\mathcal{N}_R} 2\sqrt{\rho} \text{Tr} \left[ \overset{\cdot}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, y) D(\sqrt{\rho} \mathcal{V}^{-1} \Delta^x \mathcal{V}) \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

El resultado final es

$$\boxed{\left[ \mathcal{V}^{-1}(y) \left\{ \hat{\sigma}_0, \mathcal{V}(y) \right\} \right]_{\mathfrak{k}} = 2\rho_0 \text{Tr} \left[ P_+ \overset{\cdot}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, y) \right]_{S_0}} \quad (3.30)$$

### 3.7.3. $\{\hat{\sigma}_0, \mathcal{V}(0)\}$

Este resultado no lo usaremos en el resto del trabajo. Sin embargo, para tener una exposición completa del álgebra de Poisson, lo mostramos.

Seguimos con las mismas variaciones que tomamos al principio, y como funcional elegimos a  $\mathcal{V}(S_0)$ , que para simplificar escribiremos  $\mathcal{V}_0$ . La expresión de la 2-forma simpléctica que elegimos es una que no tenga las derivadas covariantes de los corchetes como integrandos. La ecuación 3.4 resulta:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\kappa} \left[ \mathcal{V}_0^{-1} \left( \delta^x \mathcal{V}_0 \right) \right]_{\mathfrak{t}} &= 2\delta\rho_0 \mathcal{V}_0^{-1} \left\{ \hat{\sigma}_0, \mathcal{V}_0 \right\}_{\mathfrak{t}} \\
 &\quad - 2\rho_0 \delta\rho_0 \text{Tr} \left[ -P_- \overset{\cdot}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, S_0) + P_+ \overset{\cdot}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, S_0) \right]_{S_0} \\
 &\quad + \rho_0 \text{Tr} \left[ \overset{\cdot}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, S_0) \mathcal{V}^{-1} \Delta^y \mathcal{V} + \overset{\cdot}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, S_0) \mathcal{V}^{-1} \Delta^x \mathcal{V} \right]_{S_0} \\
 &\quad + \int_{\mathcal{N}_L} 2\sqrt{\rho} \text{Tr} \left[ \overset{\cdot}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, S_0) D(\sqrt{\rho} \mathcal{V}^{-1} \Delta^y \mathcal{V}) \right] \\
 &\quad + \int_{\mathcal{N}_R} 2\sqrt{\rho} \text{Tr} \left[ \overset{\cdot}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, S_0) D(\sqrt{\rho} \mathcal{V}^{-1} \Delta^x \mathcal{V}) \right] \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

La primera observación es que elegimos la componente  $\delta^x$  en el miembro izquierdo. El resultado será igual en caso que se elija la componente  $\delta^y$ , a menos de un término de difeomorfismos, igual a  $\mathcal{L}_{\xi^x} - \mathcal{L}_{\xi^y}$ .

La contribución de ambas integrales es trivial: en  $\mathcal{N}_L$  la única contribución no nula al integrando es en  $S_0$ , que sigue teniendo medida nula (tuvimos cuidado de no tener una derivada de la función  $s(x, y)$ ); mientras que en  $\mathcal{N}_R$  el término  $\overset{\cdot}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, S_0)$  es constante, así que el valor de la integral resulta ser  $\mathcal{V}^{-1} \Delta^x \mathcal{V}$ . Por tanto, considerando nuevamente la igualdad entre las variaciones que dejan las cartas fijas y las derivadas de Lie,  $\delta^y = \delta^x + \mathcal{L}_{\xi^x} - \mathcal{L}_{\xi^y}$ , y tras varias manipulaciones algebraicas, tenemos:

$$2\delta\rho_0 \left[ \mathcal{V}^{-1}_0 \left\{ \hat{\sigma}_0, \mathcal{V}_0 \right\} \right]_{\mathfrak{t}} = 4\rho_0 \delta\rho_0 \text{Tr} \left[ -P_- \overset{\cdot}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, S_0) + P_+ \overset{\cdot}{A}_{\mathfrak{tt}}(\cdot, S_0) \right]_{S_0} \quad (3.32)$$

De la ecuación 3.18, tenemos

$$\overset{12}{A}_{\mathfrak{tt}}(S_0, S_0) = \left[ \mathcal{V}_0^{-1} \mathcal{V}_0^{-1} \left\{ \mathcal{V}_0^1, \mathcal{V}_0^2 \right\} \right]_{\mathfrak{tt}} = \frac{1}{4\kappa\rho_0} 2c\varepsilon_{\mathfrak{t}}$$

Así que, juntando todo:

$$\boxed{\left[ \mathcal{V}_0^{-1} \left\{ \hat{\sigma}_0, \mathcal{V}_0 \right\} \right]_{\mathfrak{t}} = \frac{1}{2\kappa} \text{Tr} \left[ -(P_-^2(0) + P_+^2(0)) \left( 2c\varepsilon_{\mathfrak{tt}}^{21} \right) \right]} \quad (3.33)$$

**Observación 3.3.** Vemos que este corchete depende de las dos constantes indeterminadas hasta ahora:  $c$  y  $s_0$ .

Luego de haber calculado los corchetes entre  $\hat{\sigma}_0$  y  $\mathcal{V}$  vemos la utilidad de las ecuaciones 2.83, 2.84 y 2.85: nos permitieron evitar integrar sobre puntos de medida no nula en el borde de los intervalos,  $S_0$ , que conduce a una integración de distribuciones delta de Dirac en el borde.

### 3.8. Comparación con [37]

Para comparar con el paper [37], precisamos hacer la traducción de los datos usados a nuestros datos. Usaremos el valor  $\kappa^{-1} = 8\pi G_2$ , como ya explicamos en el capítulo anterior.

- $\rho_0$  es el mismo objeto.
- La métrica conforme y los coeficientes de Beltrami son los que introducimos en el capítulo anterior.
- Las coordenadas que se usan sobre cada rama son  $v_{L,R} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}$ , y podemos compararlas con las coordenadas  $x^\pm$  o  $y^\pm$  de manera sencilla:

$$\partial_{v_R} = \frac{\partial \rho}{\partial v_R} \partial_{x^+} = 4\rho_0 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \partial_{x^+} = 4\sqrt{\rho\rho_0} \partial_{x^+} = 2\sqrt{2x^+ \rho_0} \partial_{x^+} \quad (3.34)$$

$$\partial_{v_L} = -\frac{\partial \rho}{\partial v_R} \partial_{y^-} = -4\rho_0 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \partial_{y^-} = -4\sqrt{\rho\rho_0} \partial_{y^-} = -2\sqrt{2y^- \rho_0} \partial_{y^-} \quad (3.35)$$

- El exponente conforme en [37] se define como  $\lambda := -\ln |n_L \cdot n_R|$ . En nuestro caso las normales nulas salientes a  $S_0$  corresponden a  $\partial_{x^-}$  y  $\partial_{x^+}$ , así que

$$\lambda = -\ln |\partial_{v_R} \cdot \partial_{v_L}| \quad (3.36)$$

$$= -\ln(32\rho_0^2) |\partial_{x^-} \cdot \partial_{x^+}| \quad (3.37)$$

$$= -\ln(32\rho_0^2) | -e^{2\hat{\sigma}_0} | = -2\hat{\sigma}_0 - 2\ln \rho_0 - \ln(32) \quad (3.38)$$

tal como comentamos en el capítulo anterior al comparar la forma simpléctica.

En la forma simpléctica, observamos que tenemos dos diferencias globales de signo: en el artículo [36] se usó la ecuación

$$\delta\phi = \omega(\{\phi, \cdot\}, \delta) \quad (3.39)$$

y observar que en 3.4 tenemos como primer variación a  $\{\cdot, \phi\}$ . La otra diferencia es en la definición de  $\omega$  como derivada exterior del potencial simpléctico: en [36] se usa la otra convención de signo  $\omega \mapsto -\omega$

Comencemos por comparar con el corchete entre  $\rho_0$  y  $\lambda$ :

$$\{\rho_0, \lambda\} = \{\rho_0, -2\hat{\sigma}_0\} = \frac{1}{\kappa} \quad (3.40)$$

que coincide con el hallado en [37].

Para el corchete entre  $\rho_0$  y  $\mu, \bar{\mu}$ , es claro que son cero dado que  $\{\rho_0, \mathcal{V}\} = 0$ , aunque una sencilla aplicación del Lema 2.2 nos muestra el resultado: si a la derivación la elegimos  $D = \{\rho_0, \cdot\}$ , entonces

$$\mathcal{V}^{-1} \{\rho_0, \mathcal{V}\} = \frac{1}{1 - \mu\bar{\mu}} \left( \left( \sigma_- - \frac{\bar{\mu}}{2} \sigma_z \right) \{\rho_0, \mu\} + \left( \sigma_+ + \frac{\mu}{2} \sigma_z \right) \{\rho_0, \bar{\mu}\} \right) \quad (3.41)$$

$$\Rightarrow \{\rho_0, \mu\} = \{\rho_0, \bar{\mu}\} = 0 \quad (3.42)$$

Para los corchetes entre  $\mu$  y  $\bar{\mu}$ , resulta:

**Proposición 3.1.** *Los corchetes entre los coeficientes de Beltrami son*

1.  $\{\mu(x), \mu(y)\} = \{\bar{\mu}(x), \bar{\mu}(y)\} = 0 \quad \forall x, y \in \mathcal{N}$ .
2.  $\{\mu(x), \bar{\mu}(y)\} = \{\bar{\mu}(x), \mu(y)\} = 0$  si  $x$  e  $y$  no están causalmente conectados.
3. En la rama derecha (la rama izquierda es análoga):

$$\{\mu(x), \bar{\mu}(y)\} = \frac{1}{4\kappa} \left( \frac{1 - \mu\bar{\mu}}{\sqrt{\rho}} \right)_x \left( \frac{1 - \mu\bar{\mu}}{\sqrt{\rho}} \right)_y (s(x, y) + ic) e^{\alpha(x, y)} \quad (3.43)$$

$$\{\bar{\mu}(x), \mu(y)\} = \frac{1}{4\kappa} \left( \frac{1 - \mu\bar{\mu}}{\sqrt{\rho}} \right)_x \left( \frac{1 - \mu\bar{\mu}}{\sqrt{\rho}} \right)_y (s(x, y) - ic) e^{-\alpha(x, y)} \quad (3.44)$$

donde  $\alpha(x, y) = \int_x^y \frac{\mu\partial_+ \bar{\mu} - \bar{\mu}\partial_+ \mu}{1 - \mu\bar{\mu}} dx^+$

*Demostración.* El cálculo de estos corchetes se puede encontrar en [18].  $\square$

Los corchetes de la proposición anterior coinciden con los de [37] si tomamos la constante  $c = -i$ .

Ahora pasemos a los corchetes entre  $\hat{\sigma}_0$  y  $\mu, \bar{\mu}$ . Para eso, primero debemos considerar una diferencia extra entre [38] y nuestro cálculo: las coordenadas usadas en el artículo con el que estamos comparando mantienen  $S_0$  fijo, mientras que nuestras coordenadas  $x^\pm$  e  $y^\pm$  mantienen fijos  $S_R$  y  $S_L$  respectivamente. El pasaje de una carta a otra la podemos realizar con un difeomorfismo  $\phi$  entre el plano  $x^-, x^+$  y las coordenadas que dejan  $S_0$  fijo, que llamaremos coordenadas  $v^-, v^+$ .

Consideremos tales coordenadas definidas como

$$v^+ = \sqrt{\frac{\rho_+}{2\rho_0}} \quad (3.45)$$

$$v^- = \sqrt{\frac{-\rho_-}{2\rho_0}} \quad (3.46)$$

donde  $\rho = \frac{1}{2}(\rho_+ - \rho_-)$ , y estamos asumiendo que tanto  $\rho^+$  como  $\rho^-$  son funciones no negativas en un entorno de  $\mathcal{N}^2$ .

Esto nos da los valores  $(1, \sqrt{\frac{\rho_+(S_R)}{2\rho_0}}), (1, 1), (\sqrt{\frac{\rho_-(S_L)}{2\rho_0}}, 1)$  en los puntos  $S_R, S_0, S_L$  respectivamente. La relación entre las coordenadas  $x^\pm$  y  $v^\pm$  es un difeomorfismo conforme, que lo podemos ver a partir de la definición:

---

<sup>2</sup>Esto siempre se puede lograr, debido a que las funciones están definidas a menos de una constante aditiva.

$$v^+ = \sqrt{\frac{x^+ + cte}{\rho_0}} \quad (3.47)$$

$$v^- = \sqrt{\frac{-x^- + cte}{\rho_0}} \quad (3.48)$$

donde la constante  $cte \in \mathbb{R}$  es un valor positivo, que tiene como función que no haya una singularidad de la carta  $v^-$  en  $S_0$ .

Ahora bien, las variaciones que calculamos antes son  $\delta^x$ . Queremos las variaciones en  $\delta^v$ , que es otra carta que depende de la solución. La relación entre ambas será entonces el generador de difeomorfismos entre las cartas, por linealidad de la derivada de Lie.

La construcción del campo que genera el difeomorfismo la realizamos a partir de la ecuación 3.47, considerando a  $\delta\rho_0$  como el parámetro infinitesimal de la familia de difeomorfismos:

Recordando la definición de un difeomorfismo, en analogía con la ecuación 2.15, tenemos

$$0 = \delta^x x^+ = \delta^v x^+ + \mathcal{L}_\chi x^+ \quad (3.49)$$

$$= \delta^v (v^2 \rho_0) + \chi^+ \quad (3.50)$$

$$= \frac{x^+}{\rho_0} \delta\rho_0 + \chi^+ \quad (3.51)$$

obtenemos de esta manera la componente  $\chi^+$  del difeomorfismo.

$$\chi^+ = \frac{x^+}{\rho_0} \delta\rho_0 \partial_{x^+} \quad (3.52)$$

Entonces, a partir de la ecuación

$$\delta^v = \delta^x + \mathcal{L}_\chi$$

resulta

$$\{\hat{\sigma}_0, \cdot\}^x = \{\hat{\sigma}_0, \cdot\}^v + \frac{\rho}{\kappa\rho_0} \left( \partial_{b^+} \cdot \right)$$

Volviendo a la ecuación 3.28, tenemos

$$\boxed{\mathcal{V}^{-1}(x) \left\{ \hat{\sigma}_0, \mathcal{V}(x) \right\}^v = -2\rho_0 \text{Tr} \left( P_- \mathcal{V}^{-1} \mathcal{V}^{-1}(x) \left\{ \mathcal{V}, \mathcal{V}(x) \right\}_{\mathfrak{k}} \right)_{S_0} + \frac{x^+}{\kappa\rho_0} \left( \mathcal{V}^{-1} \partial_{x^+} \mathcal{V} \right)_{\mathfrak{k}}} \quad (3.53)$$

Ahora si estamos en condiciones de comparar con el resultado de [37].

**Proposición 3.2.** *Para  $y \in \mathcal{N}_R \setminus S_0$ , tenemos los siguientes corchetes:*

1.

$$\{\hat{\sigma}_0, \mu(x)\}^v = \frac{\rho(x)}{\kappa\rho_0} \partial_+ \mu(x) - \frac{(1 - \mu\bar{\mu})_x}{(1 - \mu\bar{\mu})_0} \left( \frac{2\rho_0(ic - 1)e^{\alpha(0,x)}}{4\kappa\sqrt{\rho_0\rho(x)}} \partial_- \mu(0) \right) \quad (3.54)$$

2.

$$\{\hat{\sigma}_0, \bar{\mu}(x)\}^v = \frac{\rho(x)}{\kappa\rho_0} \partial_+ \bar{\mu}(x) - \frac{(1 - \mu\bar{\mu})_x}{(1 - \mu\bar{\mu})_0} \left( \frac{2\rho_0(-ic - 1)e^{-\alpha(0,x)}}{4\kappa\sqrt{\rho_0\rho(x)}} \partial_- \bar{\mu}(0) \right) \quad (3.55)$$

*Demostración.* Es inmediato a partir del lema 2.2. □

Nuevamente, observar que si  $c = -i$ , los corchetes coinciden con los hallados en [37]. Por último, veamos los corchetes cuando evaluamos  $\mu, \bar{\mu}$  en  $S_0$ , que también se deduce del lema 2.2

**Proposición 3.3.** 1.

$$\{\hat{\sigma}_0, \mu(0)\} = -2ci(\partial_- \mu + \partial_+ \mu)_0 \quad (3.56)$$

2.

$$\{\hat{\sigma}_0, \bar{\mu}(0)\} = 2ci(\partial_- \bar{\mu} + \partial_+ \bar{\mu})_0 \quad (3.57)$$

Si, considerando lo hallado anteriormente,  $c = -i$  es consistente con [38].

De esta manera, todos los corchetes obtenidos en el capítulo anterior, para el caso que estudiamos de un modelo reducido con simetría cilíndrica, son equivalentes a los obtenidos en los trabajos previos en el caso sin simetría.

# Integrabilidad y Grupo de Geroch

## 4.1. Objetivo

Relatividad general en presencia de dos campos de Killing ortogonales que conmutan y son ortogonales a hipersuperficies presenta una cantidad infinitas simetrías independientes, como anunció Geroch en [20] y más explícitamente presentaron Belinski y Zakharov [2] y Maison en [32].

Se mostró que el modelo era integrable en el sector de las matrices  $\mathcal{V}$ , y luego Breitenlohner y Maison en el artículo [6] construyeron además una extensión central del álgebra de simetrías, que contiene al exponente conforme  $\sigma$ .

Luego, varios intentos por incorporar  $\rho$  al modelo integrable han sido publicados, entre ellos [3], [22] y [4].

En este capítulo comenzaremos por ver qué significa integrabilidad para un sistema, luego mostraremos un ejemplo de sistema integrable: la cadena de espines de Heisenberg. Este ejemplo es útil a nuestro trabajo no sólo para mostrar la idea de integrabilidad y entender los conceptos centrales, si no que además es análogo al sistema integrable obtenido en el sector de las matrices  $\mathcal{V}$ .

Luego pasaremos a nuestro modelo, siguiendo [6], mostrando cuál es el sistema lineal que contiene la información de la ecuación de movimiento para  $\mathcal{V}$ , la primera ecuación en la proposición 1.11. Una vez hecho esto, veremos el álgebra de simetrías que se obtiene. Al final, definiremos el objeto principal del trabajo en los próximos capítulos: la matriz de monodromía  $\mathcal{M}$ .

Central para nuestro trabajo es estudiar las incorporaciones de los valores en  $S_0$  de los campos  $\sigma$  y  $\rho$  al modelo integrable, extendiendo la matriz de monodromía de un doble grupo loop a una extensión central del mismo.

## 4.2. Breve introducción a modelos integrables

En esta sección daremos una somera descripción de un sistema integrable, trabajando con un ejemplo concreto. Seguiremos principalmente la referencia [1].

### 4.2.1. Modelo de Heisenberg

Comenzamos por tomar un campo de espines  $S(x) \in \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ , con  $x \in [0, L]$ , y las siguientes condiciones:

$$S(x) = \sum_{i=1}^3 S^i(x) \sigma_i \quad \sum_{i=1}^3 S^i(x)^2 = s^2 \quad (4.1)$$

siendo  $s$  el espín del campo;  $\sigma_i$  denotan las matrices de Pauli

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k \quad \text{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij} \quad (4.2)$$

El modelo es una teoría de campos en 1+1, e indicaremos por  $x$  las coordenadas espaciales y por  $t$  el tiempo. Los puntos  $x = 0$  y  $x = L$  se indentifican, teniendo a  $S^1$  como espacio donde viven los espines.

El corchete de Poisson entre las componentes del espín lo definimos como

$$\{S^i(x), S^j(y)\} = \epsilon^{ijk} S^k(x) \delta(x - y) \quad (4.3)$$

y el Hamiltoniano es

$$H = -\frac{1}{4} \int_0^L \text{Tr} \left( \frac{d}{dx} S \frac{d}{dx} S \right) dx \quad (4.4)$$

A partir del Hamiltoniano, es sencillo obtener las ecuaciones de movimiento:

$$\partial_t S = \frac{i}{2} \partial_x [\partial_x S, S] \quad (4.5)$$

La integrabilidad del modelo se deduce escribiendo las ecuaciones de movimiento anteriores como una condición de curvatura cero para alguna conexión  $A_\mu$ , en el fibrado sobre  $S^1 \times \mathbb{R}$  con fibra correspondiente al álgebra loop de  $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ . El parámetro  $\lambda$  se denomina parámetro espectral.

Para el modelo de Heisenberg que estamos considerando, la conexión se define como

$$A_x = \frac{i}{\lambda} S(x) \quad (4.6)$$

$$A_t = -\frac{2is^2}{\lambda^2} S(x) + \frac{1}{2\lambda} [S(x), \partial_x S(x)] \quad (4.7)$$

donde  $\lambda$  es el parámetro espectral (independiente de  $x$ ). Las funciones  $A_x$  y  $A_t$  son análogas al par de Lax que se define en teorías integrables (ver [9]). La principal propiedad de la conexión  $A$  es que su curvatura es cero:

$$[\partial_x + A_x, \partial_t + A_t] = \partial_x A_t - \partial_t A_x + [A_x, A_t] = 0 \quad (4.8)$$

como podemos verificar de manera inmediata:

$$\partial_x A_t = -\frac{2is^2}{\lambda^2} \partial_x S(x) + \frac{1}{2\lambda} \partial_x [S(x), \partial_x S(x)] \quad (4.9)$$

$$\partial_t A_x = \frac{i}{\lambda} \partial_t S(x) \quad (4.10)$$

$$[A_x, A_t] = \left[ \frac{i}{\lambda} S(x), -\frac{2is^2}{\lambda^2} S(x) + \frac{1}{2\lambda} [S(x), \partial_x S(x)] \right] \quad (4.11)$$

y de la identidad

$$[S, [S, \partial_x S]] = -[S^i \partial_x S^j 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k, S] \quad (4.12)$$

$$= 4S^i \partial_x S^j \epsilon_{ijk} S^l \epsilon_{klm} \sigma^m \quad (4.13)$$

$$= 4S^i \partial_x S^j S^l (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \sigma^m \quad (4.14)$$

$$= 4s^2 \partial_x S - 4\partial_x s^2 S = 4s^2 \partial_x S \quad (4.15)$$

porque es hipótesis que  $s$  es constante.

Las nuevas ecuaciones de movimiento se escriben en términos de  $\Psi$ , una función que toma valores en el grupo asociado al álgebra donde toma valores  $A_\mu$ :

$$(\partial_x + A_x) \Psi(x, \lambda) = 0 \quad (4.16)$$

$$(\partial_t + A_t) \Psi(x, \lambda) = 0 \quad (4.17)$$

donde observar que ahora las ecuaciones son lineales. En este caso,  $\Psi$  toma valores en el grupo loop de  $SL_2(\mathbb{C})$ .

La conexión nos permite calcular  $\Psi(x, \lambda)$  en función de  $\Psi(0, \lambda)$ , transportando paralelamente con  $A_x$ , pensando a  $A_x$  como una conexión en  $S^1$  de fibrado  $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ . Sea  $T$  la matriz de transporte

$$T(x, \lambda) = \mathcal{P} \exp^{-\int_0^x A_x(y, \lambda) dy} \quad (4.18)$$

entonces

$$\Psi(x, \lambda) = T(x, \lambda) \Psi(0, \lambda) \quad (4.19)$$

La holonomía la definimos como  $T(\lambda) := T(L, \lambda)$  (recordar que identificamos  $x = 0$  con  $x = L$ ). Este objeto depende del parámetro espectral, y podemos verificar que es un elemento del grupo loop asociado a  $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ . La utilidad de la matriz de monodromía es que podemos expresar los corchetes de Poisson de sus elementos como un corchete de Sklyanin (ver Apéndice B), que es lo que veremos a continuación.

Para una matriz de transporte paralelo se tiene que el corchete vale (a partir de la ecuación 4.18, ver [1] para más detalles)

$$\left\{ \overset{1}{T}(\lambda), \overset{2}{T}(\mu) \right\} = \overset{1}{T}(\lambda) \overset{2}{T}(\mu) \int_0^L dz \int_0^L dy \overset{1}{T}^{-1}(z, \lambda) \overset{2}{T}^{-1}(y, \mu) \left\{ \overset{1}{A}_x(z, \lambda), \overset{2}{A}_x(y, \mu) \right\} \overset{1}{T}(z, \lambda) \overset{2}{T}(y, \mu) \quad (4.20)$$

El corchete dentro de la integral lo calculamos a partir de la definición de la conexión  $A$ :

$$\left\{ \overset{1}{A}_x(z, \lambda), \overset{2}{A}_x(y, \mu) \right\} = \frac{-1}{\lambda\mu} \left\{ \overset{1}{S}(z), \overset{2}{S}(y) \right\} \quad (4.21)$$

$$= -\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}\right) \left(\frac{1}{\mu - \lambda}\right) \epsilon^{ijk} \overset{1}{\sigma}^i \overset{2}{\sigma}^j S^k \delta(z - y) \quad (4.22)$$

$$= -\frac{1}{2} \delta(z - y) \left[ \overset{1}{A}_x(z) + \overset{2}{A}_x(y), \frac{\overset{12}{\Omega}}{\lambda - \mu} \right] \quad (4.23)$$

donde  $\overset{12}{\Omega} := \sum_i \overset{1}{\sigma}^i \overset{2}{\sigma}^i$ , con la notación tensorial definida en el Apéndice B, es el elemento de Casimir de  $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ . A menos que se diga lo contrario, en este trabajo siempre notaremos como  $\Omega$  al elemento de Casimir de las álgebras con las que trabajemos. Ver el Apéndice B para una definición del elemento de Casimir en el contexto de álgebras de Kac-Moody.

Sustituyendo el resultado del corchete entre los  $A_x$ 's en la integral, realizando la integral en  $y$  y simplificando términos;

$$\left\{ \overset{1}{T}(\lambda), \overset{2}{T}(\mu) \right\} = -\frac{1}{2} \overset{1}{T}(\lambda) \overset{2}{T}(\mu) \int_0^L dz \partial_z \left( \overset{1}{T}^{-1}(z, \lambda) \overset{2}{T}^{-1}(z, \mu) \frac{\Omega}{\lambda - \mu} \overset{1}{T}(z, \lambda) \overset{2}{T}(z, \mu) \right) \quad (4.24)$$

De esta manera, los corchetes de Poisson entre los elementos de la matriz de holonomía son

$$\left\{ \overset{1}{T}(\lambda), \overset{2}{T}(\mu) \right\} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Omega}{\lambda - \mu}, \overset{1}{T}(\lambda) \overset{2}{T}(\mu) \right] \quad (4.25)$$

donde el conmutador es entre los elementos de matriz en alguna representación matricial del grupo.

**Observación 4.1.** En el capítulo siguiente veremos que los corchetes de Poisson entre los elementos de matriz del grupo de Geroch tienen esencialmente el mismo corchete de Poisson que la demostrada anteriormente para la matriz de monodromía del modelo de Heisenberg.

El resultado importante sobre las holonomías es el siguiente (ver [1] para una deducción):

**Proposición 4.1.** *La función  $\text{Tr}(T(\lambda))$  genera cantidades en involución, que las podemos calcular explícitamente:*

$$I_0 = \frac{i}{4s} \int_0^L \ln \left( \frac{S_+}{S_-} \right) \partial_x S_3 dx \quad (4.26)$$

$$I_1 = -\frac{1}{16s^3} \int_0^L \text{Tr}(\partial_x S \partial_x S) dx \quad (4.27)$$

$$I_2 = \frac{i}{64s^5} \int_0^L \text{Tr}(S [\partial_x S, \partial_x^2 S]) dx \quad (4.28)$$

...

A continuación describiremos las transformaciones dressing del modelo de espines; primero, debemos especificar cuáles son las subálgebras  $\mathcal{G}_\pm$  que determinan el problema de factorización.

En el apéndice C se explica cómo a partir de un corchete de la forma 4.25, se construye una factorización del álgebra de Lie, en términos de dos operadores, que se llaman  $r_+$  y  $r_-$ , que cumplen

$$r^+ = -r^- \quad (4.29)$$

$$r^+ - r^- = \mathcal{C} \quad (4.30)$$

donde  $\mathcal{C}$  es el elemento de Casimir del álgebra loop  $\widehat{\mathfrak{su}(2)}$ .

Como definición de las matrices  $r^\pm$ , usaremos las sumas formales correspondientes a dos desarrollos distintos de  $\frac{1}{\lambda-\mu}$ :

$$r^+(\lambda, \mu) = \Omega \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{\mu^{n+1}} \quad (4.31)$$

$$r^-(\lambda, \mu) = -\Omega \sum_{n \geq 0} \frac{\mu^n}{\lambda^{n+1}} \quad (4.32)$$

$\lambda, \mu$  corresponden a los parámetros espectrales de los espacios 1 y 2 respectivamente, así que podemos reescribir las matrices de la siguiente manera

$$r^+(\lambda, \mu) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n \sigma_i \otimes \frac{\sigma^i}{\mu^{n+1}} \quad (4.33)$$

$$r^-(\lambda, \mu) = -\sum_{n \geq 0} \frac{\sigma^i}{\lambda^{n+1}} \otimes \mu^n \sigma_i \quad (4.34)$$

Antes de continuar hacia la estructura de doble clásico, verificaremos las dos propiedades que cumplen las matrices  $r^\pm$ .

**Proposición 4.2.** *Las siguientes igualdades se cumplen:*

$$r^{12+} + r^{21-} = 0 \quad (4.35)$$

$$r^{12+} - r^{12-} \propto \mathcal{C} \quad (4.36)$$

*Demostración.* Recordamos que  $\Omega$  es invariante bajo la acción adjunta simultánea, los corchetes de Poisson hallados para la matriz de monodromía no cambian si sumamos un múltiplo de  $\delta(\lambda - \mu)$ :

$$\left\{ \overset{1}{T}(\lambda), \overset{2}{T}(\mu) \right\} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Omega}{\lambda - \mu} + f(\lambda, \mu) \Omega \delta(\lambda - \mu), \overset{1}{T}(\lambda) \overset{2}{T}(\mu) \right] \quad (4.37)$$

La serie formal correspondiente a  $\delta(\lambda - \mu)$  es

$$\delta(\lambda - \mu) = \mu^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\lambda^n}{\mu^n} \quad (4.38)$$

El elemento de Casimir  $\mathcal{C}$  del álgebra loop es (ver [23], cap. 7, ejercicio 7.16)

$$\mathcal{C} = \Omega \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\mu^n}{\lambda^n} \in \widehat{\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})} \otimes \widehat{\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})} \quad (4.39)$$

donde los parámetros  $\mu$  y  $\lambda$  viven cada uno en una copia del producto tensorial:  $\lambda$  en el primero y  $\mu$  en el segundo.

La primera igualdad es inmediata:

$$\frac{12^+}{r} + \frac{21^-}{r} = \Omega \left( \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{\mu^{n+1}} - \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{\mu^{n+1}} \right) = 0 \quad (4.40)$$

La segunda igualdad:

$$\frac{12^+}{r} - \frac{12^-}{r} = \Omega \left( \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{\mu^{n+1}} + \sum_{n \geq 0} \frac{\mu^n}{\lambda^{n+1}} \right) \quad (4.41)$$

$$= \lambda^{-1} \Omega \left( \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^{n+1}}{\mu^{n+1}} + \sum_{n \geq 0} \frac{\mu^n}{\lambda^n} \right) \quad (4.42)$$

$$= \lambda^{-1} \Omega \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\lambda^n}{\mu^n} \quad (4.43)$$

□

Siguiendo la construcción del apéndice C, pasamos ahora a los operadores  $R_{\pm}$ . Los definimos a partir de la forma bilineal invariante del álgebra loop (ver Apéndice B, B.29): dado  $X(\lambda) \in \widehat{\mathfrak{su}(2)}$

$$X_{\pm}(\lambda) \equiv R_{\pm}(X(\lambda)) = \left( \frac{12^{\pm}}{r} (\lambda - \mu) \left| \overset{2}{X}(\mu) \right. \right)_2 \quad (4.44)$$

donde el subíndice 2 indica que la traza<sup>1</sup> la tomamos en el segundo espacio solamente. Más explícitamente, supongamos que  $X(\mu) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X_m \mu^m$ , entonces

<sup>1</sup>el factor de  $\frac{1}{2}$  frente a la traza es porque normalizamos la base  $\{\sigma_i\}_i$  para que sea ortonormal respecto a la forma bilineal invariante

$$X_+(\lambda) = \left( \sum_{n \geq 0} \lambda^n \sigma_i \otimes \frac{\sigma^i}{\mu^{n+1}} \left| 1 \otimes \sum_{m \in \mathbb{Z}} X_m \mu^m \right. \right)_2 \quad (4.45)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \lambda^n \sigma_i \left( \frac{\sigma^i}{\mu^{n+1}} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} X_m \mu^m \right. \right) \quad (4.46)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \lambda^n \sigma_i \sum_{m \in \mathbb{Z}} \text{Res}_0(\mu^{m-n-1}) \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma^i X_m) \quad (4.47)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \lambda^n \sigma_i \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma^i X_n) \quad (4.48)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \lambda^n X_n \quad (4.49)$$

y análogo para  $X_-(\lambda) = -\sum_{n < 0} \lambda^n X_n$ . El operador  $\text{Res}_0$  es el del Apéndice B, que corresponde a calcular el residuo y dividir por  $2\pi i$ :  $\text{Res}/(2\pi i)$ .

**Observación 4.2.** Observar que dado  $X(\lambda) \in \mathfrak{su}(2)$ , se escribe de manera única como  $X(\lambda) = X_+(\lambda) - X_-(\lambda)$

Esto nos define completamente el problema de factorización de Riemann-Hilbert, pues tenemos las dos subálgebras  $\mathcal{G}_\pm$  como las imágenes de los homomorfismos  $R_\pm$ .

**Observación 4.3.** La holonomía pertenece al subgrupo  $\exp(\mathcal{G}_-)$ , pues es la exponencial de una integral de  $A_x = \frac{i}{\lambda} S(x) \in \mathcal{G}_-$ .

En las secciones siguientes veremos la construcción del álgebra de simetrías para gravedad dimensionalmente reducida, y cómo el sistema lineal auxiliar nos permite hacer una realización de la misma en términos de un álgebra loop, similar a la estudiada en este capítulo. En el capítulo siguiente, haremos explícita la construcción del doble clásico en el sector loop.

### 4.3. Sistema lineal en el sector $\mathcal{V}$

En esta sección analizaremos el sector de las matrices unimodulares  $\mathcal{V}$  mediante un sistema lineal auxiliar. Como ya vimos, las ecuaciones de campo para  $\mathcal{V}$  son

$$D_\mu(\rho P^\mu) = 0 \quad (4.50)$$

claramente no lineales. Como vimos en la sección anterior, definir un sistema lineal auxiliar consiste en hallar una conexión de manera que las ecuaciones de movimiento 4.50 se expresen como condiciones de curvatura cero para tal conexión. En general, si la conexión inicial, no lineal, es  $\mathfrak{g}$ -valuada, para un álgebra de Lie simple finita, entonces la nueva conexión será  $\mathcal{L}(\hat{\mathfrak{g}})$ -valuada, es decir, tomará valores en el álgebra loop de  $\mathfrak{g}$ .

En nuestro caso, la conexión inicial es  $J_\mu$ , que es  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ -valuada. La idea es deformar la conexión  $J_\mu$  con un parámetro espectral de forma que la nueva conexión deformada sea  $\widehat{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})}$ -valuada

**Definición 4.1.** Sea  $\widehat{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})}$  el álgebra loop de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ , definida de la siguiente manera

$$\widehat{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} [\gamma^{-1}, \gamma] \quad (4.51)$$

con los corchetes de Lie definidos  $[X \otimes \gamma^n, Y \otimes \gamma^m] = [X, Y] \otimes \gamma^{m+n}$ . El parámetro  $\gamma$  se denomina parámetro espectral.

**Observación 4.4.**  $\widehat{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})}$  es un álgebra de Lie de dimensión infinita, con generadores  $h, e, f, e \otimes \gamma^{-1}$  y  $f \otimes \gamma$ . Ver Apéndice B.

La deformación en la conexión  $J$  que definimos en el capítulo 1 es sencilla de implementar. Consideremos las coordenadas  $x^{\pm}$  que definimos antes. Tomamos el ansatz

$$\hat{J}_{\pm} = Q_{\pm} + u^{\mp 1} P_{\pm} \quad (4.52)$$

y ahora imponemos la condición de curvatura cero:

$$d \wedge \hat{J} - [\hat{J}, \hat{J}] = 0 \implies \partial_{\pm} \hat{J}_{\mp} - \partial_{\mp} \hat{J}_{\pm} - [\hat{J}_{\pm}, \hat{J}_{\mp}] = 0 \quad (4.53)$$

Tomemos la ecuación correspondiente al signo superior, siendo la otra ecuación equivalente. Agrupando términos, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_+ Q_- - \partial_- Q_+ - [Q_-, Q_+] - [P_-, P_+] + \\ &\quad + u \partial_+ P_- - u^{-1} \partial_- P_+ + u [Q_+, P_-] - u^{-1} [Q_-, P_+] + \\ &\quad + P_- \partial_+ u - P_+ \partial_- u^{-1} \\ &= \partial_+ Q_- - \partial_- Q_+ - [Q_-, Q_+] - [P_-, P_+] + \\ &\quad + \frac{1}{2} (u - u^{-1}) (\partial_+ P_- - \partial_- P_+ + [Q_+, P_-] - [Q_-, P_+]) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (u - u^{-1}) (D_- P_+ + D_+ P_-) \\ &\quad + P_- \partial_+ u - P_+ \partial_- u^{-1} \end{aligned} \quad (4.54)$$

La condición de curvatura cero para la conexión  $J$  implica que los primeros dos renglones se anulan, ver 1.56. De la identidad:

$$\rho D_{\mp} P_{\pm} = D_{\mp} (\rho P_{\pm}) - P_{\pm} \partial_{\mp} \rho \quad (4.56)$$

y usando las ecuaciones de movimiento, 4.50, resulta

$$0 = -\frac{1}{2\rho} (u - u^{-1}) (P_+ \partial_- \rho + P_- \partial_+ \rho) + P_- \partial_+ u - P_+ \partial_- u^{-1} \quad (4.57)$$

Esto nos da el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \partial_+ u = \frac{u - u^{-1}}{2\rho} \partial_+ \rho \\ \partial_- u = \frac{u^3 - u}{2\rho} \partial_- \rho \end{cases} \quad (4.58)$$

Observar que  $u = 1$  es una solución trivial. Dada una constante de integración  $w$ , el sistema anterior tiene como solución (usando las coordenadas  $x^-$ ,  $x^+$  que definimos en el capítulo 2)

$$u = \sqrt{\frac{w + x^+}{w + x^-}} \quad (4.59)$$

El parámetro  $w$  se denomina *parámetro espectral fijo* del modelo. Observar que la deformación está dada por la función  $u(x^-, x^+, w)$ , que depende de los puntos de la variedad. Por esta razón, se denomina a  $u$  *parámetro espectral móvil*

**Observación 4.5.** 1. En [6] se introduce el parámetro espectral móvil  $\gamma$ , que en términos de  $w$  es:

$$\gamma(x^-, x^+, w) = \frac{1}{\rho} \left( w + \tilde{\rho} - \sqrt{(w + \tilde{\rho})^2 - \rho^2} \right) \quad (4.60)$$

que puede reescribirse como

$$\gamma(x^-, x^+, w) = \frac{\sqrt{w + \rho^+} - \sqrt{w + \rho^-}}{\sqrt{w + \rho^+} + \sqrt{w + \rho^-}} \quad (4.61)$$

2. La relación entre  $\gamma$  y  $w$  está dada por el doble cubrimiento del plano  $\gamma$  hecho por los  $w$ , debido a los branch cut producidos por tener una raíz cuadrada en la expresión para  $\gamma$ . Sobre esto hablaremos en la sección subsección siguiente. Por otro lado, la ecuación que relaciona  $u$  con  $\gamma$  es

$$u = \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \quad (4.62)$$

3. En coordenadas arbitrarias, y en términos de  $\gamma$ , es

$$\hat{J}_\mu = Q_\mu + \frac{1 + \gamma^2}{1 - \gamma^2} P_\mu - \frac{2\gamma}{1 - \gamma^2} \epsilon_{\mu\nu} P^\nu \quad (4.63)$$

Ahora tenemos una conexión auxiliar,  $\hat{J}$ , que proviene de una deformación de la conexión inicial,  $J$ . Para definir el sistema lineal auxiliar, nos falta otro ingrediente: el grupo asociado al álgebra de Lie en la que vive  $\hat{J}$ . En este grupo evaluaremos las soluciones al sistema lineal.

En nuestro caso, tenemos el grupo loop asociado a  $SL(2, \mathbb{R})$ , y notaremos por  $\hat{\mathcal{V}}(x^-, x^+)$  a las funciones valuadas en tal grupo. El sistema lineal auxiliar está ahora sí determinado por la ecuación

$$d\hat{\mathcal{V}} = \hat{\mathcal{V}}\hat{J} \quad (4.64)$$

Ahora que tenemos la conexión deformada  $\hat{J}$ , construimos una solución de 4.64 transportando paralelamente un valor de referencia con tal conexión de la siguiente manera

$$\hat{\mathcal{V}}(x, w) = \hat{\mathcal{V}}(x_0, w) \mathcal{P} e^{\int_{x_0}^x \hat{\mathcal{J}}} \quad (4.65)$$

donde  $\hat{\mathcal{V}}(x_0, w)$  es un valor de referencia. De esta manera, una vez especificada  $\hat{\mathcal{V}}$  sobre  $\mathcal{N}$ , podemos hallar  $\hat{\mathcal{V}}$  transportando sobre geodésicas nulas al interior del dominio de dependencia futuro de  $\mathcal{N}$ , de manera que obtenemos  $\hat{\mathcal{V}}$  sin ambigüedades (gracias a la condición de curvatura cero de la conexión deformada).

**Definición 4.2.** Diremos que  $\hat{\mathcal{V}}$  cumple el gauge triangular si en un punto del espacio-tiempo es analítica en  $\gamma = 0$  y  $\hat{\mathcal{V}}(\gamma = 0)$  es triangular superior.

¿Cómo relacionamos la zweibein original  $\mathcal{V}$  con  $\hat{\mathcal{V}}$ ? Veamos la definición anterior con más detalle:  $\hat{\mathcal{V}} \in \exp(\widehat{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})})$ , y por tanto se puede escribir como una serie de potencias en  $\gamma^2$

$$\hat{\mathcal{V}} = A_0 + \gamma A_1 + \gamma^2 A_2 + \dots \quad (4.66)$$

La zweibein original se recupera tomando el valor  $\gamma = 0$  en el desarrollo en serie de potencias anterior:  $A_0 = \mathcal{V}$ . Este límite es válido pues en términos de  $u$ ,  $\gamma = 0$  implica  $u = 1$ , que vimos arriba es una solución válida para la deformación, que conduce a la conexión original, y por tanto tiene sentido identificar el primer término de la serie con la solución de la teoría original.

### 4.3.1. Divergencia en 4.65

Para ver las distintas propiedades analíticas de la ecuación 4.65, remitimos al lector a [6] y [18].

Sobre una curva nula de  $\rho^+ = \rho_0^+$ , como en el caso de la curva  $\mathcal{N}_L$ , la función  $u(x^-, x^+, w)$  es (cf. eq. 5.2)

$$u = \sqrt{\frac{w + \rho_0^+ + \rho_0^-}{w + x^- + \rho_0^-}} \quad (4.67)$$

esto implica que para el valor  $x^- = -w - \rho_0^-$  el parámetro  $u$  diverge. A este punto lo denominaremos punto de *deformación*. Sin embargo, la integral en 4.65 está bien definida, gracias a que la divergencia de  $u$  es una divergencia integrable. A esto volveremos más adelante en el capítulo 5.

## 4.4. Álgebra de simetrías

En esta sección estudiaremos el álgebra de simetrías para las ecuaciones de movimiento deducidas en el capítulo 1, teniendo como guía el sistema lineal que vimos en la sección anterior.

La presentación que realizaremos es la misma que se puede encontrar en [6], [24]. La idea principal es la siguiente: calcularemos la acción de las simetrías a partir del

---

<sup>2</sup>También podemos usar el desarrollo en serie de potencias en  $u$  o  $w$ . Esto conduce a otras condiciones para la relación entre  $\hat{\mathcal{V}}$  y  $\mathcal{V}$ .

gauge triangular para  $\mathcal{V}$ . Como  $\mathcal{V} \in SL(2, \mathbb{R})$ , entonces las variaciones logarítmicas que tomaremos estarán valuadas en  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ .

El grupo de Geroch emerge entonces como una “interacción” entre dos copias de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ . Las dos copias corresponden a una simetría del lagrangeano del modelo, realizada a través de la transformación de Kramer-Neugebauer. Una copia corresponde a la formulación de Ehlers, la otra a la formulación de Matzner y Misner

Mostraremos que la interacción entre ambas álgebras es no trivial, dando lugar a un álgebra isomorfa a  $\widehat{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})}$ . Tendremos como resultado una transformación infinitesimal de la forma

$$\delta\hat{\mathcal{V}} = \delta g\hat{\mathcal{V}} + \hat{\mathcal{V}}\delta h(\hat{\mathcal{V}}, \delta g) \quad (4.68)$$

donde  $\delta g \in \widehat{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})}$ , el álgebra de simetrías, y  $\delta h(\hat{\mathcal{V}}, \delta g) \in \widehat{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})}$  es un término que restituye el gauge elegido, y que depende puntualmente de la variedad, además que tiene una dependencia no lineal en  $\mathcal{V}$ .

#### 4.4.1. Lagrangeano de Ehlers

El lagrangeano para el modelo gravitacional que está en la acción 1.43 es el denominado *Lagrangeano de Ehlers*.

Como vimos, este lagrangeano se puede escribir como muestra la expresión 1.60. En la deducción de tal ecuación, el operador traza  $\text{Tr}$  que aparece en la fórmula corresponde a tomar la siguiente métrica invariante en el espacio  $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ :

$$ds^2 = \frac{\Delta^2}{\rho^2} (d\theta^2 + dB_2^2) \quad (4.69)$$

siendo  $\theta = \frac{\rho}{\Delta}$ . Esta métrica es riemanniana, i.e., definida positiva. Las simetrías que surgen de usar esta prescripción se denominan simetrías de Ehlers para el modelo gravitatorio reducido a dos dimensiones.

#### 4.4.2. Lagrangeano de Matzner-Misner

En la reducción dimensional realizamos la elección de los campos  $\Gamma$  y  $\Delta$ , que bajo la prescripción que tomamos nos dio el lagrangeano de Ehlers. Bajo otra prescripción, definimos que  $\Gamma = \rho^{1/2}\tilde{\Delta}^{1/2}$  y  $\Delta^{1/2} = \rho^{1/2}\tilde{\Delta}^{-1/2}$ , y redefinir  $B_2$  como

$$\tilde{\Delta}^{-1}\partial_\mu\tilde{B} = \Delta^{-1}\epsilon_{\mu\nu}\partial^\nu B \quad (4.70)$$

De esta manera, podemos parametrizar el espacio de matrices  $\mathcal{V}$  como

$$\tilde{\mathcal{V}} := \begin{pmatrix} \tilde{\Delta}^{1/2} & \tilde{\Delta}^{1/2}\tilde{B} \\ 0 & \tilde{\Delta}^{-1/2} \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

El lagrangeano asociado es

$$\mathcal{L} = \rho R - \rho\tilde{\text{Tr}}(\tilde{P}_\mu\tilde{P}^\mu) + \frac{1}{2}\rho^{-1}\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho \quad (4.72)$$

donde  $\tilde{P}_\mu$  está definido para  $\tilde{\mathcal{V}}$  al igual que  $P_\mu$  lo está para  $\mathcal{V}$ . La métrica  $\tilde{\text{Tr}}$ , sin embargo, corresponde a la forma bilineal

$$ds^2 = \tilde{\Delta}^2 \left( -d\tilde{\Delta}^2 + d\tilde{B}^2 \right) \quad (4.73)$$

que tiene signatura Lorentziana. Esta es la métrica invariante del espacio  $SL(2, \mathbb{R})/SO(1, 1)$ . Ver [24] para más detalles acerca de los lagrangeanos de Ehlers y de Matzner-Misner.

### 4.4.3. Transformación de Kramer-Neugebauer

La transformación de Kramer-Neugebauer actúa en las variables de uno de los lagrangeanos anteriores, y nos lleva soluciones de las ecuaciones de movimiento a soluciones de las ecuaciones de movimiento para el otro lagrangeano.

**Definición 4.3.** Sean  $\sigma, \mathcal{V}$  y  $\rho$  definidos como en el capítulo 1. La transformación de Kramer-Neugebauer es el mapa  $K : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$  de soluciones a soluciones tal que

$$\sigma \mapsto \tilde{\sigma} = \sigma + \frac{1}{4} \ln \rho - \frac{1}{2} \Delta \quad (4.74)$$

$$\Delta \mapsto \tilde{\Delta} = \frac{\rho}{\Delta} \quad (4.75)$$

$$B \mapsto \tilde{B} \quad (4.76)$$

donde  $\tilde{B}$  está definido como  $\tilde{\Delta}^{-1} \partial_\mu \tilde{B} = \Delta^{-1} \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu B$ .

Esta transformación es la que vincula las variables presentes en los lagrangeanos de Ehlers y de Matzner-Misner.

**Observación 4.6.** La importancia de la transformación de Kramer-Neugebauer es que relaciona soluciones que son regulares en el eje con soluciones que no son regulares en el eje. Ver [18] para más detalles acerca de la transformación de Kramer-Neugebauer.

### 4.4.4. Transformación de Kramer-Neugebauer extendida a $\hat{\mathcal{V}}$

Hasta ahora hemos trabajado con las variables originales de la teoría:  $\sigma, \rho$  y  $\mathcal{V}$ . En esta subsección, extenderemos la transformación de Kramer-Neugebauer que definimos en la subsección anterior de forma que incluya a  $\hat{\mathcal{V}}$ .

Como el campo físico es  $\mathcal{V} = \hat{\mathcal{V}}(\gamma = 0)$ , es claro que tendremos infinitas maneras de extender a  $K$ , pero a orden cero en  $\gamma$  cada una de las extensiones posibles tendrán que coincidir.

**Proposición 4.3.** *Sea*

$$N(z) = \begin{pmatrix} 0 & -iz^{-1/2} \\ iz^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.77)$$

entonces la transformación  $K^\infty$  que mapea  $\hat{\mathcal{V}}$  en  $N(\frac{1}{2w})\hat{\mathcal{V}}N(\gamma)$  es una extensión de la transformación  $K$  de la subsección anterior.

*Demostración.* Se puede encontrar en la sección 6 de [6].  $\square$

Para simplificar la lectura, notaremos  $s := \frac{1}{2w}$ . La extensión  $K^\infty$  que elegimos antes es especial dentro de las extensiones posibles de  $K$ , como se muestra en [6]:

**Proposición 4.4.** *Sea  $\hat{\mathcal{V}}$  una solución al sistema lineal  $\hat{J}_\mu = \hat{\mathcal{V}}^{-1}\partial_\mu\hat{\mathcal{V}}$ . Entonces  $K^\infty(\hat{\mathcal{V}})$  también es solución al sistema lineal.*

De esta manera, tenemos una transformación entre soluciones  $\hat{\mathcal{V}}$ , que en el límite  $\gamma \rightarrow 0$  es la transformación  $K$  del sistema original.

#### 4.4.5. Construcción del álgebra de simetrías

Para estudiar la estructura del álgebra de simetrías, primero estudiaremos la acción del tangente a  $SL(2, \mathbb{R})$  en  $\mathcal{V}$ , que se denomina la acción infinitesimal del grupo de Ehlers. Esto nos dará una idea de cómo tratar las variaciones infinitesimales del sistema lineal.

Luego, haremos el pushforward por  $(K^\infty)^{-1}$  de la misma acción infinitesimal en  $K^\infty(\hat{\mathcal{V}})$ , que se denomina la acción infinitesimal del grupo de Matzner-Misner. La relaciones de conmutación entre ambas álgebras darán lugar al álgebra loop de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ , o  $\widehat{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})}$ , con parámetro  $s$ , que es la acción infinitesimal del Grupo de simetrías conocido como *Grupo de Geroch*. Como se prueba en [6]:

**Proposición 4.5.** *Sean  $\alpha_0^\vee, e_0, f_0$  los generadores infinitesimales del grupo de Matzner-Misner y  $\tilde{\alpha}_0^\vee, \tilde{e}_0, \tilde{f}_0$  los generadores infinitesimales del grupo de Ehlers<sup>3</sup>. Entonces*

$$\tilde{\alpha}_0^\vee = -\alpha_0^\vee \tag{4.78}$$

$$\tilde{e}_0 = -sf_0 \tag{4.79}$$

$$\tilde{f}_0 = -s^{-1}e_0 \tag{4.80}$$

**Observación 4.7.** La proposición anterior nos indica que el álgebra de las transformaciones infinitesimales generadas por los grupos de Matzner-Misner y Ehlers es  $\widehat{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})}$  con parámetro  $s$ . Esto es, la acción infinitesimal del grupo de Geroch es el álgebra loop de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ . Por esto es que al sector de las matrices  $\mathcal{V}$  del modelo se lo denomina *sector loop* del modelo.

De esta manera, la acción del grupo de Geroch queda realizada como la acción del grupo loop,  $\widehat{SL}(2, \mathbb{R})$ , sobre las matrices  $\hat{\mathcal{V}}$ .

**Observación 4.8.** Se puede definir una involución en  $\widehat{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})}$  que sea una extensión de la involución de Chevalley en  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ ,  $\eta(X) = -X^t$ , que denominaremos  $\eta^\infty$ :

$$\eta^\infty(X \otimes s^n) = \eta(X) \otimes s^{-n} \tag{4.81}$$

Por abuso de notación, también se denomina  $\eta^\infty$  al automorfismo generado por la involución de  $\widehat{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})}$  en  $\widehat{SL}(2, \mathbb{R})$ .

<sup>3</sup>Donde  $\alpha^\vee = h$ ,  $e_0 = e$ ,  $f_0 = f$  en el caso de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ . Aquí seguimos la notación que definimos en el Apéndice B para álgebra de Kac-Moody.

## 4.5. Matriz de Monodromía

En esta sección introducimos un objeto importante para el desarrollo posterior de nuestro trabajo: la matriz de monodromía.

**Definición 4.4.** La matriz de monodromía se define como

$$\mathcal{M}(w) := \hat{\mathcal{V}}_{\eta^\infty}(\hat{\mathcal{V}}^{-1}) = \hat{\mathcal{V}}(\gamma)\hat{\mathcal{V}}^t\left(\frac{1}{\gamma}\right) \quad (4.82)$$

Dos propiedades de la matriz de monodromía hace que sea más sencilla de manipular que  $\mathcal{V}$ :

**Proposición 4.6.** *La matriz de monodromía  $\mathcal{M}(w)$  cumple que*

1.  $\partial_{\pm}\mathcal{M} = 0$ , y por lo tanto es constante para cada solución.
2. El grupo de Geroch actúa de la siguiente manera:

$$g(w) \cdot \mathcal{M}(w) = g(w)\mathcal{M}(w)g(w)^t \quad (4.83)$$

*Demostración.* La demostración se puede encontrar en [6]. □

Además, una vez conocida la matriz de monodromía, el campo  $\mathcal{V}$  se calcula como solución del problema de factorización de Hilbert para el álgebra loop. A continuación, y a modo de tener una exposición completa, presentamos el teorema de factorización para la matriz de Monodromía. El lector puede encontrar los detalles en [18], [6] y citas de esos artículos.

**Teorema 4.7.** *Sea  $\mathcal{M}(w(x^-, x^+, \gamma))$  tal que es simétrica,  $SL(2, \mathbb{R})$ -valuada, diferenciable en  $w$  y que satisface la condición de Hölder de grado  $1/2$ . Entonces existen dos matrices  $U_-(x^-, x^+, \gamma)$  y  $U_+(x^-, x^+, \gamma)$  holomorfas en  $\gamma$  fuera y dentro del círculo unidad respectivamente, teniendo límites continuos en él, y satisfacen*

$$\mathcal{M}(w(x^-, x^+, \gamma)) = U_+(x^-, x^+, \gamma)U_-(x^-, x^+, \gamma) \quad (4.84)$$

*en el círculo unidad. Esta factorización es única una vez prescripto el valor  $U_-(x^-, x^+, \gamma = \infty)$ .*

En la factorización de la matriz de monodromía es donde radica la principal dificultad de la construcción de soluciones. Bajo ciertas hipótesis generales, el problema de factorización se reduce a un problema puramente algebraico; ver [34],[6], [24].

En [35] y [24] se pueden encontrar ejemplos de cómo se obtienen cantidades conservadas para el modelo de gravitación reducido a partir de matrices de monodromía, como la colisión de ondas gravitacionales planas o las soluciones de Schwarzschild y de Kerr. El proceso es análogo al explicado en para el modelo de espines de Heisenberg.

## 4.6. Extensión central a $\hat{\sigma}$

En [35], basado en [6], y en un contexto más general en [4], [3] y [22], se muestra cómo el álgebra de simetrías se debe extender una vez que incorporamos al factor conforme  $\hat{\sigma}$ . Esta extensión del álgebra es conocida como *extensión central*, en el sentido que los generadores que agregamos conmutan con todos los elementos del álgebra inicial.

Veamos esto más detenidamente. En [6] se estudia cómo varía el factor conforme bajo una variación en  $\widehat{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})}(w)$ :

**Proposición 4.8.** *Sea  $a$  un elemento de  $\widehat{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})}$ , que expresada en términos de un desarrollo en series de potencias de  $w$  se escribe como una combinación de matrices  $a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n w^n$ . Entonces su acción sobre  $\hat{\sigma}$*

$$a \cdot \hat{\sigma} = \frac{1}{2} \oint_{w=\infty} \text{Tr} \left( \frac{\partial \hat{\mathcal{V}}}{\partial w} \hat{\mathcal{V}}^{-1} a \right) dw + a \cdot \hat{\sigma}_0 \quad (4.85)$$

donde  $a \cdot \hat{\sigma}_0$  es una variación de  $\hat{\sigma}_0$ .

Ahora, calculemos el corchete entre dos variaciones.

**Proposición 4.9.** *Sean  $a^{(1)} = \sum_{n=1}^N a_n^{(1)} w^n$  y  $a^{(2)}(w) = \sum_{n=1}^N a_{-n}^{(2)} w^{-n}$ , para algún  $N > 1$ . Entonces*

$$\begin{aligned} [a^{(1)}, a^{(2)}] \hat{\sigma} &= \frac{1}{2} \oint_{w=\infty} \text{Tr} \left( \frac{\partial \hat{\mathcal{V}}}{\partial w} \hat{\mathcal{V}}^{-1} [a^{(1)}, a^{(2)}] \right) dw \\ &\quad + \frac{1}{2} \oint_{w=\infty} \text{Tr} \left( a^{(1)} \frac{\partial a^{(2)}}{\partial w} \right) dw \end{aligned} \quad (4.86)$$

**Observación 4.9.** El primer término es el esperable, pero el segundo término nos muestra una estructura algebraica que no estaba presente antes: un cociclo. Esta indica que se precisa una extensión central para poder incorporar al factor conforme dentro del modelo integrable. Ver el apéndice B para los detalles acerca de la definición de la extensión central, en particular la ecuación B.33.

Podemos definir una matriz de monodromía  $\hat{\mathcal{M}}(w)$  que extienda a la matriz de monodromía anterior, en el sentido que incluye al factor conforme.

**Definición 4.5.** La matriz de monodromía es

$$\hat{\mathcal{M}}(w) = (\mathcal{V}, e^{\hat{\sigma}}) \eta^\infty \left( (\mathcal{V}, e^{\hat{\sigma}})^{-1} \right) \quad (4.87)$$

donde ahora  $\eta^\infty$  es la extensión de la involución  $\eta^\infty$ , y el inverso se toma respecto al producto de la extensión central del grupo.

**Proposición 4.10.** *La matriz de monodromía extendida cumple*

1.  $\hat{\mathcal{M}}(w) = \left( \mathcal{M}(w), e^{2\hat{\sigma}+B(\hat{\mathcal{V}}, \hat{\mathcal{V}}^t)} \right)$ , donde  $B$  el cociclo en el grupo loop (ver el apéndice B de [6]).
2.  $\partial_\mu \hat{\mathcal{M}}(w) = 0$ , que implica que la matriz  $\hat{\mathcal{M}}$  es constante para cualquier solución.

*Demostración.* En [6]. □

La proposición anterior implica una ecuación para el factor conforme muy compacta:

$$\hat{\sigma} = -\frac{1}{2} \ln B(\hat{\mathcal{V}}, \hat{\mathcal{V}}^t) + \zeta \quad (4.88)$$

para  $\zeta$  alguna constante global.

#### 4.6.1. Sistema lineal para la extensión central

Podemos agregar un término central que extiende la conexión  $\hat{J}_\mu$ , y actúa sobre el par  $(\mathcal{V}, \hat{\sigma})$ , con la estructura de grupo extendido centralmente dada en el Apéndice B.

El sistema lineal para  $(\mathcal{V}, \hat{\sigma})$  está dado por la conexión

$$\hat{J}_\pm = Q_\mu + u^{\pm 1} P_\mu \mp \partial_\pm \hat{\sigma} \frac{k}{2} \quad (4.89)$$

donde  $\frac{k}{2}$  es el generador de la extensión central.

Observar que seguimos teniendo un parámetro espectral móvil y uno constante. En la sección siguiente veremos que podemos prescindir de tener un parámetro espectral móvil al precio de extender aún más nuestra álgebra sobre la que vive la conexión de curvatura cero.

### 4.7. Acerca del sistema lineal que incluye $\rho$

Como hemos visto en las secciones anteriores, hemos incluido en el formalismo de sistemas lineales auxiliares a los campos  $\sigma$  y  $\mathcal{V}$ , dando origen a una realización del grupo de Geroch como una extensión central de un grupo loop. Como se muestra en [22], [3] y en [4], también se puede incluir al campo  $\rho$  en la conexión.

Para poder incluir a  $\rho$ , se utiliza el producto semidirecto entre el álgebra de Kac-Moody  $A_1^1$  y el álgebra de Virasoro  $Vir$ , ver Apéndice B.

**Proposición 4.11.** *La condición de curvatura cero para la conexión  $(A_1^1 \rtimes Vir)$ -valuada*

$$A_\pm = \pm \rho^{-1} \partial_\pm \rho E_\pm + Q_\pm + u^\pm P_\pm \mp \partial_\pm \hat{\sigma} \frac{k}{2} \quad (4.90)$$

*implica las ecuaciones de movimiento para  $\rho, \sigma$  y  $\mathcal{V}$  calculadas en el capítulo 1.*

**Observación 4.10.** El parámetro espectral en la conexión  $A_\mu$  no depende de los puntos del espacio-tiempo, es decir, es un parámetro espectral fijo. Este tema es analizado en [22].

**Observación 4.11.** La desventaja de la formulación anterior es que la estructura de sistema integrable descansa sobre el grupo asociado al álgebra  $A_1^1 \rtimes Vir$ , cuya complejidad hace que un intento de cuantización directo sea altamente no trivial. Como veremos en el capítulo siguiente, podemos construir una matriz de Monodromía extendida que contiene parte de este grupo, y que sin embargo su estructura simpléctica presenta propiedades que hacen posible su cuantización más o menos directamente.

# Doble clásico y extensión central

## 5.1. Objetivos

En este capítulo mostraremos nuestro resultado principal: la simplificación del álgebra de Poisson de los datos iniciales calculada en el capítulo 3.

Para eso, debemos hacer un cambio de variables, pasando de la zweibein  $\mathcal{V}$  a la matriz de monodromía  $\mathcal{M}$ . Una vez que expresemos los corchetes en términos de  $\mathcal{M}$ ,  $\rho_0$  y  $\hat{\sigma}_0$  el siguiente paso será expresarlos de una manera unificada: definiremos una matriz de monodromía extendida, y calcularemos los corchetes de Poisson entre sus elementos de matriz. La estructura algebraica de los nuevos corchetes es una biálgebra de Lie, estructura que se puede apreciar en el sector loop de la teoría antes de incorporar  $\rho_0$  y  $\hat{\sigma}_0$ .

El camino para la simplificación de los corchetes consiste en varios pasos intermedios: primero, definiremos  $\hat{\mathcal{V}}$  sobre  $\mathcal{N}$ . Luego, presentaremos el resultado de los corchetes entre los  $\hat{\mathcal{V}}$ , que nos llevará al corchete entre los  $\mathcal{M}$ . Este es el principal resultado de [19] y [18]. Estos corchetes son equivalentes a los obtenidos en [28], a partir de una formulación canónica en términos de datos iniciales espaciales en espacio-tiempos asintóticamente planos.

Luego de presentar los resultados previos, entraremos en el trabajo central y nuevo de la presente tesis:

- El cálculo de los corchetes entre  $\hat{\sigma}_0$  y  $\hat{\mathcal{V}}$ , que nos permitirán obtener los corchetes entre  $\hat{\sigma}_0$  y  $\mathcal{M}$ . El corchete entre  $\rho_0$  y  $\mathcal{M}$  es nulo, resultado que es esperable debido a que el corchete entre  $\mathcal{V}$  y  $\rho_0$  es nulo.
- Siguiendo ideas de [6] y [35], definiremos una matriz de monodromía extendida  $\tilde{\mathcal{M}}$ , de manera que incluye a  $\hat{\sigma}_0$  y  $\rho_0$ , y escribiremos los corchetes obtenidos en el capítulo 3 en una sola expresión para  $\left\{ \tilde{\mathcal{M}}^1(v), \tilde{\mathcal{M}}^2(w) \right\}$ , que es sencilla, unificada y ya conocida.
- Por último, nos encontraremos con el grupo de Geroch dos veces: probaremos de manera explícita que la acción del grupo de Geroch es Lie-Poisson sobre el sistema restringido a  $\mathcal{M}$  y sobre las  $\tilde{\mathcal{M}}$ .

Los tres resultados nos conducen a una estructura de biálgebra de Lie en el espacio de los datos iniciales sobre  $\mathcal{N}$ , dejándonos en la puerta hacia la cuantización de los mismos.

## 5.2. Definición de $\hat{\mathcal{V}}$ sobre $\mathcal{N}$

Consideremos nuevamente las cartas  $x^\pm$  e  $y^\pm$  sobre la variedad  $M$ . Recordar que son coordenadas lumínicas particulares, tomadas de forma que son  $\rho^\pm + c$ , siendo  $c$  la misma constante para  $+$  y  $-$ . Primero, recordar que las funciones  $\rho^\pm$  están definidas a partir de  $\rho$  a menos de una constante aditiva, pues la diferencia es  $\rho$ :

$$\rho = \frac{1}{2}(\rho^+ - \rho^-) \quad (5.1)$$

Las coordenadas  $x^\pm$  e  $y^\pm$  las tomamos variando esa libertad en la constante, de manera de ser solidarias a variaciones que dejen las hojas nulas fijas, y los valores de  $\rho$  fijos en los extremos de ellas:

$$x^\pm = \rho^\pm - \rho^-(S_0), \quad y^\pm = \rho^\pm - \rho^+(S_0) \quad (5.2)$$

donde la constante es distinta para ambas cartas. En este capítulo, definimos la carta  $a^\pm$  como un promedio de las cartas  $x^\pm$  e  $y^\pm$ :

$$a^\pm := \rho^\pm - \tilde{\rho}_0 \quad (5.3)$$

y seguimos teniendo la igualdad  $\rho = \frac{1}{2}(a^+ - a^-)$ .

La razón de definir esta nueva carta está contenida en la definición del parámetro de deformación  $u$ : cuando resolvemos la ecuación diferencial 4.58 con respecto a las coordenadas  $y$  obtenemos

$$u := \sqrt{\frac{w + y^+}{w + y^-}} \quad (5.4)$$

que llamaremos  $u_y$ . Por otro lado, en las coordenadas  $a^\pm$ , la solución es  $u_a := \sqrt{\frac{w+a^+}{w+a^-}}$ , que está relacionada con  $u_y$  mediante un shift en el argumento:

$$u_a = \sqrt{\frac{w + a^+}{w + a^-}} = \sqrt{\frac{w + \rho_0 + y^+}{w + \rho_0 + y^-}} = u_y(w + \rho_0) \quad (5.5)$$

## 5.3. Definición y variaciones de $\hat{\mathcal{V}}$ en la rama izquierda

En esta sección nos centraremos en la rama izquierda. Con las coordenadas  $a^\pm$  anteriormente definidas, tenemos que  $\rho^+ = a^+ + \tilde{\rho}_0$ ,  $\rho^- = a^- + \tilde{\rho}_0$ . La conexión deformada  $\hat{J}$  es

$$\hat{J}_- = Q_- + u_a P_- \quad (5.6)$$

Para  $a^- = -(w + \rho_0)$ , tenemos la divergencia integrable que hemos comentado en el capítulo 4.

Una vez que tenemos la conexión deformada definida en la rama izquierda, es natural definir  $\hat{\mathcal{V}}(p)$  como el transporte paralelo de  $\mathcal{V}$  en un punto de referencia mediante las matrices de transporte asociadas a la conexión deformada. Si el valor de referencia es  $\mathcal{V}$  en el eje, que notaremos  $\mathcal{V}(0)$ , y si

$$T(p, q) := \mathcal{P}e^{\int_p^q \hat{J}} \quad (5.7)$$

son las matrices de transporte entre puntos  $p$  y  $q$  de  $\mathcal{N}_L$ , entonces

$$\hat{\mathcal{V}}(p) := \mathcal{V}(0)T(0, p) \quad (5.8)$$

Siguiendo [19], definimos a  $\hat{\mathcal{V}}$  como sigue: tomamos como valores de referencia las valuaciones de  $\mathcal{V}$  sobre  $\mathcal{N}_L$ . Transportamos estos valores al eje con la conexión  $J$ , no deformada, y luego volvemos al punto de partida transportando paralelamente con la conexión deformada. De esta manera, definimos  $\hat{\mathcal{V}}$  para un valor de  $y^-$ , sobre  $\mathcal{N}_L$ , como

$$\hat{\mathcal{V}}(y^-) := \mathcal{V}(y^-) \mathcal{P}e^{\int_{y^-}^0 J} \mathcal{P}e^{\int_0^{y^-} \hat{J}_y} \quad (5.9)$$

donde  $\hat{J}_y$  indica que deformamos según el parámetro  $u_y$ .

Manipulando algebraicamente la expresión 5.9, en [19] se muestra que esa ecuación es equivalente a la siguiente ecuación

$$\hat{\mathcal{V}}(y^-) = \mathcal{P}e^{\int_0^{y^-} (u_y - 1) \mathcal{V} P \mathcal{V}^{-1}} \mathcal{V}(y^-) \quad (5.10)$$

**Observación 5.1.** 1. La ventaja de la expresión 5.10 sobre la expresión 5.9 es que está bien definida aunque  $\mathcal{V}$  sea singular en la línea de mundo del eje de simetría. Trabajaremos admitiendo variaciones singulares de los  $\mathcal{V}$ , y al variar 5.10 estamos considerando tales variaciones (ver [19]).

2. Recordar que los datos iniciales son  $\mathcal{V}$  sobre la doble hoja nula  $\mathcal{N}$ . Con esta definición establecemos una correspondencia uno a uno entre los datos  $\hat{\mathcal{V}}$  y  $\mathcal{M}$ , módulo gauge. Ver [18] para más detalles.

Calcularemos variaciones de  $\hat{\mathcal{V}}$ , con la posibilidad que las funciones  $\rho^-$  cambien: recordar que nuestro objetivo en última instancia es calcular la variación de  $\hat{\mathcal{V}}$  bajo  $\{\hat{\sigma}_0, \cdot\}$ , así que debemos permitir que haya variaciones en  $\rho^\pm$ , ya que  $\{\cdot, \hat{\sigma}_0\}$  actúa de manera no trivial en  $\rho_0$ . Como el cálculo de los corchetes es para  $y^\pm$  fijo, introducimos la variación en  $\rho^-$  mediante la constante aditiva  $\rho_0$ . De esta manera estamos tratando ambas ramas de manera simétrica, pues se defina la carta  $a^\pm$  como el promedio de las  $x^\pm$  e  $y^\pm$ .

Para simplificar un poco la notación, llamemos  $S(a, b) := \mathcal{P}e^{\int_a^b (u-1) \mathcal{V} P \mathcal{V}^{-1} dz}$ .

Como primer paso hacia los corchetes de  $\mathcal{M}(v)$  con  $\hat{\sigma}_0$ , usaremos la siguiente fórmula de [19] para las variaciones de  $\hat{\mathcal{V}}$ :

**Proposición 5.1.** *Una variación admisible de  $\hat{\mathcal{V}}$  es igual a*

$$\mathcal{V}^{-1}\delta[\hat{\mathcal{V}}(y^-)] = [\mathcal{V}^{-1}\delta\mathcal{V}]_{\mathfrak{g}} + 2 \int_0^{y^-} T(y^-, \cdot) \frac{u}{w} \sqrt{\rho} D(\sqrt{\rho}[\mathcal{V}^{-1}\delta\mathcal{V}]_{\mathfrak{t}}) T(\cdot, y^-) \quad (5.11)$$

donde  $X_{\mathfrak{g}} = X_{\mathfrak{q}} + u^{-1}X_{\mathfrak{t}}$ .

## 5.4. Corchete de $\hat{\sigma}_0$ con $\mathcal{M}$

Calcularemos el corchete entre  $\hat{\sigma}_0$  y  $\mathcal{M}(w)$  para  $0 < w < 2\rho_0$ , que corresponde a un punto de deformación en el interior de  $\mathcal{N}_L$ .

Como vimos, la involución  $\eta^\infty$  deja la conexión  $\hat{J}$  invariante, pues  $\gamma \mapsto \frac{1}{\gamma}$  es una de las simetrías.

**Proposición 5.2** (Breitenlohner y Maison, [6]). *La libertad en la definición de  $\mathcal{M}$  dada por*

$$\mathcal{M}(w) \mapsto S(w)\mathcal{M}(w)\eta(S^{-1}(w)) \quad (5.12)$$

*se puede eliminar tomando  $\mathcal{V}(\gamma)$  como holomorfa en un dominio que contenga el disco unidad abierto.*

**Observación 5.2.** La independencia en las coordenadas del espacio-tiempo reducido hace en particular que  $\mathcal{M}(w)$  no tiene información alguna acerca del branch cut en el plano  $w$ .

Nuevamente, tenemos

$$\mathcal{M}(w) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \hat{\mathcal{V}}(x, \gamma(w + i\epsilon)) \mathcal{V}^t \left( x, \frac{1}{\gamma(w + i\epsilon)} \right) \quad (5.13)$$

y esto a su vez es

$$\mathcal{M}(w) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \hat{\mathcal{V}}(x, \gamma(w + i\epsilon)) \mathcal{V}^t(x, \gamma(w - i\epsilon)) \quad (5.14)$$

donde estamos asumiendo que  $w$  está sobre el branch cut (para que valga la igualdad). Para simplificar la notación, sea

$$\mathcal{U}_y(w) = \hat{\mathcal{V}}_y(w; y^- = -w) \quad (5.15)$$

es decir, la valuación de  $\hat{\mathcal{V}}_y$  en el punto de deformación. El subíndice  $y$  indica que deformamos según el parámetro  $u_y$ . De esta forma, tenemos

$$\mathcal{M}_y(v) = \mathcal{U}_y(v) \mathcal{U}_y^t(v) \quad (5.16)$$

Observar que si usamos las coordenadas  $a^\pm$ , debemos deformar por  $u_a$  y según 5.5 tenemos

$$\mathcal{M}_a(w) = \mathcal{M}_y(w + \rho_0) \quad (5.17)$$

Primero, calcularemos el corchete de  $s$  con  $\mathcal{U}_y$ . Para eso, usamos la ecuación 5.11:

$$\mathcal{U}_y^{\hat{-1}} \delta[\hat{\mathcal{U}}_y(y^-)] = 2 \int_0^{-w} T(-w, \cdot) \frac{u}{w} \sqrt{\rho} D(\sqrt{\rho} [\mathcal{V}^{-1} \delta \mathcal{V}]_{\mathfrak{k}}) T(\cdot, -w) \quad (5.18)$$

donde usamos que  $[\mathcal{V}^{-1} \delta \mathcal{V}]_{\mathfrak{k}} = \frac{1}{u} \mathcal{V}^{-1} \delta \mathcal{V}_{\mathfrak{k}} = 0$  cuando  $y^- = -w$ .

Entonces, por 3.30 :

$$\left[ \mathcal{U}_y^{\hat{-1}} \left\{ \hat{\sigma}_0, \hat{\mathcal{U}}_y \right\} \right]_{\mathfrak{k}} = -4\rho_0 \text{Tr} \left[ P_+ \int_0^{-w} T(-w, \cdot) \frac{u}{w} \sqrt{\rho} D(\sqrt{\rho} \hat{A}_{\mathfrak{k}\mathfrak{k}}^2(S_0, \cdot)) T(\cdot, -w) \right] \quad (5.19)$$

Esta última integral es cero, pues  $D(\sqrt{\rho} \hat{A}_{\mathfrak{k}\mathfrak{k}}^2(S_0, z))$  es proporcional a  $\delta(S_0 - z)$ , que está fuera del intervalo de integración, pues estamos bajo la condición  $y^- = -w > y_0^- = -2\rho_0$ . Entonces,

$$\left[ \mathcal{U}_y^{\hat{-1}} \left\{ \hat{\sigma}_0, \hat{\mathcal{U}}_y \right\} \right]_{\mathfrak{k}} = 0 \quad (5.20)$$

Luego,

$$\{\hat{\sigma}_0, \mathcal{M}_y(w)\} = 0, \quad w \in (0, 2\rho_0) \quad (5.21)$$

Entonces,

$$\{\hat{\sigma}_0, \mathcal{M}_a(w)\} = \{\hat{\sigma}_0, \mathcal{M}_y(w + \rho_0)\} \quad (5.22)$$

$$= \{\hat{\sigma}_0, \rho_0\} \partial_w \mathcal{M}_y(w + \rho_0) \quad (5.23)$$

$$= \frac{1}{2\kappa} \partial_w \mathcal{M}_a(w) \quad (5.24)$$

A partir de ahora nos olvidaremos del subíndice  $a$  en la matriz de monodromía. Llegamos así a uno de los resultados centrales de este trabajo:

$$\boxed{\{\hat{\sigma}_0, \mathcal{M}(w)\} = \frac{1}{2\kappa} \partial_w \mathcal{M}(w)} \quad (5.25)$$

## 5.5. Estructura Lie-Poisson en el sector loop

Como primer paso para mostrar explícitamente la estructura Lie-Poisson de los corchetes de Poisson completos de nuestro modelo, primero mostraremos que el corchete en el sector loop tiene estructura de biálgebra de Lie. Para esto, necesitamos los corchetes de Poisson entre las matrices de monodromía  $\mathcal{M}(v)$ . En [19] se calculan los corchetes de Poisson para las matrices  $\hat{\mathcal{V}}$  primero, para luego calcular el corchete entre las matrices  $\mathcal{M}$ .

El cálculo de [19] es técnico, aquí sólo presentamos el resultado final:

$$\boxed{\left\{ \overset{1}{\mathcal{M}}(u), \overset{2}{\mathcal{M}}(v) \right\} = \frac{1}{2\kappa} p.v. \left[ \frac{1}{u-v} \right] \left( \overset{1}{\Omega} \overset{1}{\mathcal{M}}(u) \overset{2}{\mathcal{M}}(v) + \overset{1}{\mathcal{M}}(u)^t \overset{2}{\Omega} \overset{2}{\mathcal{M}}(v) + \overset{2}{\mathcal{M}}(v) \overset{2}{\Omega}^t \overset{1}{\mathcal{M}}(u) + \overset{1}{\mathcal{M}}(u) \overset{2}{\mathcal{M}}(v)^t \overset{2}{\Omega}^t \right)} \quad (5.26)$$

donde hacemos uso de la notación tensorial 3.1 y  $\Omega$  denota el elemento de Casimir de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ :  $\Omega = \frac{1}{2}(\sigma_x^1 \sigma_x^2 + i\sigma_y^1 i\sigma_y^2 + \sigma_z^1 \sigma_z^2)$  (ver Apéndice B para una definición del elemento de Casimir). Sobre las trasposiciones en  $\Omega$ , las definimos como:

$${}^t\Omega = \text{trasposición en el espacio 1} \quad (5.27)$$

$$\Omega^t = \text{trasposición en el espacio 2} \quad (5.28)$$

$${}^t\Omega^t = \text{trasposición en ambos espacios} \quad (5.29)$$

Finalmente,  $p.v. \left[ \frac{1}{u-v} \right]$  indica la distribución *valor principal de Cauchy* de  $\frac{1}{u-v}$ , definida por

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u, v) p.v. \left[ \frac{1}{u-v} \right] dudv = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|u-v| > \epsilon} f(u, v) p.v. \left[ \frac{1}{u-v} \right] dudv \quad (5.30)$$

### 5.5.1. Acción Lie-Poisson del Grupo de Geroch sobre $\mathcal{M}(w)$

En esta subsección, mostraremos el corchete de Poisson para el sector loop del grupo de Geroch que lo convierte en un grupo de Poisson-Lie (Ver Apéndice C), haciendo explícita la acción Lie-Poisson de este grupo. Este resultado había sido mostrado por Korotkin y Samtleben en [30], a partir de los corchetes que ellos calcularon para la zweibein  $\mathcal{V}$ , en el problema análogo de colisión de ondas gravitacionales planas (dilatón temporal). En nuestro caso, el cálculo es general, no invocamos ningún comportamiento asintótico ni hipótesis extra en la métrica.

Notemos  $M$  al espacio de fase y  $G$  a un grupo que actúa en  $M$  bajo la acción  $\cdot : G \times M \rightarrow M$ . Sea  $f \in C^\infty(M)$  y  $g$  el mapa  $g(\gamma) = \gamma$  en  $G$  (no es más que el mapa identidad, que lo notamos de esta manera para tener así una *función* sobre  $G$ , y que tenga sentido la definición de los corchetes). Un elemento  $\gamma \in G$  actúa en las funciones  $f$  bajo una acción definida como:

$$\gamma \cdot f(x) := f(\gamma \cdot x) \quad (5.31)$$

Entonces:

$$g \cdot f(\gamma, x) := (g(\gamma) \cdot f)(x) = f(g(\gamma) \cdot x) = f(\gamma \cdot x) \quad (5.32)$$

Con las definiciones anteriores, estamos en condiciones de definir una acción Lie-Poisson. Diremos que  $\cdot : G \times M \rightarrow M$  es una acción Lie-Poisson si preserva el corchete de Poisson, en el sentido que

$$\{g \cdot f_1, g \cdot f_2\}_{G \times M} = g \cdot \{f_1, f_2\}_M \quad (5.33)$$

como funciones de  $G \times M$ . En términos más explícitos, la ecuación anterior es

$$\{g \cdot f_1(\cdot, x), g \cdot f_2(\cdot, x)\}_G(\gamma) + \{g \cdot f_1(\gamma, \cdot), g \cdot f_2(\gamma, \cdot)\}_M(x) = \{f_1, f_2\}_M(g(\gamma) \cdot x) \quad (5.34)$$

donde en el miembro izquierdo tenemos el primer corchete calculado sobre  $G$ , fijando  $x$ , y el segundo corchete calculado en  $M$ , fijando  $g$ . Ambos son funciones en  $G \times M$ .

En lo que sigue, notaremos  $G$  para referirnos al grupo de Geroch y  $\mathcal{F}_M$  para referirnos al espacio de fase de los datos  $\mathcal{M}(w)$ , es decir,  $\mathcal{F}_M$  es el cociente del espacio de fase completo por las dimensiones parametrizadas por  $\rho_0$  y  $\hat{\sigma}_0$ .

Antes de pasar al resultado central de la sección, recordamos que la acción de un elemento  $\gamma$  del grupo de Geroch sobre las funciones  $\mathcal{M}(w)$  de  $\mathcal{F}_M$  está dada por

$$[\gamma \cdot M](w)(x) = M(w)(\gamma(w) \cdot x) = \gamma(w)M(w)\gamma^t(w) \quad (5.35)$$

donde remitimos al lector a la ecuación 4.83. De esta manera,

$$[g \cdot \mathcal{M}](w)(\gamma, x) = [g\mathcal{M}g^t](w)(\gamma, x) \quad (5.36)$$

**Proposición 5.3.** *La acción del grupo de Geroch sobre  $\mathcal{F}_M$  es Lie-Poisson si y sólo si el corchete sobre  $G$  es*

$$\left\{ \overset{1}{g}(v), \overset{2}{g}(w) \right\}_G = \frac{1}{2\kappa} p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \left[ \Omega, \overset{1}{g}(v)\overset{2}{g}(w) \right] \quad (5.37)$$

*Demostración.* La idea es probar 5.34 para el caso de la acción 4.83, i.e., que si y sólo si el corchete de Poisson sobre el grupo de Geroch es 5.37 entonces

$$\left\{ \overset{1}{g}\overset{1}{\mathcal{M}}\overset{1^t}{g}, \overset{2}{g}\overset{2}{\mathcal{M}}\overset{2^t}{g} \right\}_{G \times \mathcal{F}_M}(\gamma, x) = \left\{ \overset{1}{\mathcal{M}}, \overset{2}{\mathcal{M}} \right\}_{\mathcal{F}_M}(\gamma \cdot x) \quad (5.38)$$

donde para no sobrecargar la notación, omitiremos los argumentos  $v$  y  $w$ , recordando que  $v$  es el parámetro espectral correspondiente al primer espacio del producto tensorial, y  $w$  al segundo.

El lado izquierdo de la ecuación anterior es

$$\begin{aligned} \left\{ \overset{1}{g}\overset{1}{\mathcal{M}}\overset{1^t}{g}, \overset{2}{g}\overset{2}{\mathcal{M}}\overset{2^t}{g} \right\}_{G \times \mathcal{F}_M} &= \overset{12}{g\overset{1}{g}} \left\{ \overset{1}{\mathcal{M}}, \overset{2}{\mathcal{M}} \right\}_{\mathcal{F}_M} \overset{1^t 2^t}{g\overset{1}{g}} + \left\{ \overset{1}{g}, \overset{2}{g} \right\}_G \overset{1}{\mathcal{M}}\overset{1^t}{g} \overset{2}{\mathcal{M}}\overset{2^t}{g} \\ &\quad \overset{2}{\mathcal{M}} \left\{ \overset{1}{g}, \overset{2^t}{g} \right\}_G \overset{1}{\mathcal{M}}\overset{1^t}{g} + \overset{1}{g}\overset{1}{\mathcal{M}} \left\{ \overset{1^t}{g}, \overset{2}{g} \right\}_G \overset{2}{\mathcal{M}}\overset{2^t}{g} \\ &\quad \overset{1}{g}\overset{1}{\mathcal{M}}\overset{2}{\mathcal{M}} \left\{ \overset{1^t}{g}, \overset{2^t}{g} \right\}_G \end{aligned} \quad (5.39)$$

Llamando  $\mathcal{Y} = \left\{ \overset{1}{g}, \overset{2}{g} \right\}_G g^{-1}g^{-1}$ , la ecuación anterior es

$$\begin{aligned} \left\{ \overset{1}{g}\overset{1}{\mathcal{M}}\overset{1^t}{g}, \overset{2}{g}\overset{2}{\mathcal{M}}\overset{2^t}{g} \right\}_{G \times \mathcal{F}_M} &= \overset{12}{g\overset{1}{g}} \left\{ \overset{1}{\mathcal{M}}, \overset{2}{\mathcal{M}} \right\}_{\mathcal{F}_M} \overset{1^t 2^t}{g\overset{1}{g}} + \mathcal{Y}(g \cdot \overset{1}{\mathcal{M}})(g \cdot \overset{2}{\mathcal{M}}) \\ &\quad + (g \cdot \overset{2}{\mathcal{M}})(\mathcal{Y}^t)(g \cdot \overset{1}{\mathcal{M}}) + (g \cdot \overset{1}{\mathcal{M}})({}^t\mathcal{Y})(g \cdot \overset{2}{\mathcal{M}}) \\ &\quad + (g \cdot \overset{1}{\mathcal{M}})(g \cdot \overset{2}{\mathcal{M}})({}^t\mathcal{Y}^t) \end{aligned} \quad (5.40)$$

y mediante la ecuación 5.26

$$\left\{ {}^1g\mathcal{M}^1g, {}^2g\mathcal{M}^2g \right\}_{G \times \mathcal{F}_M} = {}^{12}g\frac{1}{2\kappa}p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \left( \Omega^1\mathcal{M}^2 + \mathcal{M}^1\Omega^2 + \mathcal{M}^2\Omega^1 + \mathcal{M}^1\mathcal{M}^2\Omega^t \right) {}^1g^t {}^2g^t$$

$$+ \mathcal{Y}(g \cdot \mathcal{M})(g \cdot \mathcal{M}) + (g \cdot \mathcal{M})(\mathcal{Y}^t)(g \cdot \mathcal{M})$$

$$+ (g \cdot \mathcal{M})({}^t\mathcal{Y})(g \cdot \mathcal{M}) + (g \cdot \mathcal{M})(g \cdot \mathcal{M})({}^t\mathcal{Y}^t) \quad (5.41)$$

$$= \left( \frac{1}{2\kappa}p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] {}^{12}g\Omega g^{-1}g^{-1} + \mathcal{Y} \right) (g \cdot \mathcal{M})(g \cdot \mathcal{M}) +$$

$$+ \text{trasposiciones} \quad (5.42)$$

Por tanto, para que se cumpla la igualdad 5.34, es necesario y suficiente que

$${}^{12}sym \left[ \left( \frac{1}{2\kappa}p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] {}^{12}g\Omega g^{-1}g^{-1} + \mathcal{Y} \right) AB \right] = {}^{12}sym \left[ \frac{1}{2\kappa}p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \Omega AB \right] \quad \forall A, B \text{ simétricos} \quad (5.43)$$

donde  ${}^{12}sym(X) = X + X^t + {}^tX + {}^tX^t$ . Para resolver esta ecuación, recordamos el siguiente resultado de álgebra lineal:

**Lemma 5.4.** *Si  $Z : V \rightarrow V$  es un operador lineal sobre el espacio vectorial  $V$ , tal que  $ZM + MZ^t = 0$  para todo operador simétrico  $M$ , entonces  $Z = 0$ .*

La demostración es directa:  $ZM + MZ^t = 0$ , en particular para  $M = Id$ , así que  $Z = -Z^t$ . Por tanto,  $Z$  es antisimétrico, y entonces cumple  $[Z, M] = 0$  para todo  $M$  operador simétrico. De esta forma, todo vector de  $V$  es autovector de  $Z$ , es decir,  $Z = cId$ . Por ser antisimétrico, resulta  $c = 0$ .

Generalizando directamente el lema anterior a un operador sobre un producto tensorial de espacios vectoriales, y aplicándolo en la ecuación 5.43 a

$${}^{12}Z = \left( \frac{1}{2\kappa}p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] {}^{12}g\Omega g^{-1}g^{-1} + \mathcal{Y} - \frac{1}{2\kappa}p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \Omega \right) \quad (5.44)$$

deducimos que es necesario y suficiente que  ${}^{12}Z = 0$ , esto es

$$\left\{ {}^1g, {}^2g \right\}_G g^{-1}g^{-1} = \mathcal{Y} = \frac{1}{2\kappa}p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \Omega - \frac{1}{2\kappa}p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] {}^{12}g\Omega g^{-1}g^{-1} \quad (5.45)$$

de donde se deduce

$$\left\{ {}^1g, {}^2g \right\}_G = \frac{1}{2\kappa}p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \left( \Omega g g - g g \Omega \right) \quad (5.46)$$

□

**Observación 5.3.** La matriz  $p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \Omega$  es la matriz  $r$  para el grupo de Poisson-Lie en cuestión:  $\widehat{SL}(2, \mathbb{R})$  (ver sección 4.2.1, y Apéndice C). Observar que la unicidad de  $r$  es a menos de un múltiplo de  $\delta(v-w)\Omega$ :

$$\begin{aligned} \left[ \delta(v-w)\Omega, \overset{1}{g}(v)\overset{2}{g}(w) \right] &= \left[ \Omega, \overset{1}{g}(v)\overset{2}{g}(v) \right] \delta(v-w) \\ &= \left( \Omega - \overset{1}{g}(v)\overset{2}{g}(v)\Omega\overset{1}{g}^{-1}(v)\overset{2}{g}^{-1}(v) \right) \overset{1}{g}(v)\overset{2}{g}(v)\delta(v-w) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.47}$$

pues  $\Omega$  es invariante bajo la acción adjunta  $Ad$  simultánea en los dos índices.

Para establecer explícitamente la estructura de grupo de Poisson-Lie, podemos escribir el corchete en términos de matrices  $r^\pm$ . La identidad para el valor principal de Cauchy

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = p.v. \left[ \frac{1}{x} \right] \mp i\pi\delta(x) \tag{5.48}$$

sugiere una definición de  $r^\pm$  que resulta la correcta:

**Definición 5.1.** Sean  $r^+$  y  $r^-$  los operadores definidos mediante

$$r^+ = \frac{1}{2\kappa} \frac{\Omega}{u - v + i\epsilon} \tag{5.49}$$

$$r^- = \frac{1}{2\kappa} \frac{\Omega}{u - v - i\epsilon} \tag{5.50}$$

En vista de la observación anterior, el corchete puede ser escrito en términos de cualquiera de las matrices  $r^\pm$ :

$$\left\{ \overset{1}{g}, \overset{2}{g} \right\}_G = \left[ r^\pm, \overset{1}{g}, \overset{2}{g} \right] \tag{5.51}$$

y cualquiera de los signos da el mismo resultado: este es el corchete de Sklyanin para  $\widehat{SL}(2, \mathbb{R})$  que anunciamos en la introducción, ver Apéndice C para la definición.

**Observación 5.4.** Las matrices  $r^\pm$  cumplen con las propiedades de la proposición 4.2.

Observar que la matriz  $r$  que obtuvimos en la proposición anterior para el grupo de Geroch es análoga a la matriz  $r$  para la holonomía de la cadena de espines de Heisenberg. La diferencia es que cambia el grupo sobre el que tomamos el álgebra:  $SU(2)$  para la cadena de espines de Heisenberg, y  $SL(2, \mathbb{R})$  en nuestro caso.

### 5.5.2. Doble clásico para el sector loop

En esta sección haremos explícita la estructura de doble clásico del sector loop del modelo de gravitación con simetría cilíndrica.

En la subsección anterior obtuvimos la matriz  $r$  asociada al Grupo de Geroch y su relación con el corchete de Sklyanin, 5.37. Como se muestra en el Apéndice C, una vez que el grupo está munido de una matriz  $r$ , tiene asociada la estructura de doble clásico.

Sea  $G$  el grupo de Geroch, que es el grupo loop  $\widehat{SL}(2, \mathbb{R})$ . Llamaremos  $G^*$  al dual que proviene de la factorización dada por las matrices  $r^\pm$ . El corchete de Poisson en el dual, de manera que la acción dressing (ver Apéndice C) de  $G^*$  en  $G$  sea Lie-Poisson es el corchete de Semenov-Tian-Shansky, C.44. De esta manera, ahora que tenemos la matriz  $r$ , tenemos una factorización en  $G$  y un corchete sobre  $G^*$ .

El punto de partida es observar que la ecuación 5.26 es en forma parecida a C.44. La manera de comprobar esto es tomar el corchete de Semenov-Tian-Shansky C.45 y multiplicar por derecha  $\sigma_y^1 \sigma_y^2$  y definir  $\bar{g}_+ := g_+ \sigma_y$ ,  $\bar{g}_- := g_-$ ; así, C.44 tendrá la misma forma que el corchete para las  $\mathcal{M}$ .

Sin embargo, no es en absoluto obvio cómo interpretar de manera precisa esta observación. Para eso, mostraremos que podemos definir un objeto dentro del doble clásico asociado  $\widehat{SL}(2, \mathbb{R})$  y la matriz  $r$  que hallamos antes, que tiene los mismos corchetes que  $\mathcal{M}$ .

**Definición 5.2.** Dados un elemento  $g = g_-^{-1} g_+$ , en el grupo dual  $G^*$ , sea  $\mathcal{A} := g_+ \sigma_y g_-^t$ .

**Proposición 5.5.** *El corchete de Poisson para  $\mathcal{A}$  es igual a 5.26:*

$$\left\{ \overset{1}{\mathcal{A}}(v), \overset{2}{\mathcal{A}}(w) \right\} = \frac{1}{2\kappa} p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \left( \Omega \overset{1}{\mathcal{A}}(v) \overset{2}{\mathcal{A}}(w) + \overset{1}{\mathcal{A}}(v)^t \Omega \overset{2}{\mathcal{A}}(w) + \overset{2}{\mathcal{A}}(w) \Omega^t \overset{1}{\mathcal{A}}(v) + \overset{1}{\mathcal{A}}(v) \overset{2}{\mathcal{A}}(w)^t \Omega^t \right) \quad (5.52)$$

*Demostración.* Comenzamos por definir  $\bar{g}_+ := g_+ \sigma_y$ ,  $\bar{g}_- := g_-$  (aquí  $\bar{\cdot}$  no es el complejo conjugado). De esta manera, recordando que el elemento de Casimir es invariante bajo conjugación simultánea en ambos espacios, los corchetes de la ecuación C.45 permanecen iguales para las mismas componentes:

$$2\kappa \left\{ \overset{1}{\bar{g}}_\pm(v), \overset{2}{\bar{g}}_\pm(w) \right\} = \left[ p.v. \left[ \frac{\Omega}{v-w} \right], \overset{1}{\bar{g}}_\pm(v) \overset{2}{\bar{g}}_\pm(w) \right] \quad (5.53)$$

y los corchetes para las componentes cruzadas resultan

$$2\kappa \left\{ \overset{1}{\bar{g}}_\pm(v), \overset{2}{\bar{g}}_\mp(w) \right\} = p.v. \left[ \frac{\Omega}{v-w} \right] \overset{1}{\bar{g}}_\pm(v) \overset{2}{\bar{g}}_\mp(w) - \overset{1}{\bar{g}}_\pm(v) \overset{2}{\bar{g}}_\mp(w) p.v. \left[ \frac{\Omega^\eta}{v-w} \right] \quad (5.54)$$

Pasamos a calcular el corchete entre los  $\mathcal{A}$ :

$$\begin{aligned}
 \left\{ \overset{1}{\mathcal{A}}(u), \overset{2}{\mathcal{A}}(v) \right\} &= \left\{ \overset{1}{\bar{g}}_+(v), \overset{2}{\bar{g}}_+(w) \right\} \overset{1}{\bar{g}}_-^t(v) \overset{2}{\bar{g}}_-^t(w) + \overset{2}{\bar{g}}_+(w) \left\{ \overset{1}{\bar{g}}_+(v), \overset{2}{\bar{g}}_-^t(w) \right\} \overset{1}{\bar{g}}_-^t(v) + \\
 &+ \overset{1}{\bar{g}}_+(v) \left\{ \overset{1}{\bar{g}}_-^t(v), \overset{2}{\bar{g}}_+(w) \right\} \overset{2}{\bar{g}}_-^t(w) + \\
 &+ \overset{1}{\bar{g}}_+(v) \overset{2}{\bar{g}}_+(w) \left\{ \overset{1}{\bar{g}}_-^t(v), \overset{2}{\bar{g}}_-^t(w) \right\} \tag{5.55}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\kappa} p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \left( \Omega \overset{1}{\mathcal{A}}(v) \overset{2}{\mathcal{A}}(w) - \overset{1}{\bar{g}}_+(v) \overset{2}{\bar{g}}_+(w) \Omega \overset{1}{\bar{g}}_-^t(v) \overset{2}{\bar{g}}_-^t(w) \right) \\
 &\frac{1}{2\kappa} p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \left( \overset{1}{\mathcal{A}}(v) {}^t\Omega \overset{2}{\mathcal{A}}(w) - \overset{1}{\bar{g}}_+(v) \overset{2}{\bar{g}}_+(w) {}^t\Omega \overset{1}{\bar{g}}_-^t(v) \overset{2}{\bar{g}}_-^t(w) \right) \\
 &\frac{1}{2\kappa} p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \left( \overset{2}{\mathcal{A}}(w) \Omega {}^t\overset{1}{\mathcal{A}}(v) - \overset{1}{\bar{g}}_+(v) \overset{2}{\bar{g}}_+(w) \Omega {}^t\overset{1}{\bar{g}}_-^t(v) \overset{2}{\bar{g}}_-^t(w) \right) \\
 &\frac{1}{2\kappa} p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \left( \overset{1}{\mathcal{A}}(v) \overset{2}{\mathcal{A}}(w) {}^t\Omega - \right. \\
 &\left. - \overset{1}{\bar{g}}_+(v) \overset{2}{\bar{g}}_+(w) {}^t\Omega \overset{1}{\bar{g}}_-^t(v) \overset{2}{\bar{g}}_-^t(w) \right) \tag{5.56}
 \end{aligned}$$

Finalmente, como  $\Omega^t = -\Omega^\eta$ , los segundos sumandos de cada línea se cancelan, y sigue el resultado.  $\square$

Las matrices  $\mathcal{A}$ , entonces, tienen los mismos corchetes que las matrices de monodromía  $\mathcal{M}$ , partiendo de la estructura de doble clásico. Sin embargo,  $\mathcal{A}$  son matrices imaginarias, pues contienen  $\sigma_y$  entre sus factores.

Para identificar  $\mathcal{A}$  con  $\mathcal{M}$ , observemos que si pasamos a la complexificación del doble y definimos una nueva sección real por la condición

$$(\bar{g}_+(v))^* = \bar{g}_-(v^*) \tag{5.57}$$

siendo  $\cdot^*$  el operador de conjugación y transposición usual, entonces  $\mathcal{A}$  es hermítica para  $v$  real

$$\mathcal{A}^{*t}(v) = g_-^*(v) g_-^t v^* = A(v^*) \tag{5.58}$$

y se escribe como

$$\mathcal{A}(v) = g_-^*(v^*) g_-^t(v) \tag{5.59}$$

La parte simétrica de una matriz hermítica es real y simétrica, y cumple los mismos corchetes, tal como podemos verificar con el siguiente cálculo para  $\text{sym}(\mathcal{A})$ :

$$\left\{ \mathop{\text{sym}}^1(\mathcal{A})(v), \mathop{\mathcal{A}}^2(w) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \mathop{\mathcal{A}}^1(v), \mathop{\mathcal{A}}^2(w) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \mathop{\mathcal{A}}^t(v), \mathop{\mathcal{A}}^2(w) \right\} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\kappa} p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \left( \Omega \mathop{\mathcal{A}}^1 \mathop{\mathcal{A}}^2 + \mathop{\mathcal{A}}^t \Omega \mathop{\mathcal{A}}^2 + \mathop{\mathcal{A}}^2 \Omega^t \mathop{\mathcal{A}}^1 + \mathop{\mathcal{A}}^1 \mathop{\mathcal{A}}^2 \Omega^t \right) \\ &+ \frac{1}{4\kappa} p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \left( \mathop{\mathcal{A}}^{tt} \Omega \mathop{\mathcal{A}}^2 + \Omega \mathop{\mathcal{A}}^t \mathop{\mathcal{A}}^2 + \mathop{\mathcal{A}}^2 \mathop{\mathcal{A}}^{tt} \Omega^t + \mathop{\mathcal{A}}^2 \Omega^t \mathop{\mathcal{A}}^t \right) \\ &= \frac{1}{2\kappa} p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \left( \Omega \mathop{\text{sym}}^1(\mathcal{A}) \mathop{\mathcal{A}}^2 + \mathop{\text{sym}}^1(\mathcal{A})^t \Omega \mathop{\mathcal{A}}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \mathop{\mathcal{A}}^2 \Omega^t \mathop{\text{sym}}^1(\mathcal{A}) + \mathop{\text{sym}}^1(\mathcal{A}) \mathop{\mathcal{A}}^t \Omega^t \right) \end{aligned} \quad (5.61)$$

Así que  $\mathop{\text{sym}}(\mathcal{A})$  es un objeto del doble clásico que tiene los mismos corchetes y propiedades que la matriz de monodromía de [19].

### 5.5.3. Resultado

A continuación enunciaremos la estructura que presentamos en las subsecciones anteriores:

Sea  $G = \widehat{SL(2, \mathbb{R})}$ , el grupo loop asociado a  $SL(2, \mathbb{R})$ , con el producto usual, y munido del corchete de Poisson 5.37, que corresponde al corchete de Sklyanin C.31. Sea  $G^*$  el grupo dual asociado, construido con el procedimiento mostrado en la sección C.5 del Apéndice C. Cada elemento  $(g_-(v), g_+(v)) \in G^*$  se corresponde uno a uno con una matriz  $\mathcal{A}$  mediante el mapa

$$(g_-(v), g_+(v)) \mapsto g_+(v)g_-^{-1}\sigma_y = g_+(v)\sigma_y g_-^t(v) = \mathcal{A}(v) \quad (5.62)$$

y la condición para la hermiticidad

$$(g_+(v)\sigma_y)^* = g_-(v^*) \quad (5.63)$$

La componente simétrica de  $\mathcal{A}$  se corresponde con la matriz de monodromía  $\mathcal{M}$  que definimos en el capítulo 4.

El corchete de Semenov-Tian-Shansky en el doble clásico, C.44, conduce al corchete entre los  $\mathcal{M}$ , 5.26, una vez que se realiza el twist en los elementos del grupo dual.

Entonces, el grupo de Geroch actúa en soluciones  $\mathcal{M}$  como la acción de  $G$  sobre  $G^*$ , ambos complexificados, siguiendo la acción Lie-Poisson presentada en el Apéndice C.

En las siguientes secciones presentaremos la estructura de Poisson para la matriz de monodromía extendida, objeto que contiene los otros datos iniciales que presentamos en el capítulo 1:  $\rho_0$  y  $\hat{\sigma}_0$ .

## 5.6. Matriz de monodromía extendida

En esta sección mostraremos que la matriz de monodromía se puede extender de tal forma que incluye los datos  $\rho_0$  y  $\hat{\sigma}_0$  (motivados por [35], [22] y [6]).

**Definición 5.3.** La matriz de monodromía extendida es

$$\tilde{\mathcal{M}}(w, \hat{\sigma}_0, \rho_0) = e^{-2\rho_0\partial_w} \mathcal{M}(w) e^{\hat{\sigma}_0 k} \quad (5.64)$$

que se puede identificar con un elemento de  $G(A_1^1)$ , el grupo afín generado por el álgebra de Kac-Moody  $A_1^1$ . (Ver Apéndice B). Notaremos  $\tilde{G}$  a tal grupo.

### 5.6.1. Corchetes para $\tilde{\mathcal{M}}$

**Proposición 5.6.** *Los corchetes calculados anteriormente se pueden escribir en forma compacta usando la matriz  $\tilde{\mathcal{M}}$  y la estructura de  $A_1^1$ . Si  $\tilde{\Omega}(v, w) = p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \Omega + \frac{1}{2} (\partial_v \otimes k - k \otimes \partial_w)$ , entonces*

$$\boxed{2\kappa \left\{ \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v), \overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}}(w) \right\} = \tilde{\Omega}(v, w) \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v) \overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}}(w) + \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v) {}^t\tilde{\Omega}(v + 2\rho_0, w) \overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}}(w) + \overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}}(w) \tilde{\Omega}^t(v, w + 2\rho_0) \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v) + \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v) \overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}}(w) {}^t\tilde{\Omega}^t(v, w)} \quad (5.65)$$

*Demostración.* Para realizar el cálculo, escribiremos  $\overset{i}{\tilde{\mathcal{M}}}(v) = e^{-2\rho_0\partial_v} \overset{i}{\mathcal{M}}(v) e^{\hat{\sigma}_0 k}$ , y notamos el lado izquierdo como

$$C \equiv 2\kappa \left\{ e^{-2\rho_0\partial_v} \overset{1}{\mathcal{M}}(v) e^{\hat{\sigma}_0 k}, e^{-2\rho_0\partial_w} \overset{2}{\mathcal{M}}(w) e^{\hat{\sigma}_0 k} \right\} \quad (5.66)$$

Entonces, escribimos el lado izquierdo a menos de los corchetes que dan cero:

$$\begin{aligned} \frac{C}{2\kappa} &= e^{-2\rho_0\partial_w} \overset{2}{\mathcal{M}}(w) \left\{ e^{-2\rho_0\partial_v}, e^{\hat{\sigma}_0 k} \right\} \overset{1}{\mathcal{M}}(v) e^{\hat{\sigma}_0 k} \\ &+ e^{-2\rho_0\partial_v} \overset{1}{\mathcal{M}}(v) \left\{ e^{\hat{\sigma}_0 k}, e^{-2\rho_0\partial_w} \right\} \overset{2}{\mathcal{M}}(w) e^{\hat{\sigma}_0 k} \\ &+ e^{-2\rho_0\partial_v} e^{-2\rho_0\partial_w} \left\{ \overset{1}{\mathcal{M}}(v), \overset{2}{\mathcal{M}}(w) \right\} e^{\hat{\sigma}_0 k} e^{\hat{\sigma}_0 k} \\ &+ e^{-2\rho_0\partial_v} \overset{1}{\mathcal{M}}(v) e^{-2\rho_0\partial_w} \left\{ e^{\hat{\sigma}_0 k}, \overset{2}{\mathcal{M}}(w) \right\} e^{\hat{\sigma}_0 k} \\ &+ e^{-2\rho_0\partial_w} \overset{2}{\mathcal{M}}(w) e^{-2\rho_0\partial_v} \left\{ \overset{1}{\mathcal{M}}(v), e^{\hat{\sigma}_0 k} \right\} e^{\hat{\sigma}_0 k} \end{aligned} \quad (5.67)$$

Ahora usamos los corchetes que tenemos para cada uno de los sumandos:

$$\begin{aligned}
C &= e^{-2\rho_0\partial_w} \overset{2}{\mathcal{M}}(w) e^{-2\rho_0\partial_v} (2\partial_v \otimes k) e^{\overset{2}{\sigma_0}k} \overset{1}{\mathcal{M}}(v) e^{\overset{1}{\sigma_0}k} \\
&\quad - e^{-2\rho_0\partial_v} \overset{1}{\mathcal{M}}(v) e^{\overset{1}{\sigma_0}k} (k \otimes 2\partial_w) e^{-2\rho_0\partial_w} \overset{2}{\mathcal{M}}(w) e^{\overset{2}{\sigma_0}k} \\
&\quad + 2\kappa e^{-2\rho_0\partial_v} e^{-2\rho_0\partial_w} \left\{ \overset{1}{\mathcal{M}}(v), \overset{2}{\mathcal{M}}(w) \right\} e^{\overset{1}{\sigma_0}k} e^{\overset{2}{\sigma_0}k} \\
&\quad + e^{-2\rho_0\partial_v} \overset{1}{\mathcal{M}}(v) e^{-2\rho_0\partial_w} \left( k \otimes \partial_w \overset{2}{\mathcal{M}}(w) \right) e^{\overset{1}{\sigma_0}k} e^{\overset{2}{\sigma_0}k} \\
&\quad - e^{-2\rho_0\partial_w} \overset{2}{\mathcal{M}}(w) e^{-2\rho_0\partial_v} \left( \partial_v \overset{1}{\mathcal{M}}(v) \otimes k \right) e^{\overset{2}{\sigma_0}k} e^{\overset{1}{\sigma_0}k} \tag{5.68}
\end{aligned}$$

Para cada sumando tenemos:

1.

$$e^{-2\rho_0\partial_w} \overset{2}{\mathcal{M}}(w) e^{-2\rho_0\partial_v} (2\partial_v \otimes k) e^{\overset{2}{\sigma_0}k} \overset{1}{\mathcal{M}}(v) e^{\overset{1}{\sigma_0}k} = \overset{2}{\mathcal{M}}(w) (2\partial_v \otimes k) \overset{1}{\mathcal{M}}(v)$$

2. Es la misma línea que la anterior, con los espacios 1 y 2 intercambiados y un signo de menos extra:

$$-e^{-2\rho_0\partial_v} \overset{1}{\mathcal{M}}(v) e^{\overset{1}{\sigma_0}k} (k \otimes 2\partial_w) e^{-2\rho_0\partial_w} \overset{2}{\mathcal{M}}(w) e^{\overset{2}{\sigma_0}k} = -\overset{1}{\mathcal{M}}(v) (k \otimes 2\partial_w) \overset{2}{\mathcal{M}}(w)$$

3. El tercero requiere más manipulación algebraica:

$$\begin{aligned}
2\kappa e^{-2\rho_0\partial_v} e^{-2\rho_0\partial_w} \left\{ \overset{1}{\mathcal{M}}(v), \overset{2}{\mathcal{M}}(w) \right\} e^{\overset{1}{\sigma_0}k} e^{\overset{2}{\sigma_0}k} &= e^{-2\rho_0\partial_v} e^{-2\rho_0\partial_w} p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \left( \Omega \overset{1}{\mathcal{M}}(v) \overset{2}{\mathcal{M}}(w) + \right. \\
&\quad \left. + \overset{1}{\mathcal{M}}(v) {}^t\Omega \overset{2}{\mathcal{M}}(w) + \overset{2}{\mathcal{M}}(w) \Omega {}^t \overset{1}{\mathcal{M}}(v) \right. \\
&\quad \left. + \overset{1}{\mathcal{M}}(v) \overset{2}{\mathcal{M}}(w) {}^t\Omega {}^t \right) e^{\overset{1}{\sigma_0}k} e^{\overset{2}{\sigma_0}k} \tag{5.69}
\end{aligned}$$

Ahora usamos las siguientes propiedades conocidas para los operadores  $p.v.$   $\left[ \frac{1}{v-w} \right]$  y  $e^{\alpha\partial_v}$ :

$$e^{\alpha\partial_v} p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] = p.v. \left[ \frac{1}{(v+\alpha)-w} \right] e^{\alpha\partial_v} \tag{5.70}$$

$$e^{\alpha\partial_w} p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] = p.v. \left[ \frac{1}{v-(w+\alpha)} \right] e^{\alpha\partial_w} \tag{5.71}$$

$$e^{-2\rho_0\partial_v} e^{-2\rho_0\partial_w} p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] = p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] e^{-2\rho_0\partial_v} e^{-2\rho_0\partial_w} \tag{5.72}$$

Entonces podemos agrupar los factores

$$\begin{aligned}
 & p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \Omega \tilde{\mathcal{M}}^1(v) \tilde{\mathcal{M}}^2(w) + \tilde{\mathcal{M}}^1(v) p.v. \left[ \frac{1}{v-w+2\rho_0} \right] {}^t \Omega \tilde{\mathcal{M}}^2(w) + \\
 & + \tilde{\mathcal{M}}^2(w) p.v. \left[ \frac{1}{v-w-2\rho_0} \right] \Omega {}^t \tilde{\mathcal{M}}^1(v) + \tilde{\mathcal{M}}^1(v) \tilde{\mathcal{M}}^2(w) p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] {}^t \Omega {}^t
 \end{aligned} \tag{5.73}$$

En términos del automorfismo  $\eta$  de  $\mathfrak{sl}_2$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 & p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \Omega \tilde{\mathcal{M}}^1(v) \tilde{\mathcal{M}}^2(w) - \tilde{\mathcal{M}}^1(v) p.v. \left[ \frac{1}{v-w+2\rho_0} \right] \Omega^\eta \tilde{\mathcal{M}}^2(w) - \\
 & - \tilde{\mathcal{M}}^2(w) p.v. \left[ \frac{1}{v-w-2\rho_0} \right] \Omega^\eta \tilde{\mathcal{M}}^1(v) + \tilde{\mathcal{M}}^1(v) \tilde{\mathcal{M}}^2(w) p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \Omega
 \end{aligned} \tag{5.74}$$

con  $\Omega^\eta = \Omega_{\mathfrak{q}} - \Omega_{\mathfrak{k}}$ , que surge de aplicar el automorfismo en alguno de los dos espacios tensoriales (el resultado es el mismo independientemente del espacio en que se aplique).

4.

$$e^{-2\rho_0 \partial_v} \tilde{\mathcal{M}}^1(v) e^{-2\rho_0 \partial_w} \left( k \otimes \partial_w \tilde{\mathcal{M}}^2(w) \right) e^{\hat{\sigma}_0 k} e^{\hat{\sigma}_0 k} = \tilde{\mathcal{M}}^1(v) \left( k \otimes \partial_w \tilde{\mathcal{M}}^2(w) \right)$$

5.

$$-e^{-2\rho_0 \partial_w} \tilde{\mathcal{M}}^2(w) e^{-2\rho_0 \partial_v} \left( \partial_v \tilde{\mathcal{M}}^1(v) \otimes k \right) e^{\hat{\sigma}_0 k} e^{\hat{\sigma}_0 k} = -\tilde{\mathcal{M}}^2(w) \left( \partial_v \tilde{\mathcal{M}}^1(v) \otimes k \right)$$

Agrupando todo, tenemos

$$\begin{aligned}
 C &= \tilde{\mathcal{M}}^2(w) (2\partial_v \otimes k) \tilde{\mathcal{M}}^1(v) \\
 & - \tilde{\mathcal{M}}^1(v) (k \otimes 2\partial_w) \tilde{\mathcal{M}}^2(w) \\
 & + p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \Omega \tilde{\mathcal{M}}^1(v) \tilde{\mathcal{M}}^2(w) - \tilde{\mathcal{M}}^1(v) p.v. \left[ \frac{1}{v-w+2\rho_0} \right] \Omega^\eta \tilde{\mathcal{M}}^2(w) - \\
 & - \tilde{\mathcal{M}}^2(w) p.v. \left[ \frac{1}{v-w-2\rho_0} \right] \Omega^\eta \tilde{\mathcal{M}}^1(v) + \tilde{\mathcal{M}}^1(v) \tilde{\mathcal{M}}^2(w) p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \Omega + \\
 & + \tilde{\mathcal{M}}^1(v) \left( k \otimes \partial_w \tilde{\mathcal{M}}^2(w) \right) \\
 & - \tilde{\mathcal{M}}^2(w) \left( \partial_v \tilde{\mathcal{M}}^1(v) \otimes k \right)
 \end{aligned} \tag{5.75}$$

Ahora bien:

$$\left[ \partial_v, \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v) \right] = \partial_v \left( \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v) \right) \quad (5.76)$$

así que combinando los dos primeros sumandos junto con los últimos dos permite reescribir  $C$  como

$$\begin{aligned} C &= \overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}}(w) (\partial_v \otimes k) \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v) + \overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}}(w) \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v) (\partial_v \otimes k) \\ &\quad - \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v) (k \otimes \partial_w) \overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}}(w) - \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v) \overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}}(w) (k \otimes \partial_w) \\ &\quad + p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \Omega \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v) \overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}}(w) - \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v) p.v. \left[ \frac{1}{v-w+2\rho_0} \right] \Omega \overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}}(w) - \\ &\quad - \overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}}(w) p.v. \left[ \frac{1}{v-w-2\rho_0} \right] \Omega \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v) + \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v) \overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}}(w) p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \Omega \end{aligned} \quad (5.77)$$

Como  $k$  es central, conmuta con  $\mathcal{M}$ , así que podemos reagrupar los términos para formar el operador  $\tilde{\Omega}$ :

$$\begin{aligned} C &= \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v) \overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}}(w) \left( \frac{1}{2} (\partial_v \otimes k - k \otimes \partial_w) + p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \Omega \right) \\ &\quad + \left( \frac{1}{2} (\partial_v \otimes k - k \otimes \partial_w) + p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \Omega \right) \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v) \overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}}(w) \\ &\quad + \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v) \left( \frac{1}{2} (\partial_v \otimes k - k \otimes \partial_w) - p.v. \left[ \frac{1}{v-w+2\rho_0} \right] \Omega \right) \overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}}(w) \\ &\quad + \overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}}(w) \left( \frac{1}{2} (\partial_v \otimes k - k \otimes \partial_w) - p.v. \left[ \frac{1}{v-w-2\rho_0} \right] \Omega \right) \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v) \end{aligned} \quad (5.78)$$

como se quería demostrar.  $\square$

Ahora vamos a mostrar cómo podemos reescribir el corchete que hallamos en la proposición anterior en la forma de Semenov-Tian-Shansky. Sean  $\tilde{\Omega}^+(v, w)$  y  $\tilde{\Omega}^-(v, w)$  las siguientes:

$$\tilde{\Omega}^+(v, w) := p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \Omega + \partial_v \otimes k \quad (5.79)$$

$$\tilde{\Omega}^-(v, w) := p.v. \left[ \frac{1}{v-w} \right] \Omega - k \otimes \partial_w \quad (5.80)$$

Volviendo a la ecuación 5.77, tenemos que

$$\begin{aligned}
 C &= \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v)\overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}}(w)\tilde{\Omega}^-(v,w) + \tilde{\Omega}^-(v,w)\overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v)\overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}}(w) \\
 &\quad - \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v)\left(\tilde{\Omega}^+(v,w-2\rho_0)\right)^\eta \overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}}(w) - \\
 &\quad - \overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}}(w)\left(\tilde{\Omega}^+(v-2\rho_0,w)\right)^\eta \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v)
 \end{aligned} \tag{5.81}$$

donde el endomorfismo  $\eta$  está actuando en el álgebra  $A_1^1$ , ver Apéndice B. Otra expresión equivalente es

$$\begin{aligned}
 C &= \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v)\overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}}(w)\tilde{\Omega}^+(v,w) + \tilde{\Omega}^+(v,w)\overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v)\overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}}(w) \\
 &\quad - \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v)\left(\tilde{\Omega}^-(v,w-2\rho_0)\right)^\eta \overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}}(w) - \\
 &\quad - \overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}}(w)\left(\tilde{\Omega}^-(v-2\rho_0,w)\right)^\eta \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}(v)
 \end{aligned} \tag{5.82}$$

**Observación 5.5.** Comparar las expresiones anteriores con la ecuación para el corchete de Semenov-Tian-Shansky, C.44

Es inmediato verificar las siguientes propiedades para  $\tilde{\Omega}^\pm$ :

$$2\tilde{\Omega}(v,w) = \tilde{\Omega}^+(v,w) + \tilde{\Omega}^-(v,w) \tag{5.83}$$

$$\overset{12}{\tilde{\Omega}^+} = -\overset{21}{\tilde{\Omega}^-} \tag{5.84}$$

$$\Omega_{A_1^1} = \tilde{\Omega}^+(v,w) - \tilde{\Omega}^-(v,w) \tag{5.85}$$

siendo  $\Omega_{A_1^1}$  el elemento de Casimir de  $A_1^1$  (ver [23] para más detalles sobre elementos de Casimir).

Tenemos entonces la matriz  $r$  para la extensión central del grupo de Geroch, a saber  $\tilde{\Omega}(v,w)$ . Eso conduce a una descomposición en  $\tilde{r}^\pm$  como

$$\tilde{r}^+ := \frac{1}{v-w+i\epsilon}\Omega + \partial_v \otimes k \tag{5.86}$$

$$\tilde{r}^- := \frac{1}{v-w-i\epsilon}\Omega - k \otimes \partial_w \tag{5.87}$$

que a su vez lleva a un corchete de Sklyanin para el grupo de Geroch centralmente extendido (cuyos elementos notamos  $\tilde{g}$ )

$$\left\{ \overset{1}{\tilde{g}}, \overset{2}{\tilde{g}} \right\} = [\tilde{r}^\pm, \overset{12}{\tilde{g}\tilde{g}}] \tag{5.88}$$

Si a un elemento del grupo loop extendido centralmente lo escribimos como

$$\bar{g}(w) := e^{\mu\partial_w} g(w) e^{\xi k} \tag{5.89}$$

el resultado del corchete anterior es

$$\left\{ \overset{1}{g}, \overset{2}{g} \right\} = [r^\pm, \overset{1}{g}\overset{2}{g}] \quad (5.90)$$

$$\{\xi, g(w)\} = \partial_w g(w) \quad (5.91)$$

$$\{\mu, g(w)\} = 0 \quad (5.92)$$

$$\{\xi, \mu\} = 0 \quad (5.93)$$

para cada componente, o

$$\left\{ \overset{1}{\tilde{g}}(v), \overset{2}{\tilde{g}}(w) \right\} = e^{\mu\partial_v} e^{\mu\partial_w} \left( [r^\pm, \overset{1}{g}\overset{2}{g}] - \overset{2}{g}\partial_v \overset{1}{g} + \overset{1}{g}\partial_w \overset{2}{g} \right) e^{\xi k} e^{\xi k} \quad (5.94)$$

exactamente con la forma de las extensiones centrales para grupos de Poisson-Lie (ver [40]).

En la sección siguiente veremos que efectivamente existe una acción del grupo de Geroch sobre  $\tilde{\mathcal{M}}$  que es Lie-Poisson en el caso que el corchete sobre el grupo es el de Sklyanin para las matrices  $\tilde{r}^\pm$  que definimos anteriormente.

## 5.7. Acción Lie-Poisson en el doble clásico extendido centralmente

Comenzaremos definiendo la acción del grupo de Geroch sobre la matriz de monodromía extendida. En lo que sigue, notaremos  $\tilde{G}$  para referirnos al grupo de Geroch y  $\mathcal{F}$  para referirnos al espacio de fase de los datos  $\mathcal{M}(w)$ ,  $\rho_0$  y  $\hat{\sigma}_0$ , parametrizado por  $\tilde{\mathcal{M}}$ .

**Definición 5.4.** Sea  $\tilde{g}(v) \in \tilde{G}$  un elemento del grupo de Geroch, de la forma

$$\tilde{g}(v) = e^{\mu\partial_v} g(v) e^{\xi k} \quad (5.95)$$

Su acción sobre las matrices de monodromía  $\tilde{\mathcal{M}} = e^{-2\rho\partial_v} \mathcal{M}(v) e^{\hat{\sigma}_0 k}$  se define como

$$\tilde{g}(v) \cdot \tilde{\mathcal{M}} = \tilde{g}(v) \tilde{\mathcal{M}} \tilde{g}^t(v) \quad (5.96)$$

que da como resultado

$$\tilde{g}(v) \cdot \tilde{\mathcal{M}} = e^{-2(\rho_0 - \mu)\partial_v} g(v + 2\rho_0 - \mu) \mathcal{M}(v - \mu) g^t(v - \mu) e^{(\hat{\sigma}_0 + 2\xi)k} \quad (5.97)$$

**Proposición 5.7.** Si el corchete sobre  $\tilde{G}$  está dado por 5.88, la acción del grupo de Geroch  $\tilde{G}$  sobre  $\mathcal{F}$  es Lie-Poisson.

*Demostración.* La demostración es directa. Tal como hicimos en la sección 5.5, probaremos (manteniendo la notación sobre acciones de representaciones que introdujimos en esa sección)

$$\left. \left\{ \overset{1}{\tilde{g}} \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}} \overset{1}{\tilde{g}}^t, \overset{2}{\tilde{g}} \overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}} \overset{2}{\tilde{g}}^t \right\} \right|_{G \times \mathcal{F}} (\gamma, x) = \left\{ \overset{1}{\tilde{\mathcal{M}}}, \overset{2}{\tilde{\mathcal{M}}} \right\}_{\mathcal{F}} (\gamma \cdot x) \quad (5.98)$$

Operando de la misma manera que se hizo en la proposición 5.3, y definiendo  $\tilde{\mathcal{Y}} = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ \tilde{g} & \tilde{g} \end{smallmatrix} \right\}_{\tilde{G}} \tilde{g}^{-1} \tilde{g}^{-1}$ , tenemos

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1^t & 2 & 2 & 2^t \\ \tilde{g} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{g} & , \tilde{g} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{g} \end{smallmatrix} \right\}_{\tilde{G} \times \mathcal{F}} &= \begin{smallmatrix} 12 \\ \tilde{g} \tilde{g} \end{smallmatrix} \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ \tilde{\mathcal{M}} & , \tilde{\mathcal{M}} \end{smallmatrix} \right\}_{\mathcal{F}} \begin{smallmatrix} 1^t & 2^t \\ \tilde{g} & \tilde{g} \end{smallmatrix} + \tilde{\mathcal{Y}}(\tilde{g} \cdot \tilde{\mathcal{M}})(\tilde{g} \cdot \tilde{\mathcal{M}}) \\ &+ (\tilde{g} \cdot \tilde{\mathcal{M}}) \tilde{\mathcal{Y}}^t(\tilde{g} \cdot \tilde{\mathcal{M}}) + (\tilde{g} \cdot \tilde{\mathcal{M}})^t \tilde{\mathcal{Y}}(\tilde{g} \cdot \tilde{\mathcal{M}}) \\ &+ (\tilde{g} \cdot \tilde{\mathcal{M}})^1 (\tilde{g} \cdot \tilde{\mathcal{M}})^2 \tilde{\mathcal{Y}}^t \end{aligned} \quad (5.99)$$

que nos lleva a la misma ecuación

$$\begin{aligned} 2\kappa \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1^t & 2 & 2 & 2^t \\ \tilde{g} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{g} & , \tilde{g} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{g} \end{smallmatrix} \right\}_{\tilde{G} \times \mathcal{F}} &= \left( \begin{smallmatrix} 12 \\ \tilde{g} \tilde{g} \end{smallmatrix} \tilde{\Omega}(v, w) \tilde{g}^{-1} \tilde{g}^{-1} + \tilde{\mathcal{Y}} \right) (\tilde{g} \cdot \tilde{\mathcal{M}})(\tilde{g} \cdot \tilde{\mathcal{M}}) + \\ &+ \text{trasposiciones} \end{aligned} \quad (5.100)$$

Esto debe ser igual al corchete en  $\mathcal{F}$  para las matrices  $\tilde{g} \cdot \tilde{\mathcal{M}}$ , es decir el corchete

$$\left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1^t & 2 & 2 & 2^t \\ \tilde{g} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{g} & , \tilde{g} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{g} \end{smallmatrix} \right\}_{\tilde{G} \times \mathcal{F}} = \tilde{\Omega}(v, w) (\tilde{g} \cdot \tilde{\mathcal{M}})(\tilde{g} \cdot \tilde{\mathcal{M}}) + \text{trasposiciones} \quad (5.101)$$

Así que la igualdad

$$\begin{smallmatrix} 12 \\ \tilde{g} \tilde{g} \end{smallmatrix} \tilde{\Omega}(v, w) \tilde{g}^{-1} \tilde{g}^{-1} + \tilde{\mathcal{Y}} = \tilde{\Omega}(v, w) \quad (5.102)$$

es una condición suficiente, de donde se deduce que

$$\left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ \tilde{g}(v) & , \tilde{g}(w) \end{smallmatrix} \right\}_{\tilde{G}} = \frac{1}{2\kappa} \left[ \tilde{\Omega}(v, w), \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ \tilde{g}(v) & \tilde{g}(w) \end{smallmatrix} \right] \quad (5.103)$$

que es una condición que se cumple si el corchete en  $\tilde{G}$  viene dado por 5.88  $\square$

La proposición anterior es una verificación de que los corchetes propuestos en 5.88 son consistentes con una acción Lie-Poisson. Por lo tanto, tenemos todos los elementos del doble clásico en la extensión central que hemos construido. Una vez obtenida la matriz  $r$ , a saber  $\frac{1}{2\kappa} \tilde{\Omega}$ , la estructura de biálgebra de Lie nos permite intentar una cuantización del espacio de fase. Esto último va más allá del contenido del presente trabajo.

Finalizamos el capítulo enunciando el resultado:

*El grupo de Geroch actúa en el espacio de fase  $\mathcal{F}$  como  $\tilde{G}$ , de manera que se identifica la matriz  $r$ , que es  $\frac{1}{2\kappa} \tilde{\Omega}$ . El corchete en  $\tilde{G}$  es 5.88, correspondiente al corchete de Sklyanin C.30, y el corchete en el dual está dado por C.44.*

*La acción Lie-Poisson está garantizada por el corchete de Sklyanin hallado y de igual manera a como hicimos para el sector loop, podemos observar que el corchete de las matrices  $\tilde{\mathcal{M}}$  es un twist del corchete C.44 para el dual.*

*Esto nos muestra que el espacio de fase  $\mathcal{F}$  y el grupo de Geroch  $\tilde{G}$  forman un doble clásico asociado al álgebra de Kac-Moody  $A_1^1$ .*

# Resultado sobre la cuantización del sistema

En este capítulo presentamos una simetría a nivel cuántico cuyo límite clásico, sobre las matrices de monodromía, es la simetría del grupo de Geroch. Este resultado es nuevo.

## 6.1. Cuantización de $\mathcal{M}(w)$

En [19] se enuncia la relación de conmutación para los operadores  $\mathcal{M}(w)$ :

$$R(v-w)\overset{1}{\mathcal{M}}(v)R'(w-v+2i\hbar)\overset{2}{\mathcal{M}}(w) = \overset{2}{\mathcal{M}}(w)^t R'^t(v-w+2i\hbar)\overset{1}{\mathcal{M}}(v)^t R^t(w-v)\chi(v-w) \quad (6.1)$$

donde  $\chi(v-w) = \frac{v-w-2i\hbar}{v-w+2i\hbar}$ , y los operadores  $R$  y  $R'$  se definen como

$$R(u) = (u - i\hbar/2)I - i\hbar\Omega_{\mathfrak{g}} \quad (6.2)$$

$$R'(u) = (u - i\hbar/2)I - i\hbar\Omega_{\mathfrak{g}}^{\eta} \quad (6.3)$$

siendo  $I = \overset{1}{I}\overset{2}{I}$  es el producto de operadores identidad en los espacios 1 y 2.

**Observación 6.1.** Esta relación de conmutación proviene de la ecuación  $RTT$  (ver Apéndice D) para las matrices de transición.

**Observación 6.2.** Es una verificación rutinaria probar que la ecuación anterior se reduce a la ecuación 5.26 en el límite  $\hbar \rightarrow 0$ .

## 6.2. Grupo de Geroch como simetría en la cuantización

Recordamos que la acción clásica es

$$g(v) \cdot \mathcal{M}(v) = g(v)\mathcal{M}(v)g^t(v) \quad (6.4)$$

En índices se lee

$$(g(v) \cdot \mathcal{M}(v))_{ab} = g(v)_a^c g(v)_b^d \mathcal{M}(v)_{cd} \quad (6.5)$$

Observar que en el capítulo anterior probamos que el grupo de Geroch tiene corchete de Poisson compatible con la matriz  $r$  del grupo loop, y eso hace que la cuantización sea un Yangiano.

A nivel cuántico, supondremos que hay una simetría que actúa mediante el siguiente ansatz:

$$g(v) \cdot \mathcal{M}(v) = g(v + c_1) \mathcal{M}(v) g^t(v + c_2) \quad (6.6)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes a determinar, y  $g(v)$  ahora son elementos del Yangiano.

Esto implica que los elementos del grupo cuantizado cumplen la ecuación

$$R(u - v) g^1(u) g^2(v) = g^2(v) g^1(u) R(u - v) \quad (6.7)$$

y, componiendo con el anti-automorfismo involutivo del Yangiano (ver Apéndice D, proposición D.2), la ecuación

$$R(v - u) g^2(v) g^1(u) = g^1(u) g^2(v) R(v - u) \quad (6.8)$$

Cualquiera de estas ecuaciones definen el coproducto en el álgebra de Hopf, pues recordar que no es co-conmutativa.

Para obtener una simetría de la ecuación 6.1, primero debemos encontrar un análogo a 6.7 y 6.8 para el operador  $R'$ . Para eso, tenemos el siguiente lema:

**Lemma 6.1.** *El operador  $R'$  cumple las siguientes ecuaciones en relación a los elementos del Yangiano*

$${}^t g^1(u) R'(B) g^2(v) = (B + u - v - i\hbar) \left[ {}^t g^1(u), g^2(v) \right] + g^2(v) R'(B) {}^t g^1(u) \quad (6.9)$$

$$g^1(u) {}^t R'(B) g^2(v) = (B + v - u - i\hbar) \left[ g^1(u), g^2(v) \right] + g^2(v) {}^t R'(B) g^1(u) \quad (6.10)$$

donde  $B$  es una combinación polinómica de  $u, v$  y  $\hbar$ .

*Demostración.* Usando la expresión para  $R$  términos de los operadores identidad y Casimir, tenemos que 6.7 es

$$\left( \left( u - v - \frac{i\hbar}{2} \right) I - i\hbar\Omega \right) g^1(u) g^2(v) = g^2(v) g^1(u) \left( \left( u - v - \frac{i\hbar}{2} \right) I - i\hbar\Omega \right) \quad (6.11)$$

y trasponiendo en la primer componente del producto tensorial, tenemos

$${}^t \left( \left( u - v - \frac{i\hbar}{2} \right) I g^1(u) g^2(v) - g^2(v) g^1(u) \left( \left( u - v - \frac{i\hbar}{2} \right) I - i\hbar\Omega \right) \right) = {}^t (i\hbar\Omega g^1(u) g^2(v)) \quad (6.12)$$

así que

$$i\hbar {}^t_1 g(u) {}^t\Omega {}^2 g(v) = \left(u - v - \frac{i\hbar}{2}\right) \left[ {}^t_1 g(u), {}^2 g(v) \right] + i\hbar {}^2 g(v) {}^t\Omega {}^t_1 g(u) \quad (6.13)$$

Observar que hay que tener cuidado de no conmutar los elementos de matriz de  ${}^1 g$  con los de  ${}^2 g$  al tomar trasposiciones.

Descomponiendo  $R'$  en el operador identidad  $I$  y en el operador de Casimir  $\Omega$ , y usando la ecuación anterior

$${}^t_1 g(u) R'(B) {}^2 g(v) = {}^t_1 g(u) \left( \left( B - \frac{i\hbar}{2} \right) I + i\hbar {}^t\Omega \right) {}^2 g(v) \quad (6.14)$$

$$= \left( B - \frac{i\hbar}{2} \right) {}^t_1 g(u) {}^2 g(v) + \left( u - v - \frac{i\hbar}{2} \right) \left[ {}^t_1 g(u), {}^2 g(v) \right] + i\hbar {}^2 g(v) {}^t\Omega {}^t_1 g(u) \quad (6.15)$$

$$= (B + u - v - i\hbar) \left[ {}^t_1 g(u), {}^2 g(v) \right] + \left( B - \frac{i\hbar}{2} \right) {}^2 g(v) {}^t_1 g(u) + i\hbar {}^2 g(v) {}^t\Omega {}^t_1 g(u) \quad (6.16)$$

$$= (B + u - v - i\hbar) \left[ {}^t_1 g(u), {}^2 g(v) \right] + {}^2 g(v) R'(B) {}^t_1 g(u) \quad (6.17)$$

probando la primera ecuación.

Para la segunda, vamos a la ecuación 6.8 para despejar  $\left( i\hbar {}^1 g(u) {}^2 g(v) \Omega \right)^t$ , y obtenemos

$$i\hbar {}^1 g(u) \Omega {}^t {}^2 g(v) = \left( v - u - \frac{i\hbar}{2} \right) \left[ {}^1 g(u), {}^t {}^2 g(v) \right] + i\hbar {}^t {}^2 g(v) \Omega {}^t {}^1 g(u) \quad (6.18)$$

$${}^1 g(u) {}^t R'(B) {}^t {}^2 g(v) = {}^1 g(u) \left( \left( B - \frac{i\hbar}{2} \right) I + i\hbar \Omega {}^t \right) {}^t {}^2 g(v) \quad (6.19)$$

$$= \left( B - \frac{i\hbar}{2} \right) {}^1 g(u) {}^t {}^2 g(v) + i\hbar {}^1 g(u) \Omega {}^t {}^2 g(v) \quad (6.20)$$

$$= (B + v - u - i\hbar) \left[ {}^1 g(u), {}^t {}^2 g(v) \right] + {}^t {}^2 g(v) {}^t R' {}^1 g(u) \quad (6.21)$$

□

**Proposición 6.2.** Si  $c_1 - c_2 = i\hbar$ , entonces 6.6 es una simetría de la ecuación 6.1.

*Demostración.* Comencemos por el lado izquierdo, que llamaremos  $L$ , de la ecuación 6.1, para  $\mathcal{M}$ 's transformadas mediante la acción 6.6:

$$\begin{aligned} L &\equiv R(v - w) (g \cdot {}^1 \mathcal{M})(v) R'(w - v + 2i\hbar) (g \cdot {}^2 \mathcal{M})(w) \\ &= R(v - w) {}^1 g(v + c_1) {}^1 \mathcal{M}(v) {}^t_1 g(v + c_2) R'(w - v + 2i\hbar) {}^2 g(w + c_1) {}^2 \mathcal{M}(w) {}^t_2 g(w + c_2) \end{aligned} \quad (6.22)$$

Primero usamos la ecuación 6.9 para invertir el orden en el centro del producto, con  $B = w - v + 2i\hbar$ ,  $u = v + c_2$  y  $v = w + c_1$ :

$$L = R(v-w)\overset{1}{g}(v+c_1)\overset{1}{\mathcal{M}}(v)\overset{2}{g}(w+c_1)R'(w-v+2i\hbar)\overset{t_1}{g}(v+c_2)\overset{2}{\mathcal{M}}(w)\overset{2^t}{g}(w+c_2) + (c_2-c_1+i\hbar)R(v-w)\overset{1}{g}(v+c_1)\overset{1}{\mathcal{M}}(v)\left[\overset{t_1}{g}(u),\overset{2}{g}(v)\right]\overset{2}{\mathcal{M}}(w)\overset{2^t}{g}(w+c_2) \quad (6.23)$$

Nos concentraremos en el primer renglón. Lo siguiente es cambiar de lugar las  $g$ 's con las  $M$ 's: esto es legal porque son elementos de dos espacios de Hilbert independientes, y por tanto conmutan entre ellos.

$$L = R(v-w)\overset{1}{g}(v+c_1)\overset{2}{g}(w+c_1)\overset{1}{\mathcal{M}}(v)R'(w-v+2i\hbar)\overset{2}{\mathcal{M}}(w)\overset{t_1}{g}(v+c_2)\overset{2^t}{g}(w+c_2) + (c_2-c_1+i\hbar)R(v-w)\overset{1}{g}(v+c_1)\overset{1}{\mathcal{M}}(v)\left[\overset{t_1}{g}(u),\overset{2}{g}(v)\right]\overset{2}{\mathcal{M}}(w)\overset{2^t}{g}(w+c_2) \quad (6.24)$$

Ahora, usamos la ecuación 6.7 en los primeros tres factores:

$$L = \overset{2}{g}(w+c_1)\overset{1}{g}(v+c_1)R(v-w)\overset{1}{\mathcal{M}}(v)R'(w-v+2i\hbar)\overset{2}{\mathcal{M}}(w)\overset{t_1}{g}(v+c_2)\overset{2^t}{g}(w+c_2) + (c_2-c_1+i\hbar)R(v-w)\overset{1}{g}(v+c_1)\overset{1}{\mathcal{M}}(v)\left[\overset{t_1}{g}(u),\overset{2}{g}(v)\right]\overset{2}{\mathcal{M}}(w)\overset{2^t}{g}(w+c_2) \quad (6.25)$$

Apliquemos la ecuación 6.1 en los factores del medio:

$$L = \chi(v-w)\overset{2}{g}(w+c_1)\overset{1}{g}(v+c_1)\overset{2}{\mathcal{M}}(w)^t R'^t(v-w+2i\hbar)\overset{1}{\mathcal{M}}(v)^t R^t(w-v)\overset{t_1}{g}(v+c_2)\overset{2^t}{g}(w+c_2) + (c_2-c_1+i\hbar)R(v-w)\overset{1}{g}(v+c_1)\overset{1}{\mathcal{M}}(v)\left[\overset{t_1}{g}(u),\overset{2}{g}(v)\right]\overset{2}{\mathcal{M}}(w)\overset{2^t}{g}(w+c_2) \quad (6.26)$$

Usamos la ecuación 6.8 traspuesta por ambos lados en los tres últimos factores:

$$L = \chi(v-w)\overset{2}{g}(w+c_1)\overset{1}{g}(v+c_1)\overset{2}{\mathcal{M}}(w)^t R'^t(v-w+2i\hbar)\overset{1}{\mathcal{M}}(v)\overset{2^t}{g}(w+c_2)\overset{t_1}{g}(v+c_2)^t R^t(w-v) + (c_2-c_1+i\hbar)R(v-w)\overset{1}{g}(v+c_1)\overset{1}{\mathcal{M}}(v)\left[\overset{t_1}{g}(u),\overset{2}{g}(v)\right]\overset{2}{\mathcal{M}}(w)\overset{2^t}{g}(w+c_2) \quad (6.27)$$

Volvemos a cambiar de lugar las  $g$ 's con las  $M$ 's

$$L = \chi(v-w)\overset{2}{g}(w+c_1)\overset{2}{\mathcal{M}}(w)\overset{1}{g}(v+c_1)^t R'^t(v-w+2i\hbar)\overset{2^t}{g}(w+c_2)\overset{1}{\mathcal{M}}(v)\overset{t_1}{g}(v+c_2)^t R^t(w-v) + (c_2-c_1+i\hbar)R(v-w)\overset{1}{g}(v+c_1)\overset{1}{\mathcal{M}}(v)\left[\overset{t_1}{g}(u),\overset{2}{g}(v)\right]\overset{2}{\mathcal{M}}(w)\overset{2^t}{g}(w+c_2) \quad (6.28)$$

Y por último usamos la ecuación 6.10 en los factores del medio, para  $B = v - w + 2i\hbar$ ,  $u = v + c_1$  y  $v = w + c_2$ :

$$\begin{aligned}
 L = & \chi(v-w) \overset{2}{g}(w+c_1) \overset{2}{\mathcal{M}}(w) \overset{2^t}{g}(w+c_2) {}^t R'^t(v-w+2i\hbar) \overset{1}{g}(v+c_1) \overset{1}{\mathcal{M}}(v) \overset{t_1}{g}(v+c_2) {}^t R^t(w-v) + \\
 & \chi(v-w) \overset{2}{g}(w+c_1) \overset{2}{\mathcal{M}}(w) (c_2-c_1+i\hbar) \left[ \overset{1}{g}(v+c_1), \overset{2^t}{g}(w+c_2) \right] \overset{1}{\mathcal{M}}(v) \overset{t_1}{g}(v+c_2) {}^t R^t(w-v) + \\
 & +(c_2-c_1+i\hbar) R(v-w) \overset{1}{g}(v+c_1) \overset{1}{\mathcal{M}}(v) \left[ \overset{t_1}{g}(u), \overset{2}{g}(v) \right] \overset{2}{\mathcal{M}}(w) \overset{2^t}{g}(w+c_2)
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

Entonces, si  $c_2 - c_1 + i\hbar = 0$ , los términos que contienen conmutadores se anulan, y resulta

$$L = \chi(v-w) (g \cdot \overset{2}{\mathcal{M}})(w) {}^t R'^t(v-w+2i\hbar) (g \cdot \overset{1}{\mathcal{M}})(v) {}^t R^t(w-v) \tag{6.30}$$

tal como queríamos demostrar.  $\square$

**Observación 6.3.** Si fijamos que  $|c_1| = |c_2|$ , entonces la acción del Grupo de Geroch cuántico sobre las matrices de monodromía resulta:

$$g(v) \cdot \mathcal{M}(v) = g(v+i\hbar/2) \mathcal{M}(v) g^t(v-i\hbar/2) \tag{6.31}$$

# Conclusiones

La teoría de relatividad general dimensionalmente reducida a dos dimensiones ha sido intensamente estudiada en las décadas precedentes. En esta tesis hemos hecho un somero racconto de los principales resultados en la dirección de obtener una estructura simpléctica en los datos iniciales característicos, para relatividad general con simetría cilíndrica, que sea la antesala a una cuantización.

A continuación, enumeramos los resultados que hemos obtenido:

- Mostramos la estructura Lie-Poisson en el sector loop de la teoría, obteniendo los corchetes de Poisson para los elementos del grupo de Geroch (5.37) que concuerdan con los obtenidos en [28]. Nuestro resultado es más general, pues no usamos la hipótesis de comportamiento asintóticamente plano de la métrica.
- Construimos la matriz de monodromía extendida, 5.64, y mostramos cómo los corchetes de este nuevo objeto contiene la información del álgebra de Poisson de los datos iniciales que definimos en el capítulo 2. Mostramos además que la acción del grupo de Geroch sobre la matriz de monodromía extendida es Lie-Poisson, indicando que el espacio de fase y el grupo de Geroch forman un doble clásico asociado al álgebra de Kac-Moody  $A_1^1$ .
- Como resultado en la teoría cuántica, mostramos la existencia de una simetría a nivel cuántico que actúa de manera análoga a la simetría del grupo de Geroch en las matrices de monodromía, 6.31.

El primer resultado nos sirve, por un lado, como comparación con la bibliografía previa ([30]) y, por otro, como primer paso para comprender la estructura subyacente del modelo, requisito indispensable si pretendemos extender los resultados de [19].

La construcción de la matriz de monodromía extendida está basada en la definición que hacen Breitenlohner y Maison en [6], y más tarde Nicolai en [35], a partir de la cual hallan la fórmula 4.88. Una diferencia radica en que su expresión considera el valor de  $\sigma$ , el exponente conforme, en una curva espacial, mientras que nuestro dato inicial es  $\sigma_0$  sobre la intersección de las dos hojas nulas,  $S_0$ ; el elemento central lo llamamos  $k$  por analogía con los trabajos previos que mencionamos. La otra diferencia es que agregamos un factor que contiene a la densidad de área de  $S_0$ , que llamamos  $\rho_0$ . Esta idea la extrajimos del análisis que hacen Nicolai y Julia en

[22], y más tarde Bernard y Julia en [4]. En nuestro caso, no tenemos explícitamente las simetrías que provienen del álgebra de Virasoro, gracias a que el dilatón está en el gauge de Weyl (tomamos como coordenadas a las funciones  $\rho^\pm$ ). Sólo aparece la derivación  $\partial_0$  (ver apéndice C), que es el elemento que acompaña a  $k$  en la extensión central del álgebra loop. De esta manera, el resultado al que llegamos es que la matriz de monodromía extendida es un elemento de la exponencial del álgebra de Kac-Moody  $A_1^1$ .

Sobre el resultado de una simetría cuántica que en el límite clásico se reduce a la simetría clásica del grupo de Geroch sobre las matrices de monodromía, observamos que es lo esperable.

Las líneas de investigación que surgen del presente trabajo son varias y extensas, dando lugar a una amplia gama de trabajo. Entre las futuras investigaciones que se pueden realizar, remarcamos las siguientes:

- Investigar si podemos extender nuestro estudio de manera de incorporar las constantes de twist, que mencionamos en la introducción, ya que con estos tendríamos todos los datos de la teoría general sin simetría en el modelo con simetría cilíndrica.
- Estudiar las álgebras cuánticas (por deformación) posibles para el doble clásico que obtuvimos.
- Buscar representaciones sobre cierto espacio de Hilbert que realicen la cuantización algebraica.
- Estudiar las propiedades del operador  $\hat{\rho}_0$ , la densidad de área en  $S_0$ . En particular, su espectro.

# Apéndice A: Miscelánea

## A.1. Fórmulas para derivadas de Lie

Derivada de Lie en términos de la conexión:

$$\mathcal{L}_X u^{a_1 a_2 a_3 \dots}_{b_1 b_2 b_3 \dots} = X^c \nabla_c u^{a_1 a_2 a_3 \dots}_{b_1 b_2 b_3 \dots} + \sum_i u^{a_1 \dots a_{i-1} c \dots}_{b_1 b_2 b_3 \dots} \nabla_c X^{a_i} + \sum_i u^{a_1 a_2 a_3 \dots}_{b_1 \dots b_{i-1} c \dots} \nabla_{b_i} X^c \quad (\text{A.1})$$

En el caso particular de una 1-forma, la fórmula anterior resulta:

$$\mathcal{L}_X u_a = X^b \nabla_b u_a + u_b \nabla_a X^b \quad (\text{A.2})$$

Una demostración de las mismas se puede ver en [48], Apéndice C

## A.2. Variedades pseudo-Riemannianas

**Definición A.1.** Una variedad diferenciable de dimensión  $n$  es un conjunto  $M$  y una familia de mapas  $\phi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \mapsto M$  de abiertos de  $\mathbb{R}^n$  en  $M$  tales que:

1.  $\bigcup_\alpha \phi_\alpha(U_\alpha) = M$ .
2. Para todo par  $\alpha, \beta$  tal que  $\phi_\alpha(U_\alpha) \cap \phi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , los conjuntos  $\phi_\alpha^{-1}(W), \phi_\beta^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^n$  son abiertos y las aplicaciones  $\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha$  son diferenciables.
3. La familia  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_\alpha$  es maximal respecto a las dos condiciones anteriores.

**Definición A.2.** Para cada  $p \in \phi_\alpha(U_\alpha) \subset M$ , los mapas  $\phi_\alpha$  se denominan *parametrizaciones* alrededor de  $p$ , y  $\phi_\alpha^{-1}$  se denominan *cartas locales* alrededor de  $p$ .

**Definición A.3.** Una *métrica pseudo-riemanniana* es una sección diferenciable  $g$  del fibrado de las formas bilineales simétricas, tal que el mapa  $\nu : M \rightarrow \mathbb{Z}$  que asocia  $p \in M$  con al signatura de  $g_p$ , es constante.

### A.3. Sistemas de coordenadas móviles y fijas

En esta sección introduciremos los conceptos de coordenadas móviles y fijas respecto a variaciones. Es central para la tesis tener esta distinción entre sistemas de coordenadas.

Sea  $\delta$  una variación del espacio de campos sobre una variedad de dimensión  $n$ ,  $M$ . Entonces, podemos escribir a  $\delta$  como el tangente a una familia uniparamétrica de campos sobre la variedad. El parámetro que usaremos será  $\lambda$ .

Llamaremos  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow M$  a las coordenadas dadas por un atlas maximal sobre la variedad, independientes del parámetro  $\lambda$ . Sean  $x : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow M$  otras coordenadas, pero que dependen de  $\lambda$ . Sea  $x_\lambda(\cdot) := x(\lambda, \cdot)$ . Para cada  $\lambda$ , tenemos el difeomorfismo  $q^{-1} \circ x_\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de cambio de coordenadas.

El ejemplo canónico es el de las coordenadas normales, que dependen de una eventual variación de la métrica, como vimos en el capítulo 2.

Sea  $f : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}$  una familia de campos escalares sobre  $M$ . Por ejemplo, la curvatura escalar es una familia de campos escalares si consideramos una familia de métricas que dependen de  $\lambda$ .

Una variación a coordenadas  $x_\lambda$  fijas la definimos como

$$\delta^{x_\lambda} [f(\lambda, q)] := [\partial_\lambda f(\lambda, q)] \circ q^{-1} \circ x_\lambda \quad (\text{A.3})$$

es decir, la variación que deja las coordenadas  $x_\lambda$  fijas de  $f$  evaluada en  $x_\lambda$  es la derivada parcial de  $f$  respecto a  $\lambda$ , evaluada en  $q$ , y luego componer con el cambio de variables  $q^{-1} \circ x_\lambda$ . La familia  $x_\lambda$  es arbitraria, la única hipótesis es que dependa suavemente de  $\lambda$ . En particular, si  $x_\lambda = q \forall \lambda \in \mathbb{R}$ , entonces tenemos las variaciones usuales, respecto a coordenadas fijas. En general omitiremos el supraíndice en el caso en que las coordenadas no dependan explícitamente de  $\lambda$ , como es el caso de las  $q$ . Por tanto, notaremos

$$\delta^q [f(q)] = \delta [f(q)]$$

en ese caso, donde por abuso de notación no escribimos la dependencia en  $\lambda$  de  $f$ .

Sin embargo, observar que la ecuación anterior implica pararse en un punto  $x_\lambda$  constante e ir moviéndose sobre él durante toda la variación, pasando por un camino de puntos en las coordenadas  $q$ .

Por otro lado, definimos la variación total de  $f$  evaluada en coordenadas  $x_\lambda$  como

$$\delta [f(\lambda, x_\lambda)] := \left[ \frac{d}{d\lambda} f(\lambda, x_\lambda) \right] \quad (\text{A.4})$$

que usando la regla de la cadena resulta

$$\delta [f(\lambda, x_\lambda)] = [\partial_\lambda f(\lambda, q)] \circ q^{-1} \circ x_\lambda + ([\nabla f(q)] \circ q^{-1} \circ x_\lambda) \cdot \nabla_\lambda x_\lambda \quad (\text{A.5})$$

donde  $\nabla_\lambda x_\lambda(\cdot) := \partial_\lambda x(\lambda, \cdot)$ ; así que, en virtud de la definición anterior,

$$\delta [f(\lambda, x_\lambda)] = \delta^{x_\lambda} [f(x_\lambda)] + ([\nabla f(q)] \circ q^{-1} \circ x_\lambda) \cdot \nabla_\lambda x_\lambda \quad (\text{A.6})$$

Observar que el último sumando del miembro derecho no es más que la derivada de Lie de  $f$  respecto al campo vectorial generador de los difeomorfismos  $q^{-1} \circ x_\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  generados por la variación de las coordenadas  $x_\lambda$ ,  $\nabla_\lambda x_\lambda$ . Llamando  $\chi$  a tal campo vectorial, obtenemos:

$$\delta [f(x_\lambda)] = \delta^{x_\lambda} [f(x_\lambda)] + [\mathcal{L}_\chi f(q)] \circ q^{-1} \circ x_\lambda \quad (\text{A.7})$$

A continuación veremos un resultado que usamos bastante, y donde pondremos en uso la descomposición que hemos hecho de las variaciones en términos de generadores de difeomorfismos conformes y de variaciones que dejan fijas las cartas en las que integramos:

**Proposición A.1.** *Sea  $\delta$  una variación arbitraria, que proviene de una familia uniparamétrica de la métrica,  $g_\lambda$ , y  $f_\lambda \in C^\infty(M)$  para todo  $\lambda$ . Sea  $\mathcal{N} \subset M$  una curva compacta suave parametrizada por una función  $x$  que depende de la solución. Entonces*

$$\delta \int_{\mathcal{N}} f dx = f(x^{-1}(x_f))\delta x(x^{-1}(x_f)) - f(x^{-1}(x_i))\delta x(x^{-1}(x_i)) + \int_{\mathcal{N}} \delta^x f dx$$

Es un resultado estándar de cálculo.

# Apéndice B: Álgebras de Kac-Moody

En este capítulo veremos algunos resultados básicos de la teoría de álgebras de Kac-Moody.

## B.1. Definiciones Básicas

En esta sección seguiremos [23], donde el lector puede encontrar las demostraciones de las proposiciones y teoremas que enunciamos, a menos que hagamos explícita la fuente bibliográfica.

**Definición B.1.** Una matriz generalizada de Cartan  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$  es tal que

$$\begin{cases} a_{ii} = 2 & \forall i = 1, \dots, n \\ a_{ij} < 0 & i \neq j \\ a_{ij} = 0 & \Rightarrow a_{ji} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

**Definición B.2.** Dada una matriz generalizada de Cartan  $A \in M_n(\mathbb{Z})$  de rango  $l$ , una realización de  $A$  es una terna  $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ , con  $\mathfrak{h}$  un  $\mathbb{C}$  espacio vectorial,  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}^*$  y  $\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\} \subset \mathfrak{h}$ , y cumplen:

$$\begin{cases} \Pi, \Pi^\vee \text{ son conjuntos linealmente independientes} \\ \alpha_j(\alpha_i^\vee) = a_{ij} \quad \forall i, j \\ n - l = \dim \mathfrak{h} - n \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

$\Pi$  es la base de raíces, y  $\Pi^\vee$  la base de coraíces. Al conjunto  $Q = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i \subset \mathfrak{h}^*$  se lo denomina reticulado de raíces, y al  $Q_+ = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}^+\alpha_i \subset \mathfrak{h}^*$

**Definición B.3.** Sea  $A$  una matriz de Cartan generalizada,  $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$  un realización. Introducimos el álgebra de Lie  $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ , de generadores  $e_i, f_i$  y  $\mathfrak{h}$ , y producto

$$\begin{cases} [e_i, f_j] = \delta_{ij}\alpha_i^\vee & \forall i, j \\ [h, h'] = 0 & \forall h, h' \in \mathfrak{h} \\ [h, e_i] = \alpha_i(h)e_i & \forall i, \forall h \in \mathfrak{h} \\ [h, f_i] = -\alpha_i(h)f_i & \forall i, \forall h \in \mathfrak{h} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Notamos por  $\tilde{\mathfrak{n}}_+, \tilde{\mathfrak{n}}_-$  a las subálgebras generadas por  $\{e_i\}$  y  $\{f_i\}$

**Teorema B.1.** 1.  $\tilde{\mathfrak{g}}(A) = \tilde{\mathfrak{n}}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \tilde{\mathfrak{n}}_+$  como espacios vectoriales.

2.  $\tilde{\mathfrak{n}}_+$  ( $\tilde{\mathfrak{n}}_-$ ) está libremente generada por  $\{e_i\}$  ( $\{f_i\}$ ).

3. El mapa  $e_i \mapsto -f_i$ ,  $f_i \mapsto -e_i$  y  $h \mapsto -h$  se puede extender de manera única a una involución  $\tilde{\omega}$  en el álgebra  $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ .

4. Si  $\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha := \{x \in \tilde{\mathfrak{g}}(A) : [h, x] = \alpha(h)x\}$ , entonces tenemos la descomposición respecto a  $\mathfrak{h}$  en espacios raíces:

$$\tilde{\mathfrak{g}}(A) = \left( \bigoplus_{\alpha \in Q_+} \tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha} \right) \oplus \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in Q_+} \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha \right) \quad (\text{B.4})$$

Además,  $\dim \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha < \infty$  y  $\tilde{\mathfrak{g}}_{\pm\alpha} \subset \tilde{\mathfrak{n}}_\pm$  para  $\alpha \in Q_+$ .

5. Entre los ideales que intersectan a  $\mathfrak{h}$  trivialmente, existe un único ideal maximal  $\mathfrak{t}$ .

**Definición B.4.** Sea  $\mathfrak{t}$  el ideal maximal del teorema anterior. Entonces definimos el álgebra de Kac-Moody asociada a la matriz  $A$  como

$$\mathfrak{g}(A) := \frac{\tilde{\mathfrak{g}}(A)}{\mathfrak{t}} \quad (\text{B.5})$$

Las subálgebras  $\mathfrak{n}_\pm$  se definen como las subálgebras de  $\mathfrak{g}(A)$  generadas por  $\{e_i\}$  y  $\{f_i\}$  respectivamente.

Los elementos  $e$ 's y  $f$ 's se denominan generadores de Chevalley de  $\mathfrak{g}(A)$ , y  $\mathfrak{h}$  la subálgebra de Cartan. La descomposición de la parte 1. del teorema se denomina *descomposición triangular*

$$\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{\alpha \in Q} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ \quad (\text{B.6})$$

Un elemento  $\alpha \in Q$  se dice *raíz* si  $\alpha \neq 0$  y  $\dim \mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ . Una inspección cuidadosa a las definiciones nos muestra las siguientes propiedades de los espacios raíz:

1.  $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{n}_\pm$  si  $\pm\alpha \in Q_+$ .

2. Si  $\alpha \in Q_+$ ,  $\mathfrak{g}_\alpha$  es el generado (como espacio vectorial) por los elementos de la forma  $[\dots [[e_{i_1}, e_{i_2}], e_{i_3}] \dots e_{i_s}]$  tal que  $\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_s} = \alpha$ . Análogo para  $\alpha \in Q_-$ , con las  $f$ 's.

La involución  $\tilde{\omega}$  pasa al cociente como  $\omega$ , con la misma acción en los generadores.

**Proposición B.2.** El centro de un álgebra de Kac-Moody  $\mathfrak{g}(A)$  es

$$\mathfrak{c} := \{h \in \mathfrak{h} : \langle \alpha_i, h \rangle = 0 \forall i = 1, \dots, n\} \quad (\text{B.7})$$

Además,  $\dim \mathfrak{c} = n - l$ .

**Definición B.5.** Una matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$  se dice simetrizable si existe una matriz diagonal invertible  $D = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)$  y una matriz simétrica  $B = (b_{ij})$  tales que

$$A = DB \quad (\text{B.8})$$

Si una matriz de Cartan es simetrizable, la definición anterior nos permite definir sin ambigüedades una forma bilineal simétrica no degenerada en  $\mathfrak{h}$ , que notaremos  $(\cdot | \cdot)$ :

$$\begin{cases} (\alpha_i^\vee | h) = \langle \alpha_i, h \rangle \forall h \in \mathfrak{h} \\ (h' | h'') = 0 \forall h', h'' \in \mathfrak{h}'' \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

donde  $\mathfrak{h}''$  es tal que  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'' \oplus \text{span}(\Pi^\vee)$ .

De las definiciones se desprende que

$$(\alpha_i^\vee | \alpha_j^\vee) = b_{ij} \beta_i \beta_j \quad (\text{B.10})$$

que está bien definido en vista de la simetrizabilidad de  $A$ .

Esta forma se puede extender a toda el álgebra  $\mathfrak{g}(A)$ . Como la forma bilineal es no degenerada en  $\mathfrak{h}$ , tenemos un isomorfismo  $\nu : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^*$  definido como

$$\nu(h)(h_1) = (h | h_1) \forall h, h_1 \in \mathfrak{h} \quad (\text{B.11})$$

**Teorema B.3.** Sea  $\mathfrak{g}(A)$  un álgebra de Lie simetrizable. Fijemos una descomposición de la matriz  $A$  como en B.5. Entonces existe una forma bilineal simétrica, no degenerada y  $\mathbb{C}$ -valuada  $(\cdot | \cdot)$  en  $\mathfrak{g}(A)$  tal que:

1.  $([x, y] | z) = (x | [y, z])$ , para todos  $x, y, z \in \mathfrak{g}(A)$ .
2.  $(\cdot | \cdot)_{\mathfrak{h}}$  está definida como antes.
3.  $(\mathfrak{g}_\alpha | \mathfrak{g}_\beta) = 0$  si  $\alpha + \beta \neq 0$ .
4.  $(\cdot | \cdot)_{\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}}$  es no degenerada para  $\alpha \neq 0$ .
5.  $[x, y] = (x | y) \nu^{-1}(\alpha)$  para  $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}, y \alpha \in \Delta$ .

El resultado siguiente nos muestra la compatibilidad entre las definiciones hasta ahora y la teoría clásica de las álgebras de Lie de dimensión finita.

**Proposición B.4.** La matriz de Cartan  $A$  se escribe en términos de la forma  $(\cdot | \cdot)$  evaluada en las raíces:

$$A = \left( \frac{2(\alpha_i | \alpha_j)}{(\alpha_i | \alpha_i)} \right)_{ij} \quad (\text{B.12})$$

### B.1.1. Elemento de Casimir

Dado un  $\mathfrak{g}(A)$ -módulo  $V$ , definiremos un operador  $\Omega$ , llamado elemento de Casimir u operador de Casimir, de la siguiente manera.

Tomamos una funcional  $\rho \in \mathfrak{h}^*$  tal que

$$\rho(\alpha_i^\vee) = \frac{1}{2}a_{ii} \quad (\text{B.13})$$

Si  $\det A = 0$ , no habrá una única solución, sin embargo tomamos cualquiera de las posibles.

Sean  $u_1, \dots$  y  $u^1, \dots$  bases duales de  $\mathfrak{h}$ . Definimos

$$\Omega = 2\nu^{-1}(\rho) + \sum_i u^i u_i + 2 \sum_{\alpha \in Q_+} \sum_i e_{-\alpha}^{(i)} e_{\alpha}^{(i)} \quad (\text{B.14})$$

**Teorema B.5.** *Si  $V$  es un  $\mathfrak{g}(A)$ -módulo que cumple, para todo  $v \in V$ ,  $\mathfrak{g}_{\alpha}(v) = 0$  para toda raíz positiva  $\alpha$  excepto finitas, entonces  $\Omega$  conmuta con la acción de  $\text{Lieg}(A)$ .*

Por último, veremos las relaciones de Serré para los generadores de Chevalley:

**Proposición B.6.** *Dada un álgebra de Kac-Moody  $\mathfrak{g}(A)$  con generadores de Chevalley  $e_i, f_i$ , se cumple ( $i \neq j$ ):*

$$\begin{aligned} (ad_{e_i})^{1-a_{ij}} e_j &= 0 \\ (ad_{f_i})^{1-a_{ij}} f_j &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

## B.2. Álgebras afines como extensiones centrales de álgebras loop

Durante el cuerpo principal de la tesis hicimos uso de muchas construcciones y propiedades de las álgebras loop, y de sus extensiones centrales. Es por esto que agregamos esta sección al apéndice, para poder dar definiciones precisas de los elementos matemáticos que mencionamos en los capítulos de la tesis.

### B.2.1. Extensiones Centrales

Una extensión central de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es una secuencia exacta corta de álgebras de Lie:

$$0 \rightarrow \mathfrak{c} \rightarrow \hat{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow 0 \quad (\text{B.16})$$

tal que  $\mathfrak{c} \subset Z(\hat{\mathfrak{g}})$ , el centro de  $\hat{\mathfrak{g}}$ . Como espacios vectoriales,  $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{c}$ .

Sea  $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{c}$  una forma bilineal  $\mathfrak{c}$ -valuada que cumple las siguientes propiedades

1.  $\beta(x, y) = -\beta(y, x)$
2.  $\beta(x, [y, z]) + \beta(y, [z, x]) + \beta(z, [x, y]) = 0$

Entonces, el álgebra  $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{c}$  es un álgebra de Lie con el corchete dado por:

$$[(g, x), (h, y)] = ([g, h], \beta(g, h)), \quad \forall g, h \in \mathfrak{g}, x, y \in \mathfrak{c} \quad (\text{B.17})$$

Las extensiones centrales están clasificadas por la dimensión del espacio cociente entre cociclos y cobordes, i.e., la clase de cohomología determina las extensiones centrales.

### B.2.2. Álgebras Loop

Sea  $\mathcal{L} := \mathbb{C}[t, t^{-1}]$  el álgebra de polinomios de Laurent en la variable  $t$ , i.e., polinomios  $P = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k t^k$  tales que finitos  $c_k$  son no nulos.

El residuo es una funcional de  $\mathcal{L}$ , que llamaremos  $Res$ , definida por:

$$Res \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k t^k \right) = c_{-1} \quad (\text{B.18})$$

Consideremos la forma bilineal  $\phi : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\phi(P, Q) := Res \left( \frac{dP}{dt} Q \right), \quad (\text{B.19})$$

es antisimétrica, y además cumple

$$\phi(PQ, R) + \phi(QR, P) + \phi(RP, Q) = 0 \quad \forall P, Q, R \in \mathcal{L} \quad (\text{B.20})$$

**Definición B.6.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de simple de tipo finito, asociada a la matriz de Cartan  $A$ . El álgebra loop de  $\mathfrak{g}$  es

$$\hat{\mathfrak{g}} := \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} \quad (\text{B.21})$$

con corchete definido como

$$[P \otimes x, Q \otimes y] = PQ \otimes [x, y] \quad \forall P, Q \in \mathcal{L}, x, y \in \mathfrak{g} \quad (\text{B.22})$$

**Observación B.1.** Se puede identificar el álgebra loop con el álgebra de mapas racionales  $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathfrak{g}$ , de manera que el elemento  $\sum_i t^i \otimes x_i$  corresponde al mapa  $z \mapsto \sum_i z^i x_i$ .

La forma bilineal en  $\mathfrak{g}$  se extiende de manera natural a  $\hat{\mathfrak{g}}$ , como una forma bilineal  $\mathcal{L}$ -valuada, que notaremos  $(. | .)_t$ :

$$(P \otimes x | Q \otimes y)_t = PQ(x | y) \quad (\text{B.23})$$

Además, toda derivación  $D$  de  $\mathcal{L}$  la podemos extender a  $\hat{\mathfrak{g}}$  como

$$D(P \otimes x) = D(P) \otimes x \quad (\text{B.24})$$

Ahora estamos en condiciones de definir el 2-cociclo necesario para realizar la extensión central:

**Definición B.7.** El 2-cociclo  $\beta$ ,  $\mathbb{C}$ -valuado

$$\beta(a, b) = \text{Res} \left( \left( \frac{da}{dt} \mid b \right)_t \right), \quad \forall a, b \in \hat{\mathfrak{g}} \quad (\text{B.25})$$

Es sencillo comprobar que  $\beta$  cumple las condiciones de cociclo. Observar que para  $a = P \otimes x$  y  $b = Q \otimes y$  la fórmula de  $\beta$  es

$$\beta(a, b) = \phi(P, Q)(a \mid b) \quad (\text{B.26})$$

**Definición B.8.** Sea  $\tilde{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}K$  la extensión central (a una dimensión más) de  $\hat{\mathfrak{g}}$  por el cociclo  $\beta$ , con el corchete dado por

$$[a + \lambda K, b + \mu K] = [a, b]_{loop} + \beta(a, b)K \quad (\text{B.27})$$

Por último, agregamos una derivación  $d := \frac{d}{dt}$ , de manera que conmuta con  $K$ . De esta manera, contruimos el álgebra  $\widehat{\mathcal{L}(\mathfrak{g})}$  con el siguiente corchete

$$[a + \lambda K + \mu d, b + \lambda' K + \mu' d] = \left( [a, b]_{loop} + \mu \frac{d}{dt} b - \mu' \frac{d}{dt} a \right) + m \delta_{n, -m}(x \mid y)K \quad (\text{B.28})$$

**Proposición B.7.** Las siguientes son algunas propiedades del álgebra  $\widehat{\mathcal{L}(\mathfrak{g})}$ :

1. La subálgebra de Cartan es  $\mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$ .
2. El centro es  $\mathbb{C}K$ .
3. Los generadores de Chevalley son

$$\begin{cases} E_0 = t \otimes e_0 & F_0 = t^{-1} \otimes f_0 \\ E_i = 1 \otimes e_i & F_i = 1 \otimes f_i \end{cases}$$

para  $F_0 \in \mathfrak{g}_\theta$  ( $\theta$  raíz más alta del sistema de raíces de  $\mathfrak{g}$ ) que cumple  $(F_0 \mid \omega(F_0)) = -\frac{2}{\langle \theta, \theta \rangle}$ .  $E_0 = -\omega(F_0)$ .

La forma bilineal invariante en  $\widehat{\mathcal{L}(\mathfrak{g})}$  es la extensión de  $(. \mid .)$  de  $\mathfrak{g}$ , como sigue:

$$(P \otimes x \mid Q \otimes y) = \text{Res}(PQ)(x \mid y) \quad (\text{B.29})$$

$$(\mathbb{C}K + \mathbb{C}d \mid \hat{\mathfrak{g}}) = 0 \quad (\text{B.30})$$

$$(K \mid K) = (d \mid d) = 0 \quad (\text{B.31})$$

$$(K \mid d) = 1 \quad (\text{B.32})$$

**Teorema B.8.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie compleja de dimensión finita, y  $A$  la matriz de Cartan extendida de  $\mathfrak{g}$ . Entonces  $\widehat{\mathcal{L}(\mathfrak{g})}$  es un álgebra de Kac-Moody asociada a la matriz afín  $A$ . De esta manera se obtienen todos los casos de álgebra de Kac-Moody afines sin twist:  $X_l^{(1)}$ .

Veamos a continuación explícitamente cómo queda el corchete entre dos elementos de  $\widehat{\mathcal{L}(\mathfrak{g})}$  para el caso en que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}_n$ . Si  $A \otimes t^n + \lambda K$  y  $B \otimes t^m + \mu K$  son dos elementos de  $\widehat{\mathcal{L}(\mathfrak{g})}$ , entonces

$$[A \otimes t^n + \lambda K, B \otimes t^m + \mu K] = t^{m+n}[A, B] + \delta_{m+n,0} m \text{Tr}(AB)K \quad (\text{B.33})$$

Esta ecuación es la que usamos para deducir la presencia de una extensión central del álgebra loop en la acción infinitesimal del grupo de Geroch, cf. proposición 4.9.

### B.2.3. Ejemplo 1: $A_1^1$

Analizaremos el caso más sencillo de álgebra de Kac-Moody no finita: la extensión afín de  $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ .

$$\mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) = \{X \in M_2(\mathbb{C}) : \text{Tr}(X) = 0\} \quad (\text{B.34})$$

Como espacio vectorial, tiene dimensión 3. Los generadores son las matrices de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.35})$$

Notaremos por  $e_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)$ ,  $f_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y)$  y  $h_1 = \sigma_z$ . Entonces tenemos las siguientes relaciones de conmutación

$$[h_1, h_1] = 0 \quad (\text{B.36})$$

$$[h_1, e_1] = 2e_1 \quad (\text{B.37})$$

$$[h_1, f_1] = -2f_1 \quad (\text{B.38})$$

$$[e_1, f_1] = h_1 \quad (\text{B.39})$$

Que se corresponden a las relaciones de conmutación para el álgebra de Kac-Moody asociada a  $A = (2)$ .

La forma bilineal es la traza, que notamos  $\text{Tr}$ :

$$(h_1 | h_1) = \text{Tr}(h_1^2) = 2 = a_{11} \quad (\text{B.40})$$

La descomposición triangular está dada por

$$\mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}e_1 \quad (\text{B.41})$$

Sea  $\alpha_1$  la funcional dual a  $h_1$ . Entonces  $\alpha$  y  $-\alpha$  son las dos raíces, y por lo tanto la raíz más alta es  $\alpha$ .

Entonces  $F_0 = \mu e_1$ , para algún  $\mu$  que vamos a calcular a continuación:

$$-1 = -\frac{2}{(\alpha | \alpha)} = (F_0 | \omega(F_0)) = -\mu^2(e_0 | f_0) = -\mu^2 \quad (\text{B.42})$$

así que  $\mu = \pm 1$ . Fijemos  $\mu = 1$ . Por tanto  $E_0 = -\omega(e_1) = f_1$ .

Es una comprobación ver que  $-h_1 = [E_0, F_0]$ .

Tenemos entonces que los generadores del álgebra  $A_1^1$  son  $e_0 = t \otimes f_1, f_0 = t^{-1} \otimes e_1, e_1, f_1, h_1, K, d$ .

Calculemos  $[e_0, f_0]$ :

$$h_0 := [e_0, f_0] = [t \otimes f_1, t^{-1} \otimes e_1] \quad (\text{B.43})$$

$$= [f_1, e_1] + (f_1 | e_1)K \quad (\text{B.44})$$

$$= -h_1 + K \quad (\text{B.45})$$

Esto nos da la otra raíz: el vector dual a  $h_0 = K - h_1$ , que es  $\alpha_0 = \delta - \alpha_1$ , siendo  $\delta$  el dual a  $d$ .

Entonces la matriz de Cartan asociada a  $\mathcal{L}(\widehat{\mathfrak{su}}_2(\mathbb{C}))$  es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.46})$$

### B.2.4. Ejemplo 2: álgebra de Virasoro

El álgebra de Virasoro,  $Vir$ , es la extensión central (con centro de dimensión uno) del álgebra de Lie  $Vect(S^1)$  de campos vectoriales complejos suaves en el círculo  $S^1$ , con el corchete dado por:

$$[f(\theta)\partial_\theta, g(\theta)\partial_\theta] = (f(\theta)g'(\theta) - f'(\theta)g(\theta))\partial_\theta \quad (\text{B.47})$$

La extensión está definida por el cociclo

$$\beta(f(\theta)\partial_\theta, g(\theta)\partial_\theta) = \frac{i}{12} \int_0^{2\pi} (f'''(\theta) + f'(\theta))g(\theta)d\theta \quad (\text{B.48})$$

entonces,  $Vir = Vect(S^1) \oplus \mathbb{C}c$  como espacios vectoriales, siendo  $c$  el generador del centro, y

$$[f(\theta)\partial_\theta, g(\theta)\partial_\theta] = (f(\theta)g'(\theta) - f'(\theta)g(\theta))\partial_\theta + \frac{ic}{12} \int_0^{2\pi} f'''(\theta)g(\theta)d\theta \quad (\text{B.49})$$

Si tomamos los generadores

$$d_k := \theta^{k+1}\partial_\theta \quad (\text{B.50})$$

el corchete B.49 adquiere la fórmula conocida

$$[d_j, d_k] = (j - k)d_{j+k} + \frac{i}{12}(j^3 - j)\delta_{j,-k}c, \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (\text{B.51})$$

Para un álgebra loop  $\widehat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ , se puede definir el producto semidirecto con  $Vir$ , que notamos  $\widehat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}) \rtimes Vir$ , de manera que como espacio vectorial es isomorfo a  $\widehat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}) \times Vir$ , los corchetes están dados por B.49, B.28, y los corchetes cruzados son los

correspondientes a  $d_k$  actuando como derivaciones sobre  $\widehat{\mathcal{L}(\mathfrak{g})}$  (de ahí que el producto sea semidirecto):

$$[d_k, P(t) \otimes x + \lambda K] = -t^{k+1} \frac{dP}{dt}(t) \otimes x \quad (\text{B.52})$$

y  $d_0 = -d$ , el otro generador del centro de  $\widehat{\mathcal{L}(\mathfrak{g})}$ . Esta definición es la que se usa en la demostración de la proposición 4.11.

**Observación B.2.** Definiendo  $d_k := \theta^k \partial_\theta$  se obtienen relaciones parecidas, y corresponde a un reescalo del factor frente al elemento central.

# Apéndice C: Doble clásico y cuantización por deformación

## C.1. Introducción: cuantización *a la* Drinfel'd

En este apéndice estudiaremos las estructuras que hemos identificado y utilizado a lo largo de la tesis: grupos de Poisson-Lie, acciones de Lie-Poisson, biálgebras de Lie y su cuantización. Seguiremos los artículos [47], [1] y [31], y los libros [8] y [41].

El formalismo necesario para la cuantización según Drinfel'd ([11]) es el de las *álgebras de Hopf*. Naturalmente se puede definir una biálgebra de Lie en este contexto, y el concepto de *deformación* del álgebra nos permite definir una *cuantización*.

Como ejemplo, veremos la cuantización de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ , los Yangianos, y sus extensiones centrales.

## C.2. Álgebras de Hopf

**Definición C.1.** Un álgebra asociativo con unidad es un espacio vectorial  $A$  munido de dos mapas lineales en cada uno de sus argumentos

$$m : A \otimes A \rightarrow A \tag{C.1}$$

$$\eta : \mathbb{C} \rightarrow A \tag{C.2}$$

tales que

1.  $m$  y  $\eta$  son operadores lineales.
2. Asociativa:  $m(m \otimes 1) = m(1 \otimes m)$ .
3. Unidad:  $m(1 \otimes \eta) = m(\eta \otimes 1) = id$ .

**Observación C.1.** El mapa  $\eta$  se denomina la unidad del álgebra, pues  $\eta(z) = z \cdot 1_A$ , donde  $1_A = \eta(1)$ .

**Definición C.2.** Una co-multiplicación  $\Delta$  en  $A$  es un mapa lineal

$$\Delta : A \rightarrow A \otimes A \tag{C.3}$$

tal que

1. Homomorfismo de álgebras:  $\Delta \circ m = (m \otimes m) \circ \Delta$ .
2. Co-asociativa:  $(\Delta \otimes id)\Delta = (id \otimes \Delta)\Delta$ .

**Definición C.3.** Una co-unidad  $\varepsilon$  es un mapa  $\varepsilon : A \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $(1 \otimes \varepsilon)\Delta = (\varepsilon \otimes 1)\Delta = id_A$ .

**Definición C.4.** Una quintupla  $(A, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$  se denomina *biálgebra*.

**Definición C.5.** Un álgebra de Hopf es una biálgebra  $(A, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$  junto con el mapa *antipodal*  $S : A \rightarrow A$ , que cumple la siguiente propiedad:

$$m(S \otimes id)\Delta = m(id \otimes S)\Delta = \eta \circ \varepsilon \tag{C.4}$$

Comencemos con algunos ejemplos:

**Ejemplo C.1.** Sea  $G$  un grupo topológico compacto. Consideramos el espacio de funciones continuas  $C^0(G)$  junto con los siguientes mapas:

- $m(f, g)(x) = f(x)g(x), \forall x \in G, f, g \in C^0(G)$ .
- $\Delta(f)(x \otimes y) = f(xy), \forall x, y \in G, f \in C^0(G)$ .
- $\eta(z) = z1_G, \forall z \in \mathbb{C}$ , donde  $1_G$  es la función identidad en  $C^0(G)$ .
- $\varepsilon(f) = f(e), \forall f \in C^0(G)$ , donde  $e$  es el elemento neutro de  $G$ .
- $S(f)(x) = f(x^{-1}), \forall x \in G, f \in C^0(G)$ .

Entonces  $(C^0(G), m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$  es un álgebra de Hopf.

**Ejemplo C.2.** Sea  $L$  un álgebra de Lie y  $\mathcal{U}(L)$  su álgebra envolvente universal. Entonces  $\mathcal{U}(L)$  junto con las siguientes operaciones es un álgebra de Hopf:

- $m$  es la multiplicación usual de  $\mathcal{U}(L)$ .
- $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \forall x \in \mathcal{U}(L)$ .
- $\eta(z) = z1, \forall z \in \mathbb{C}$ .
- $\varepsilon(1) = 1$  y cero para los demás elementos linealmente independientes de 1 de  $\mathcal{U}(L)$ .
- $S(x) = -x, \forall x \in L \subset \mathcal{U}(L)$ .

El siguiente teorema es un resultado muy importante de la teoría, pues relaciona las funcionales de un grupo con el álgebra envolvente universal del álgebra de Lie del grupo.

**Teorema C.1.** *Sea  $G$  un grupo de Lie,  $L$  su álgebra de Lie. Entonces existe un mapa lineal inyectivo de  $C^\infty(G)$  en  $(\mathcal{U}(L))^*$ .*

*Demostración.* La idea de la demostración se puede encontrar en [47], Teorema 1. □

## C.3. Álgebras de Poisson

**Definición C.6.** Un álgebra de Poisson es un álgebra conmutativa  $(A, m, \eta)$  junto con el mapa

$$\{.,.\} = A \times A \rightarrow A \quad (\text{C.5})$$

tal que

1.  $A$  es un álgebra de Lie respecto a  $\{.,.\}$ .
2.  $\{ab, c\} = a\{b, c\} + \{a, c\}b$ .

Definamos el mapa de intercambio  $\tau : A \otimes A \rightarrow A \otimes A$  como  $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$ ,  $\forall x, y \in A \otimes A$ . Entonces, por la propiedad universal del producto tensorial, el mapa  $\{.,.\}$  define  $\gamma : A \otimes A \rightarrow A$  tal que las propiedades de  $\{.,.\}$  en términos de  $\gamma$  son:

1. Antisimetría:  $\gamma \circ \tau = -\gamma$ .
2. Identidad de Jacobi:  $\gamma(1 \otimes \gamma)(1 \otimes 1 \otimes 1 + (1 \otimes \tau)(\tau \otimes 1) + (\tau \otimes 1)(1 \otimes \tau)) = 0$ .
3. Leibniz:  $\gamma(m \otimes 1) = m(1 \otimes \gamma)(1 \otimes 1 \otimes 1 + \tau \otimes 1)$ .

**Definición C.7.** Dadas dos álgebras de Poisson,  $(A, m_A, \gamma_A)$  y  $(B, m_B, \gamma_B)$ , decimos que un mapa  $f : A \rightarrow B$  es un homomorfismo de álgebras de Poisson si:

- $f \circ m_a = m_B \circ (f \otimes f)$ .
- $f \circ \gamma_A = \gamma_B \circ (f \otimes f)$ .

**Ejemplo C.3.** Un álgebra de Lie que tenga representación matricial, en ese caso el producto  $m$  es el producto matricial usual, y el corchete de Lie el conmutador.

**Observación C.2.** Si  $A$  y  $B$  son álgebras de Poisson, entonces  $A \otimes B$  también lo es con el corchete

$$\gamma_{A \otimes B} \equiv (\gamma_A \otimes m_B + m_A \otimes \gamma_B)(1 \otimes \tau \otimes 1) \quad (\text{C.6})$$

**Definición C.8.** Un álgebra de Poisson Hopf (biálgebra de Poisson) es un álgebra de Hopf (biálgebra) con estructura de Poisson compatible con el coproducto, de la siguiente forma:

$$\gamma_{A \otimes A} \circ (\Delta \otimes \Delta) = \Delta \circ \gamma_A \quad (\text{C.7})$$

**Definición C.9.** Una biálgebra de co-Poisson es una biálgebra co-conmutativa  $(A, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$  junto con un mapa  $\delta : A \rightarrow A \otimes A$  tal que

1. Co-antisimetría:  $\tau \circ \delta = -\delta$ .
2. Identidad de co-Jacobi:  $(1 \otimes 1 \otimes 1 + (1 \otimes \tau)(\tau \otimes 1) + (\tau \otimes 1)(1 \otimes \tau))(1 \otimes \delta)\delta = 0$
3. Co-Leibniz:  $(\Delta \otimes 1)\delta = (1 \otimes 1 \otimes 1 + \tau \otimes 1)(1 \otimes \delta)\Delta$ .
4.  $m$  es homomorfismo de álgebras de co-Poisson:  $(m \otimes m) \circ \delta_{A \otimes A} = \delta \circ m$ .

donde  $\delta_{A \otimes A} = (1 \otimes \tau \otimes 1)(\delta \otimes \Delta + \Delta \otimes \delta)$  es la estructura de co-Poisson en el producto tensorial  $A \otimes A$ .

## C.4. Grupos Poisson-Lie y biálgebras de Lie

**Definición C.10.** Un grupo de Lie  $G$  se dice grupo de Poisson-Lie si  $C^\infty(G)$  es una álgebra de Poisson-Hopf.

**Observación C.3.** Vemos entonces que el corchete de Poisson tiene que cumplir cierta relación de compatibilidad con el coproducto, y que por tanto no todo corchete de Poisson en  $C^\infty(G)$  da lugar a un grupo de Poisson-Lie.

Sea  $G$  un grupo de Lie de dimensión finita,  $L$  su álgebra de Lie y  $\{X_a\}_{a=1}^{\dim G}$  un conjunto de campos vectoriales invariantes a derecha de  $G$ , tal que  $\{X_a(g)\}_{a=1}^{\dim G} \subset T_g G$  es una base. Entonces un corchete de Poisson en  $C^\infty(G)$  se puede expresar en términos de  $\eta : G \rightarrow L \otimes L$ , pues como  $\{\phi, \cdot\} : C^\infty(G) \rightarrow C^\infty(G)$  es una derivación, se deduce que

$$\{\phi, \psi\}(g) = \sum_{ab} \eta^{ab}(g) X_a(\phi)(g) X_b(\psi)(g) \quad \forall g \in G, \phi, \psi \in C^\infty(G) \quad (\text{C.8})$$

de donde

$$\{\phi, \psi\}(g) = \sum_{ab} \eta^{ab}(g) (d\phi(g) \otimes d\psi(g)) (X_a(g) \otimes X_b(g)) \quad \forall g \in G, \phi, \psi \in C^\infty(G) \quad (\text{C.9})$$

Así que  $\eta : G \rightarrow L \otimes L$ , que mapea  $g \mapsto \sum_{ab} \eta^{ab}(g) X_a(g) \otimes X_b(g)$ .

Como es usual, podemos identificar  $X_a(g)$  con  $X_a(e)$ , pues este último determina  $X_a$  en todo el grupo gracias a la traslación por derecha; podemos entonces a partir de ahora omitir el argumento en  $X_a$ , sin riesgo a ambigüedades.

**Definición C.11.** Dados los espacios de mapas

$$C^n(G; L) := \{\lambda : G^n \rightarrow L \otimes L\} \quad (\text{C.10})$$

se definen los operadores de coborde  $\delta_G : C^n(G; L) \rightarrow C^{n+1}(G; L)$  como

$$(\delta_G \lambda)(g_1, \dots, g_{n+1}) = g_1 \cdot \lambda(g_2, \dots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} \lambda(g_1, \dots, g_n) \quad (\text{C.11})$$

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \lambda(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) \quad (\text{C.12})$$

donde la acción de  $G$  en  $L \otimes L$  es la usual:  $g \cdot X \otimes Y = Ad_g X \otimes Ad_g Y := Ad_g^2(X \otimes Y)$ .

Se verifica la identidad  $\delta_G^2 \equiv 0$ , como es usual para los operadores de coborde.

**Definición C.12.** Sea  $\lambda \in C^n(G; L)$  para algún  $n$ . Se dice que  $\lambda$  es un cociclo si  $\delta_G \lambda = 0$ ; se dice que  $\lambda$  es un coborde si existe  $\mu \in C^{n-1}(G; L)$  tal que  $\delta \mu = \lambda$ .

**Proposición C.2.** Sea  $\eta : G \rightarrow L \otimes L$  el mapa asociado al corchete de Poisson en  $C^\infty(G)$ . Entonces la ecuación de compatibilidad para el corchete y el álgebra de Hopf es equivalente a la condición de cociclo para  $\eta$ :  $\delta_G \eta = 0$ .

**Definición C.13.** Sea  $\phi_n : L \rightarrow L \otimes L$  el mapa

$$\phi_\eta(X) := \frac{d}{dt}\eta(e^{tX})|_{t=0} \quad (\text{C.13})$$

El mapa  $\phi_\eta$  es una 1-cocadena en la cohomología de álgebras de Lie.

**Proposición C.3.** *Sea  $G$  un grupo de Lie-Poisson. Entonces  $\phi_\eta$  cumple las siguientes propiedades:*

1.  $\phi_\eta$  es co-antisimétrico.
2.  $\phi_\eta$  cumple la identidad de co-Jacobi.
3.  $\phi_\eta$  es un 1-cociclo, i.e., la 2-cocadena  $\delta\phi_\eta$  se anula:

$$0 = ad_X^2(\phi_\eta(Y)) - ad_Y^2(\phi_\eta(X)) - \phi_\eta([X, Y]) \quad (\text{C.14})$$

donde  $ad_X^2(Y \otimes Z) = [X, Y] \otimes Z + Y \otimes [X, Z]$ .

**Definición C.14.** Una biálgebra de Lie es un álgebra de Lie  $L$  junto con un mapa  $\phi : L \rightarrow L \otimes L$  que cumple las propiedades 1,2 y 3 de la proposición anterior.

La definición anterior es análoga al contexto general, ver [31].

## C.5. Ejemplo: el doble clásico

La construcción dada en esta sección es para álgebras de Lie de dimensión finita, pero la misma se generaliza naturalmente para álgebras de Lie de Kac-Moody. Ver los capítulos 2 y 3 de [8] para más detalles.

Comenzaremos observando que la condición de cociclo  $\delta_G\eta$  se cumple trivialmente si es un coborde, i.e., si existe  $r \in L \otimes L$  tal que  $\eta = \delta_G r$ .

En términos de cohomología del álgebra de Lie  $L$ , esta condición implica (ver [47] para más detalles) que se cumple la siguiente ecuación en el álgebra envolvente universal:

$$\phi_\eta(X) = [r, 1 \otimes X + X \otimes 1] = \left[ r, \overset{1}{X} + \overset{2}{X} \right] \quad (\text{C.15})$$

donde estamos haciendo uso de la notación tensorial de índices libres, que identifica los operadores  $S \otimes T$  con  $\overset{1}{S}\overset{2}{T}$ , indicando con el índice el espacio del producto tensorial donde actúa cada operador. Por convención,  $\overset{1}{X} = X \otimes 1$  y  $\overset{2}{X} = 1 \otimes X$ .

El siguiente resultado nos garantiza una condición necesaria y suficiente para que  $r$  determine una  $\phi$  que sea co-antisimétrica y cumpla la identidad co-Jacobi.

**Teorema C.4.** Sea  $L$  un álgebra de Lie y  $r$  un elemento de  $L \otimes L$ , que escribiremos  $r = r^{ab} X_a \otimes X_b$ . Definimos

$$r_+ = \frac{1}{2}(r^{ab} + r^{ba})X_a \otimes X_b \quad (\text{C.16})$$

$$r_- = \frac{1}{2}(r^{ab} - r^{ba})X_a \otimes X_b \quad (\text{C.17})$$

$$r_{12} = r^{ab} X_a \otimes X_b \otimes 1 \quad (\text{C.18})$$

$$r_{13} = r^{ab} X_a \otimes 1 \otimes X_b \quad (\text{C.19})$$

$$r_{23} = r^{ab} 1 \otimes X_a \otimes X_b \quad (\text{C.20})$$

Entonces el mapa  $\phi : L \rightarrow L \otimes L$  dado por

$$\phi(X) = [r, 1 \otimes X, X \otimes 1], \quad \forall X \in L \quad (\text{C.21})$$

convierte a  $L$  en una biálgebra de Lie si y sólo si

1.  $r_+$  es  $Ad$ -invariante, i.e.,  $Ad_g^2(r_+) = r_+$ .

2.  $B = [r_{12}, r_{13}] + [r_{13}, r_{23}] + [r_{12}, r_{23}]$  es  $Ad$ -invariante, i.e.,  $Ad_g^3(B) = 0$

**Definición C.15.** El caso en que  $B = 0$  corresponde a la ecuación clásica de Yang-Baxter, mientras que la generalización  $Ad_g^3(B) = 0$  se denomina ecuación modificada clásica de Yang-Baxter.

A partir de ahora, asumiremos que  $L$  es semisimple, y que tiene una forma bilineal invariante no degenerada  $\text{Tr}$ , y cuyas componentes notaremos  $\kappa_{ab}$ . Asumiremos que  $\{X_a\}_{a=1}^{\dim L}$  es una base ortonormal respecto a  $\text{Tr}$ . Notaremos por  $\Omega = \sum_{a=1}^{\dim L} X_a \otimes X_a$  al elemento de Casimir en  $\mathcal{U}(L)$ , y  $f_c^{ab}$  las constantes de estructura del álgebra de Lie:  $[X^a, X^b] = f_c^{ab} X^c$ .

**Observación C.4.** Observar que sumar o restar  $\Omega$  en  $r^+$  mantiene las condiciones necesarias y suficientes, debido a la propiedad de  $\Omega$  de ser  $Ad_g^2$ -invariante.

Sean  $r^+ = r^{+ab} X_a \otimes X_b$  y  $r^- = r^{-ab} X_a \otimes X_b$  dos soluciones a la ecuación clásica de Yang-Baxter, tales que

$$r^{+ab} = -r^{-ba} \quad (\text{C.22})$$

$$r^+ - r^- = \Omega \quad (\text{C.23})$$

La forma bilineal invariante nos permite definir  $R^\pm \in \text{End}(L)$  mediante

$$R^\pm(Y) = \text{Tr}_2(r_{12}^\pm(1 \otimes Y)), \quad \forall Y \in L \quad (\text{C.24})$$

Escrito en términos de índices,

$$[R^\pm(Y^c X_c)]_a = r^{\pm ac} X_a Y^d \text{Tr}(X_d X_c) \quad (\text{C.25})$$

$$= r^{\pm ac} X_a Y^d \kappa_{dc} \quad (\text{C.26})$$

así que el operador  $R^\pm = R_b^{\pm a} X_a \otimes X^b$  cumple

$$R_b^{\pm a} Y^b = r^{\pm ab} \kappa_{bc} Y^c \quad (\text{C.27})$$

para todo vector  $Y = Y^c X_c$ .

**Proposición C.5.** *Es directo que:*

$$R^+ - R^- = id_L \quad (\text{C.28})$$

$$R^+ R^- = R^- R^+ \quad (\text{C.29})$$

A partir de lo que vimos en la sección anterior, podemos construir el corchete de Poisson en las funciones suaves de  $G$  a partir de  $r^\pm$ .

**Definición C.16.** El corchete de Sklyanin se define sobre  $C^\infty(G)$  como

$$\{f_1, f_2\}_G(g) = \sum_{ab} r^{\pm ab} (X_a^R(f_1)(g) X_b^R(f_2)(g) - X_a^L(f_1)(g) X_b^L(f_2)(g)) \quad (\text{C.30})$$

donde  $X_a^R$  y  $X_b^L$  son los campos invariantes a derecha y a izquierda, respectivamente, asociados a la base  $\{X_a\}$  de  $L$ .

**Proposición C.6.** *El corchete de Sklyanin cumple las siguientes propiedades:*

1. *No depende del signo que se tome para  $r$ .*
2. *Es efectivamente un corchete de Poisson.*
3. *En una representación matricial de los elementos de  $G$ , los elementos de matriz cumplen*

$$\{g, g\}_G = \left[ r^\pm, {}^{12}g \right] \quad (\text{C.31})$$

*donde da lo mismo con cualquier elección de signo.*

*Demostración.* Ver [8] para más detalles. □

Ahora, definiremos un corchete en  $L^*$ . A partir de un corchete de Poisson en  $G$  tenemos un corchete de Lie en  $L^*$  mediante la fórmula

$$[d_e f, d_e g]_{L^*} := d_e (\{f, g\}_G) \quad (\text{C.32})$$

para todas  $f, g \in C^\infty(G)$ .

**Observación C.5.** Dualizar el corchete de Poisson  $\{.,.\}_G$  y dualizar el co-corchete de Lie  $\phi$  dan el mismo resultado.

**Proposición C.7.** *Identificando  $L$  y  $L^*$  mediante la métrica  $\kappa_{ab}$ , el nuevo corchete en  $L$  es*

$$[X, Y]_R = [R^\pm X, Y] + [X, R^\pm Y] \quad (\text{C.33})$$

$$= \frac{1}{2} ([RX, Y] + [X, RY]) \quad (\text{C.34})$$

donde  $R = R^+ + R^-$ .

**Observación C.6.** La identidad de Jacobi para  $[\cdot, \cdot]_R$  se deduce de la identidad de Jacobi para el corchete de Sklyanin, o de la identidad de co-Jacobi para el co-corchete.

De esta manera, tenemos construida una biálgebra en  $L \times L^*$ , compatible con la estructura de álgebra de Poisson Hopf de  $C^\infty(G)$ .

La siguiente proposición nos aclara la compatibilidad entre ambas estructuras de Lie en  $L$ .

**Proposición C.8.**  $R^\pm : (L, [\cdot, \cdot]) \rightarrow (L, [\cdot, \cdot]_R)$  es un homomorfismo de álgebras de Lie.

*Demostración.* Ver [43]. □

**Proposición C.9.** *El operador  $R$  cumple la ecuación modificada clásica de Yang-Baxter:*

$$[RX, RY] - 2R([X, Y]_R) = -[X, Y] \quad (\text{C.35})$$

**Definición C.17.** Sean  $\mathcal{L}_\pm := \text{Im}(R^\pm)$ . La proposición anterior garantiza que son subálgebras de Lie de  $L$ .

**Proposición C.10.** *Todo  $X \in L$  admite una descomposición de la forma*

$$X = X_+ - X_- \quad (\text{C.36})$$

para  $X_+ \in \mathcal{L}_+$ ,  $X_- \in \mathcal{L}_-$ . La descomposición es única módulo elementos de la subálgebra de Cartan de  $L$ .

**Observación C.7.**  $r^\pm \in \mathcal{L}_\pm \otimes \mathcal{L}_\mp$ .

**Proposición C.11.** *La relación entre los dos corchetes sobre  $L$  (identificando nuevamente  $L^*$  con  $L$  mediante la métrica de Cartan-Killing) es*

$$[X, Y]_R = [X_+, Y_+] + [X_-, Y_-] \quad (\text{C.37})$$

Hasta ahora tenemos: un álgebra de Poisson Hopf, tal que el álgebra de Lie es una biálgebra. Construimos el ejemplo a partir de la condición de cociclo, tomando  $\eta$  como coborde de una  $r$ . A continuación mostraremos que la matriz  $r$  también permite definir una acción de cierto grupo sobre  $G$ , y que esta acción es una acción Lie-Poisson.

**Definición C.18.** Sea  $G^*$  el grupo generado por la exponenciación del álgebra  $L, [\cdot, \cdot]_R$ . Lo podemos pensar como pares ordenados de la forma

$$G^* := \{(g_-, g_+) : g_- = e^{tX_-}, g_+ = e^{sX_+}\} \quad (\text{C.38})$$

La estructura de multiplicación es

$$(g_-, g_+) \cdot (h_-, h_+) = (g_-h_-, g_+h_+) \quad (\text{C.39})$$

**Proposición C.12.**  $G \simeq G^*$  como variedades, bajo el mapa  $(g_-, g_+) \mapsto g_-^{-1}g_+$ .

**Observación C.8.** 1. La equivalencia  $G \simeq G^*$  establece una factorización única en  $G$  (módulo el toro maximal generado por la subálgebra de Cartan).

2. El producto en  $G^*$  se entiende en términos del producto de orden normal:

$$g = : g_-^{-1}g_+ : \quad (\text{C.40})$$

$$h = : h_-^{-1}h_+ : \quad (\text{C.41})$$

$$g \times_{G^*} h = : g_-^{-1}g_+h_-^{-1}h_+ :=: g_-^{-1}h_-^{-1}g_+h_+ : \quad (\text{C.42})$$

La idea es tener un corchete de Poisson en  $G^*$  tal que al pasar a  $L^{**} \simeq L$  obtengamos el corchete de Lie original,  $[\cdot, \cdot]$ .

**Definición C.19.** El corchete de *Semenov-Tian-Shansky* sobre  $G^*$  viene dado por la fórmula (ver [44])

$$\begin{aligned} 2\{\phi, \psi\} &= (R(X^R(\phi)), X^L(\psi)) + (R(X^L(\phi)), X^R(\psi)) - \\ &\quad - (R(X^R(\phi)), X^R(\psi)) - (R(X^R(\phi)), X^L(\psi)) + \\ &\quad + (X^R(\phi), X^L(\psi)) - (X^L(\phi), X^R(\psi)) \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

donde  $(X^L(\phi)(x), \xi) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} \phi(e^{t\xi}x)$  y  $(X^R(\phi)(x), \xi) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} \phi(xe^{t\xi})$ , para todo  $\chi$  en el álgebra y  $x$  en el grupo.

En una representación matricial de  $G$  resulta:

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ g & g \end{matrix} \right\}_{G^*} = -gr^+g - gr^-g + ggr^\pm + r^\mp gg \quad (\text{C.44})$$

donde no depende de la elección de signo en los casos que indicamos  $r^\pm$ .

En términos de cada componente, podemos escribir el corchete C.44 como

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ g_+, g_+ \end{matrix} \right\}_{G^*} = - \left[ \begin{matrix} r^\pm & 1 & 2 \\ & g_+ & g_+ \end{matrix} \right] \\ \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ g_-, g_- \end{matrix} \right\}_{G^*} = - \left[ \begin{matrix} r^\mp & 1 & 2 \\ & g_- & g_- \end{matrix} \right] \\ \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ g_-, g_+ \end{matrix} \right\}_{G^*} = - \left[ \begin{matrix} r^- & 1 & 2 \\ & g_- & g_+ \end{matrix} \right] \\ \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ g_+, g_- \end{matrix} \right\}_{G^*} = - \left[ \begin{matrix} r^+ & 1 & 2 \\ & g_+ & g_- \end{matrix} \right] \end{array} \right. \quad (\text{C.45})$$

**Proposición C.13.** La multiplicación en  $G^*$  es un mapa de Poisson respecto al corchete de *Semenov-Tian-Shansky*.

*Demostración.* Ver [44] □

**Observación C.9.** 1. La proposición anterior nos indica que  $G^*$  también es un grupo de Poisson-Lie, al igual que vimos lo es  $G$  con el corchete de Sklyanin.

2. De igual manera a como hemos hecho hasta ahora, uno puede contruir un corchete de Lie en  $L^{**}$  a partir del corchete de Semenov-Tian-Shansky, y concluir que el álgebra obtenida es isomorfa (como álgebra de Lie) a  $L, [\cdot, \cdot]$ .

El producto  $G^* \times G$  es lo que se denomina *doble clásico*.

**Definición C.20.** La acción de  $G^*$  sobre  $G$  se denomina *acción dressing* (“acción de disfraz” o “acción de cubrimiento”) y está definida como  $\cdot : G^* \times G \rightarrow G$  tal que

$$(g_-, g_+) \cdot x = (xg_+^{-1})_{\pm} xg_{\pm}^{-1} \quad (\text{C.46})$$

La acción la notaremos  $x^g := (g_-, g_+) \cdot x$ .

**Proposición C.14.** *La acción anterior está bien definida:*

1.  $x^g$  no depende del signo usado: tanto + como – dan el mismo resultado.

2.  $(x^g)^h = x^{h \times_{G^*} g}$ .

**Definición C.21.** Sea  $G$  un grupo de Poisson-Lie,  $M$  una variedad simpléctica, decimos que la acción es Lie-Poisson si

$$\{f_1(h \cdot x), f_2(h \cdot x)\}_{G \times M} = \{f_1, f_2\}_M(h \cdot x), \quad \forall h \in G, x \in M \quad (\text{C.47})$$

donde el corchete en  $G \times M$  es el usual:

$$\{f_1(h \cdot x), f_2(h \cdot x)\}_{G \times M} = \{f_1(h \cdot x), f_2(h \cdot x)\}_G + \{f_1(h \cdot x), f_2(h \cdot x)\}_M \quad (\text{C.48})$$

pensando en cada caso  $f_i(h \cdot x)$  como una funcional de  $G$  y como una de  $M$  respectivamente.

El siguiente es el resultado central de la sección:

**Teorema C.15.** *La acción dressing de  $G^*$  sobre  $G$  es de Lie-Poisson dados los corchetes de Semenov-Tian-Shansky y Sklyanin respectivamente.*

## C.6. Clasificación de las soluciones a la EYB

En esta sección seguiremos la sección 2.1 y la sección 3.2 de [8].

### C.6.1. Soluciones EYB constantes

La construcción general de la matriz  $r$  para álgebras de Kac-Moody  $\mathfrak{g}$  de tipo finito es la siguiente: consideramos la descomposición triangular de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ , y al elemento de Casimir lo descomponemos en

$$\Omega_{\mathfrak{g}} = \Omega_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}} + \Omega_{\mathfrak{n}_-\mathfrak{n}_+} + \Omega_{\mathfrak{n}_-\mathfrak{n}_+} \quad (\text{C.49})$$

de manera que a  $r$  lo definimos como

$$r^{\pm} := \pm\Omega_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}} \pm 2\Omega_{\mathfrak{n}_{\mp}\mathfrak{n}_{\pm}} \quad (\text{C.50})$$

De esta forma si consideramos  $r^+$  (como está en [8]) tenemos una solución, y junto con  $r^-$  obtenemos la descomposición de la matriz  $r$  que lleva a la factorización del grupo asociado a  $\mathfrak{g}$ .

### C.6.2. Soluciones a la EYB con parámetro espectral

Consideremos la ecuación (asumiendo que  $r(u_1, u_2) = r(u_1 - u_2)$ ):

$$[r_{12}(u_1 - u_2), r_{13}(u_1 - u_3)] + [r_{12}(u_1 - u_2), r_{23}(u_2 - u_3)] + [r_{13}(u_1 - u_3), r_{23}(u_2 - u_3)] = 0 \quad (\text{C.51})$$

**Proposición C.16.** *Sea  $r(u)$  solución no degenerada y meromorfa de la ecuación C.51. A menos de equivalencias, se cumple*

1.  *$r$  tiene un polo simple en  $u = 0$ , con residuo igual al elemento de Casimir  $\Omega$ . Además, los demás polos de  $r$  son simples.*
2.  *$r$  cumple la condición de unitariedad:*

$$r_{12}(u) + r_{21}(-u) = 0 \quad (\text{C.52})$$

3. *No existe una subálgebra propia  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$  tal que  $r(u) \in \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a} \forall u$ .*

El Teorema 3.2.4 de [8] muestra la clasificación de las soluciones a C.51.

Una aplicación son las soluciones de tipo racional para las **Álgebras afines como extensiones de álgebras loop**: si  $\mathfrak{g}$  es el álgebra de Kac-Moody sobre la que extendemos el álgebra loop, el elemento de Casimir  $\Omega$  es

$$\Omega = \Omega_{\mathfrak{g}} + c \otimes d + d \otimes c \quad (\text{C.53})$$

tal como vimos en el capítulo anterior. La descomposición triangular de  $\widehat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$  nos determina las componentes en cada una de las subálgebras de Borel del elemento de Casimir:

$$\Omega_{\hat{\mathfrak{n}}_-\hat{\mathfrak{n}}_+} = \Omega_{\mathfrak{n}_-\mathfrak{n}_+} + \sum_{\lambda} \sum_{j>0} (X_{\lambda} \otimes X_{\lambda}) \left( \frac{u_1}{u_2} \right)^j \quad (\text{C.54})$$

para alguna base ortonormal de  $\mathfrak{g}$ .

La construcción de la sección anterior nos permite deducir que

$$r = r_{\mathfrak{g}} + \frac{1}{2}(c \otimes d + d \otimes c) + \frac{u_1}{u_2 - u_1} \Omega_{\mathfrak{g}} \quad (\text{C.55})$$

**Observación C.10.** Esta es la misma matriz  $r$  (módulo reescaleos) del capítulo 5 que mencionamos en la proposición 5.6 y que llamamos  $\tilde{\Omega}(v, w)$ .

## C.7. Cuantización por deformación

En esta sección definiremos cuantización por deformación. Comenzaremos con la noción de deformación para álgebras de Poisson, y luego pasaremos a la deformación de biálgebras.

**Definición C.22.** Sea  $(A_0, m_0, \eta_0 \{.,.\})$  un álgebra de Poisson sobre los números complejos  $\mathbb{C}$ . Una cuantización de  $A_0$  es un álgebra no conmutativa  $(A, m, \eta)$  sobre el anillo  $\mathbb{C}[[\hbar]]$ , con  $\hbar$  un parámetro formal, tal que

1.  $A/\hbar A \simeq A_0$
2.  $m_0 \circ (\pi \otimes \pi) = \pi \circ m$
3.  $\pi \circ \eta = \eta_0$
4.  $\{\pi(a), \pi(b)\} = \pi\left(\frac{[a,b]}{\hbar}\right)$

donde  $\pi : A \rightarrow A/\hbar A \simeq A_0$  es el mapa cociente canónico y  $[.,.]$  es el conmutador respecto a  $m$ .

**Observación C.11.** 1. El límite  $\hbar \rightarrow 0$ , que es al que corresponde el cociente con  $\hbar A$ , se interpreta como el *límite clásico* del álgebra  $A$ .

2.  $m$  es no conmutativa, así que no es simplemente la extensión de  $m_0$  a toda el álgebra  $A$ :

$$m(a \otimes b) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a, b) \hbar^n \quad (\text{C.56})$$

3. De la asociatividad, tenemos para todo  $l$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(f_{l-n}(a, b), c) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a, f_{l-n}(b, c)) \hbar^n \quad (\text{C.57})$$

4. Por la propiedad de unidad, resulta

$$f_n(a, 1) = f_n(1, a) = a \delta_{n,0} \quad (\text{C.58})$$

La siguiente proposición nos indica que la propiedad 4 de la definición anterior tiene sentido:

**Proposición C.17.** *El conmutador  $[a, b]$  tiene como menor orden  $\hbar$  como polinomio, para todos elementos  $a, b \in A$ .*

*Demostración.* Ver [47]. □

**Definición C.23.** Sea  $(A_0, m_0, \eta_0, \Delta_0, \varepsilon_0, \delta)$  un biálgebra de co-Poisson, donde  $\delta$  denota la estructura de co-Poisson. Una cuantización de  $A_0$  es una biálgebra no co-conmutativa  $(A, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$  sobre  $\mathbb{C}[[\hbar]]$  tal que

1.  $A/\hbar A \simeq A_0$
2.  $(\pi \otimes \pi) \circ \Delta = \Delta_0 \circ \pi$
3.  $m_0 \circ (\pi \otimes \pi) = \pi \circ m$
4.  $\pi \circ \eta = \eta_0$
5.  $\varepsilon \circ \pi = \varepsilon_0$
6.  $\delta(\pi(a)) = \pi\left(\frac{\Delta(a) - \tau \circ \Delta(a)}{\hbar}\right)$

donde nuevamente  $\pi : A \rightarrow A_0$  es el mapa cociente.

**Observación C.12.** Si bien en la definición se hace explícita la deformación en  $\Delta$ , hay que recordar que las condiciones de compatibilidad para el coproducto con la multiplicación y las demás estructuras de la biálgebra hace que ellas también se deformen al pasar a la cuantización.

## C.8. Ejemplo 1: cuantización de $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$

A partir de lo visto en la sección C.6.1, una matriz  $r$  para  $\mathfrak{sl}_2$  es

$$r = \frac{1}{2}h \otimes h + 2e \otimes f \tag{C.59}$$

que induce la siguiente estructura de co-Poisson:

$$\delta(h) = 0 \tag{C.60}$$

$$\delta(e) = \frac{1}{2}e \wedge h \tag{C.61}$$

$$\delta(f) = \frac{1}{2}f \wedge h \tag{C.62}$$

Comenzamos por plantear el coproducto en la cuantización como

$$\Delta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} \Delta_{(n)} \tag{C.63}$$

**Proposición C.18.** *Se cumplen las siguientes ecuaciones*

$$\begin{cases} \Delta_{(n)}(h) = 0 \\ \Delta_{(n)}(e) = \frac{1}{4^n} (e \otimes h^n + (-h)^n \otimes e) \\ \Delta_{(n)}(f) = \frac{1}{4^n} (f \otimes h^n + (-h)^n \otimes f) \end{cases}$$

donde  $H^n$  es el producto con la multiplicación deformada  $m$ .

*Demostración.* Ver [47]. □

De esta manera, llegamos a la expresión para el coproducto:

**Proposición C.19.** *El coproducto deformado  $\Delta$  en  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$  es*

$$\begin{cases} \Delta(h) = h \otimes 1 + 1 \otimes h \\ \Delta(e) = e \otimes q^h + q^{-h} \otimes e \\ \Delta(f) = f \otimes q^h + q^{-h} \otimes f \end{cases}$$

con  $q = e^{\hbar/4}$ .

La compatibilidad con las demás estructuras se resume en la siguiente proposición

**Proposición C.20.**

$$[h, e] = 2e \tag{C.64}$$

$$[h, f] = -2f \tag{C.65}$$

$$[e, f] = \frac{q^{2h} - q^{-2h}}{q - q^{-1}} \tag{C.66}$$

$$\varepsilon(e) = \varepsilon(f) = \varepsilon(h) = 0 \tag{C.67}$$

$$\varepsilon(1) = 1 \tag{C.68}$$

$$S(e) = -qe \tag{C.69}$$

$$S(f) = -q^{-1}f \tag{C.70}$$

$$S(h) = -h \tag{C.71}$$

De esta manera construimos una cuantización por deformación de  $\mathfrak{sl}_2$ .

## C.9. Ejemplo 2: cuantización de álgebras de Kac-Moody

Generalizaremos lo visto en la sección anterior, siguiendo [11].

**Observación C.13.** A partir de lo visto en la sección anterior, los generadores del álgebra  $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$  son  $e, f, q^h$ , con las reglas de conmutación ya encontradas y las siguientes para  $q^h$ :

$$q^{\alpha h} q^{\beta h} = q^{(\alpha+\beta)h} \tag{C.72}$$

$$q^h e q^{-h} = q^2 e \tag{C.73}$$

$$q^h f q^{-h} = q^{-2} f \tag{C.74}$$

**Definición C.24.** Sea  $\mathfrak{g}(g)(A)$  un álgebra de Kac-Moody afín,  $\{h_0, h_1, \dots, h_n, d\}$  la base de la subálgebra de Cartan,  $\mathbb{C}h_0$  su centro,  $\{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$  las raíces simples. Sean  $e_i, f_i$  los generadores de Chevalley (el subíndice  $i$  recorre el conjunto  $\{0, 1, \dots, n\}$ ). Sea  $q = e^{\hbar/4}$ . El álgebra de Lie cuántica  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}(A))$  es el álgebra con unidad sobre  $\mathbb{C}[[\hbar]]$  es la generada por los elementos  $e_i, f_i, q^h$ , con  $h \in \text{span}(\Pi^\vee)$ , y las siguientes relaciones:

$$q^h q^{h'} = q^{h+h'} \quad (\text{C.75})$$

$$q^h e_i q^{-h} = q^{\alpha_i(h)} e_i \quad (\text{C.76})$$

$$q^h f_i q^{-h} = q^{-\alpha_i(h)} f_i \quad (\text{C.77})$$

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} \frac{q^{h_i} - q^{-h_i}}{q_i - q_i^{-1}} \quad (\text{C.78})$$

$$\sum_{m+n=1-a_{ij}} (-1)^m e_i^{(m)} e_j e_i^{(n)} = 0 \quad (\text{C.79})$$

$$\sum_{m+n=1-a_{ij}} (-1)^m f_i^{(m)} f_j f_i^{(n)} = 0 \quad (\text{C.80})$$

donde  $q_i = q^{\frac{(\alpha_i|\alpha_i)}{2}}$ ,  $x_i^{(n)} = x_i^n / [n]_i!$ , con  $[n]_i! = \prod_{k=1}^n \frac{q_i^k - q_i^{-k}}{q - q^{-1}}$ .

**Observación C.14.** Las últimas dos igualdades corresponden a las identidades de Serre pasadas al álgebra deformada.

## C.10. Álgebras de Hopf quasi-triangulares y ecuación RTT

**Definición C.25.** Sea  $(A, m, \Delta, \eta, \varepsilon, S)$  un álgebra de Hopf, y  $R$  un elemento invertible en  $A \otimes A$ . Entonces el par  $(A, R)$  se dice que es un álgebra de Hopf quasi-triangular (AHQT) si

1.  $\tau \circ \Delta(a) = R\Delta(a)R^{-1}$
2.  $(\Delta \otimes 1)R = R_{13}R_{23}$
3.  $(1 \otimes \Delta)R = R_{13}R_{12}$

**Observación C.15.** En una representación matricial  $T = (t_{ij})$  de  $A$ , la ecuación 1 es igual a la siguiente ecuación:

$${}^1_1 R T T = T T R {}^2_1 \quad (\text{C.81})$$

Que nos está mostrando la no-coconmutatividad en el coproducto del álgebra  $A$ .

**Teorema C.21.** Si  $(A, R)$  es una AHQT, entonces  $R$  satisface la ecuación de Yang-Baxter cuántica (EYBC):

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \quad (\text{C.82})$$

*Demostración.* Ver [47]. □

Esta relación entre las matrices  $R$  está estrechamente vinculada con la misma expresión para las matrices  $S$  de Scattering en diversos modelos cuánticos:

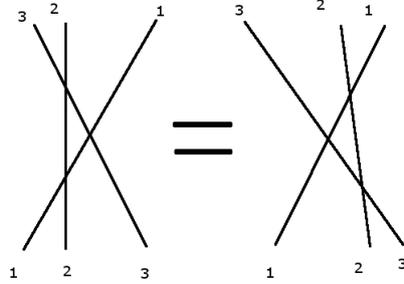


Figura C.1: En el diagrama vemos el scattering de 3 partículas, de dos maneras distintas. El diagrama izquierdo corresponde a  $R_{12}R_{13}R_{23}$ , mientras que el diagrama de la derecha corresponde a  $R_{23}R_{13}R_{12}$

El límite clásico de la  $R$  es ni más ni menos que la matriz  $r$  de la que tanto hablamos en las secciones anteriores.

**Teorema C.22.** *Sea  $R$  solución a la EYB cuántica, que puede ser escrita de la forma*

$$R(t) = 1 \otimes 1 + r\hbar + A\hbar^2 + O(\hbar^3) \tag{C.83}$$

*entonces  $r$  cumple la EYB clásica.*

**Observación C.16.** Podemos entender el análogo de la matriz  $R$  cuántica en la estructura del doble clásico de la siguiente manera: Sea  $R : G \times G \rightarrow G \times G$ , que actúa de la siguiente manera:

$$R(x, y) = (y_-xy_-^{-1}, (y_-xy_-^{-1})_+^{-1}y(y_-xy_-^{-1})_+) \tag{C.84}$$

Entonces  $R$  es un difeomorfismo de Poisson (identificando  $G$  con  $G^*$ ), y cumple la ecuación de Yang-Baxter cuántica:

$$R_{12}R_{13}R_{23}(x, y, z) = R_{12}R_{13}(x, z_-yz_-^{-1}, y_+zy_+^{-1}) \tag{C.85}$$

$$= R_{12}(z_-xz_-^{-1}, z_-yz_-^{-1}, x_+y_+zy_+^{-1}x_+^{-1}) \tag{C.86}$$

$$= (z_-y_-xy_-^{-1}z_-^{-1}, x_+z_-yz_-^{-1}x_+^{-1}, x_+y_+zy_+^{-1}x_+^{-1}) \tag{C.87}$$

$$= \text{directo, pero tedioso} \tag{C.88}$$

$$= R_{23}R_{13}R_{12}(x, y, z) \tag{C.89}$$

las igualdades son módulo  $N_+, N_- \triangleleft G$ , pero al final los factores extra se cancelan.

# Apéndice D: Yangianos

## D.1. Yangianos

Los Yangianos son la cuantización (en el sentido del capítulo anterior) del álgebra de polinomios. Fueron introducidos por Drinfeld [11].

En este apéndice seguiremos [33] y los artículos [26] y [27]

**Definición D.1.** Un Yangiano  $Y(N)$  se define como el álgebra compleja, asociativa, con unidad, de generadores  $t_{ij}^{(k)}$ , con  $1 \leq i, j \leq N$ , y  $k \geq 0$ , y las siguientes relaciones de conmutación:

$$\left[ t_{ij}^{(M+1)}, t_{kl}^{(L)} \right] - \left[ t_{ij}^{(M)}, t_{kl}^{(L+1)} \right] = t_{kj}^{(M)} t_{il}^{(L)} - t_{kj}^{(L)} t_{il}^{(M)} \quad (\text{D.1})$$

Para  $M, L = 0, 1, 2, \dots$  y  $t_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} \cdot 1$ .

Probaremos que estas álgebras son la deformación de  $\widehat{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})}$  para  $N \geq 2$ .

Sea  $P$  el operador de permutación en  $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N$ :

$$P := \sum_{ij} E_{ij} \otimes E_{ji} \quad (\text{D.2})$$

con  $E_{ij}$  los operadores con matrices asociadas  $E_{ij}$  (abuso de notación).

Tomemos

$$R(u) := 1 - \frac{1}{u} P \quad (\text{D.3})$$

para  $u$  el parámetro espectral. Esta matriz es la matriz  $R$  que estudiamos en el capítulo anterior, pues cumple la EYBC:

$$R_{12}(u) R_{13}(u+v) R_{23}(v) = R_{23}(v) R_{13}(u+v) R_{12}(u) \quad (\text{D.4})$$

Para escribir la formulación de la ecuación  $RTT$ , introducimos las matrices  $T$  de la siguiente manera: si definimos

$$t_{ij}(u) = \delta_{ij} + \sum_{n \geq 1} t_{ij}^{(n)} u^{-n} \in Y(N) [[u^{-1}]] \quad (\text{D.5})$$

Entonces

$$T(u) := \sum_{i,j} t_{ij}(u) \otimes E_{ij} \quad (\text{D.6})$$

**Proposición D.1.** *Las relaciones que escribimos en la definición del álgebra Yangiana son equivalentes a la siguiente ecuación para la matriz  $T$ :*

$$R(u-v) \overset{1}{T}(u) \overset{2}{T}(v) = \overset{2}{T}(v) \overset{1}{T}(u) R(u-v) \quad (\text{D.7})$$

**Observación D.1.** La relación de intercambio de la proposición anterior la podemos escribir de la siguiente manera:

$$\left[ \overset{1}{T}(u), \overset{2}{T}(v) \right] = \frac{1}{u-v} \left( P \overset{1}{T}(u) \overset{2}{T}(v) - \overset{2}{T}(v) \overset{1}{T}(u) P \right) \quad (\text{D.8})$$

y de esta manera tenemos explícita la relación de conmutación de los  $T$ .

La siguiente proposición la usamos para el cálculo de la acción del grupo de Geroch cuántico:

**Proposición D.2.** *Existe un anti-automorfismo involutivo de  $Y(N)$  definido por  $\text{sign} : T(u) \mapsto T(-u)$ , y que invierte la ecuación  $RTT$ :*

$$R(u-v) \overset{2}{T}(-v) \overset{1}{T}(-u) = \overset{1}{T}(-u) \overset{2}{T}(-v) R(u-v) \quad (\text{D.9})$$

*Demostración.* Ver [33]. □

La siguiente proposición nos indica la relación entre  $Y(N)$  y  $U(\mathfrak{gl}(N))$

**Proposición D.3.** 1. *El mapa  $t_{ij}(u) \mapsto \delta_{ij} + E_{ij}u^{-1}$  define un homomorfismo de álgebras  $\xi : Y(N) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{gl}(N))$ .*

2. *El mapa  $E_{ij} \mapsto t_{ij}^{(1)}$  define la inclusión de  $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(N))$  en  $Y(N)$ .*

**Teorema D.4.** *Sea  $Y_{\hbar}(N)$  una modificación de  $Y(N)$ , que es deformación plana de  $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(N)[x])$ , la envolvente universal del álgebra loop de  $\mathfrak{gl}(N)$ :*

1. *Normalizamos los generadores:  $t_{ij}^{(M)} \mapsto t_{ij}^{(M)} \hbar^{M-1}$*

2.

$$\left[ t_{ij}^{(M)}, t_{kl}^{(L)} \right] = t_{kj}^{(0)} t_{il}^{(M+L-1)} - t_{kj}^{(M+L-1)} t_{il}^{(0)} + \hbar \sum_{r \geq 1}^{\min(M,L)-1} t_{kj}^{(r)} t_{il}^{(M+L-1-r)} - t_{kj}^{(M+L-1-r)} t_{il}^{(r)} \quad (\text{D.10})$$

Entonces,  $Y_1(N) = Y(N)$  y  $Y_0(N) = \mathcal{U}(\mathfrak{gl}(N)[x])$

La matriz  $R$  en esta deformación  $Y_{\hbar}(N)$  la tomamos como

$$R(u) = \frac{1}{u + \hbar} (uI + \hbar P) \quad (\text{D.11})$$

## D.2. $Y(2)$

En esta sección seguiremos [26] y [27].

En  $\mathfrak{sl}_2$  tenemos los generadores  $e, f, h$ , con la misma notación del apéndice C. Siguiendo la prescripción de Molev que vimos en la sección anterior, notamos  $t_{11}^{(M)} - t_{22}^{(M)} = \hbar^{M-1}h^{(M)}$ ,  $t_{12}^{(M)} = \hbar^{M-1}e^{(M)}$  y  $t_{21}^{(M)} = \hbar^{M-1}f^{(M)}$ . Entonces las relaciones de conmutación de la definición son las siguientes.

1.  $i = j = l = k = 1$ :

Si  $M = L$ , deducimos

$$\left[ t_{11}^{(M+1)}, t_{11}^{(M)} \right] - \left[ t_{11}^{(M)}, t_{11}^{(M+1)} \right] = t_{11}^{(M)}t_{11}^{(M)} - t_{11}^{(M)}t_{11}^{(M)} = 0 \quad (\text{D.12})$$

$$\Rightarrow \left[ t_{11}^{(M+1)}, t_{11}^{(M)} \right] = 0 \quad (\text{D.13})$$

Tomando  $M = L + j$ , por inducción en  $j$  es sencillo demostrar la siguiente regla de conmutación para los  $k = t_{11}$ :

$$\left[ h^{(h)}, h^{(k)} \right] = 0 \quad (\text{D.14})$$

2.  $i = j = k = 1, l = 2$ ;

Si  $M = 0, L = 1$

$$\left[ t_{11}^{(1)}, t_{12}^{(1)} \right] = t_{11}^{(0)}t_{12}^{(1)} = t_{12}^{(1)} \quad (\text{D.15})$$

$$\left[ t_{22}^{(1)}, t_{12}^{(1)} \right] = t_{12}^{(1)}t_{22}^{(0)} = -t_{12}^{(1)} \quad (\text{D.16})$$

$$\Rightarrow \left[ h^{(1)}, e^{(1)} \right] = 2e^{(1)} \quad (\text{D.17})$$

y por inducción se demuestra

$$\left[ h^{(1)}, e^{(l)} \right] = 2e^{(l)} \quad (\text{D.18})$$

$$\left[ h^{(1)}, e^{(l)} \right] = -2ff^{(l)} \quad (\text{D.19})$$

$$(\text{D.20})$$

3. Si  $i = l = 1$  y  $j = k = 2$ : tomamos  $M = 0$  y  $L = 1$ , y análogamente podemos deducir que

$$\left[ e^{(k)}, f^{(l)} \right] = h^{(k+l+1)-1} \quad (\text{D.21})$$

4. Por último, las demás relaciones se demuestran por inducción:

$$[h^{(k+1)}, e^{(l)}] - [h^{(k)}, e^{(l+1)}] = \hbar (h^{(k)} e^l + e^{(l)} h^{(k)}) \quad (\text{D.22})$$

$$[h^{(k+1)}, f^{(l)}] - [h^{(k)}, f^{(l+1)}] = -\hbar (h^{(k)} f^l + f^{(l)} h^{(k)}) \quad (\text{D.23})$$

$$[e^{(k+1)}, e^{(l)}] - [e^{(k)}, e^{(l+1)}] = \hbar (e^{(k)} e^l + e^{(l)} e^{(k)}) \quad (\text{D.24})$$

$$[f^{(k+1)}, e^{(l)}] - [f^{(k)}, e^{(l+1)}] = -\hbar (f^{(k)} e^l + e^{(l)} f^{(k)}) \quad (\text{D.25})$$

Las funciones generatrices se definen como

$$e^+(u) := \sum_{k \geq 1} e^{(k)} u^{-k} \quad (\text{D.26})$$

$$f^+(u) := \sum_{k \geq 1} f^{(k)} u^{-k} \quad (\text{D.27})$$

$$h^+(u) := 1 + \hbar \sum_{k \geq 1} h^{(k)} u^{-k} \quad (\text{D.28})$$

Estas funciones se denominan *corrientes* y tienen las relaciones de conmutación correspondientes a los  $t_{ij}$ 's que vimos antes.

La matriz  $T(u)$  que construimos en la sección anterior la podemos factorizar en términos de las corrientes anteriores como

$$T^+(u) = \begin{pmatrix} 1 & f^+(u) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1^+(u) & 0 \\ 0 & k_2^+(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^+(u) & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.29})$$

denominada *descomposición de Gauss*, donde  $h^+(u) = (k_2^+(u))^{-1} k_1^+(u)$ .

**Observación D.2.** Para la matriz  $R$  que definimos anteriormente, es una cuenta verificar que se cumple la ecuación  $RTT$ .

### D.3. Doble Yangiano y extensión central

La idea es extender el álgebra Yangiana a un doble cuántico. Sea  $DY(2)$  el álgebra generada por los elementos  $e^{(k)}, f^{(k)}, h^{(k)}$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ , con las mismas relaciones del Yangiano que deducimos en la sección anterior. Notaremos por  $Y^\pm(N)$  las respectivas componentes. En términos de funciones generatrices, definimos

$$e^\pm(u) := \pm \sum_{k \geq 1(k < 1)} e^{(k)} u^{-k} \quad (\text{D.30})$$

$$f^\pm(u) := \pm \sum_{k \geq 1(k < 1)} f^{(k)} u^{-k} \quad (\text{D.31})$$

$$h^\pm(u) := 1 \pm \hbar \sum_{k \geq 1(k < 1)} h^{(k)} u^{-k} \quad (\text{D.32})$$

$$e(u) := e^+(u) - e^-(u) \quad (\text{D.33})$$

$$f(u) := f^+(u) - f^-(u) \quad (\text{D.34})$$

De esta forma, aparte de las relaciones de conmutación para cada componente, tenemos las relaciones de intercambio mixtas, que en términos de las corrientes totales resultan

$$h^a(u)h^b(v) = h^b(v)h^a(u), \quad a, b = \pm \quad (\text{D.35})$$

$$e(u)e(v) = \frac{u-v+\hbar}{u-v-\hbar}e(v)e(u) \quad (\text{D.36})$$

$$f(u)f(v) = \frac{u-v-\hbar}{u-v+\hbar}e(v)e(u) \quad (\text{D.37})$$

$$h^\pm(u)e(v) = \frac{u-v+\hbar}{u-v-\hbar}e(v)h^\pm(u) \quad (\text{D.38})$$

$$h^\pm(u)f(v) = \frac{u-v-\hbar}{u-v+\hbar}f(v)h^\pm(u) \quad (\text{D.39})$$

$$[e(u), f(v)] = \frac{1}{\hbar}\delta(u-v)(h^+(u) - h^-(v)) \quad (\text{D.40})$$

para  $\delta(u-v) = \sum_{m+n=-1} u^m v^n$

**Observación D.3.** 1. Las estructuras de álgebra de Hopf, i.e., la comultiplicación, la counidad y el mapa antipodal pueden expresarse en términos de estas corrientes.

2.  $Y^+ = Y(2) \subset DY(2)$ , y  $Y^- = Y(2)^{op}$ , de ahí el nombre doble Yangiano, al igual que con el doble clásico.

Para la extensión central, definimos los siguientes objetos:

**Definición D.2.** Sea  $d = \frac{d}{du}$  el operador de derivación respecto al parámetro espectral:  $dg(u) = \frac{d}{du}g(u)$ . Sea  $T_x := e^{xd}$ , el operador shift asociado a  $d$ :

$$T_x g(u) = g(u+x) \quad (\text{D.41})$$

Definimos el producto semidirecto  $Y^\pm \rtimes \mathbb{C}[[d]]$  como

$$[d, e^\pm(u)] = \frac{d}{du}e^\pm(u) \quad (\text{D.42})$$

$$[d, h^\pm(u)] = \frac{d}{du}h^\pm(u) \quad (\text{D.43})$$

$$[d, f^\pm(u)] = \frac{d}{du}f^\pm(u) \quad (\text{D.44})$$

$$(\text{D.45})$$

**Observación D.4.**  $Y^- \rtimes \mathbb{C}[[d]]$  es un álgebra de Hopf si definimos el siguiente coproducto:

$$\hat{\Delta}(d) = d \otimes 1 + 1 \otimes d \quad (\text{D.46})$$

Para la otra mitad, definimos el producto de  $Y^+$  con  $\mathbb{C}[[c]]$ , los polinomios sobre un elemento central  $c$ , y con coproducto

$$\hat{\Delta}(c) = c \otimes 1 + 1 \otimes c \quad (\text{D.47})$$

$$\hat{\Delta}a^+(u) = (Id \otimes T_{hc \otimes 1}^{-1}) \Delta a^+(u) \quad (\text{D.48})$$

**Teorema D.5.** *La extensión central del doble Yangiano, que notaremos  $\widehat{DY}(2)$ , es isomorfa a la completación formal del álgebra de generadores  $d, e_k, h_k, f_k$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ , y un elemento central  $c$  junto con las siguientes relaciones de intercambio:*

$$[d, a(u)] = \frac{d}{du}a(u), \quad a = e, f, h^\pm \quad (\text{D.49})$$

$$h^+(u)h^-(v) = \frac{u-v+\hbar}{u-v-\hbar} \frac{u-v-\hbar(c+1)}{u-v-\hbar(c-1)} h^-(v)h^+(u), \quad a, b = \pm \quad (\text{D.50})$$

$$e(u)e(v) = \frac{u-v+\hbar}{u-v-\hbar} e(v)e(u) \quad (\text{D.51})$$

$$f(u)f(v) = \frac{u-v-\hbar}{u-v+\hbar} e(v)e(u) \quad (\text{D.52})$$

$$h^\pm(u)e(v) = \frac{u-v+\hbar}{u-v-\hbar} e(v)h^\pm(u) \quad (\text{D.53})$$

$$h^+(u)f(v) = \frac{u-v-\hbar(1+c)}{u-v+\hbar(1-c)} f(v)h^+(u) \quad (\text{D.54})$$

$$h^-(u)f(v) = \frac{u-v-\hbar}{u-v+\hbar} f(v)h^-(u) \quad (\text{D.55})$$

$$[e(u), f(v)] = \frac{1}{\hbar} (\delta(u-v-\hbar c)h^+(u) - \delta(u-v)h^-(v)) \quad (\text{D.56})$$

Ahora definimos las matrices  $T^\pm$ , cada una en la copia correspondiente al signo:

$$T^\pm(u) = \begin{pmatrix} 1 & f^\pm(u) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1^\pm(u) & 0 \\ 0 & k_2^\pm(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^\pm(u) & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.57})$$

para  $h^\pm(u) = (k_2^\pm(u))^{-1} k_1^\pm(u)$ .

Entonces, finalmente llegamos a las relaciones de intercambio entre las matrices  $T$ , en término de la matriz  $R(u) = \frac{uI - i\hbar P}{u - i\hbar}$ :

$$[T^\pm(u), c] = 0 \quad (\text{D.58})$$

$$e^{ixd}T^\pm(u) = T^\pm(u + ix)e^{ixd} \quad (\text{D.59})$$

$$R^+(u - v + \frac{ic\hbar}{2})L^+(u)T^-(v) = T^-(v)T^+(u)R^+(u - v - \frac{ic\hbar}{2}) \quad (\text{D.60})$$

$$R^\pm(u - v)T^\pm(u)T^\pm(v) = T^\pm(v)T^\pm(u)R^\pm(u - v) \quad (\text{D.61})$$

$$(\text{D.62})$$

donde  $R^\pm(u) := \chi^\pm(u)R(u)$ .

Estas relaciones de intercambio son las que llevan a la relación cuártica para la matriz  $M(u) = T^+(u)T^{-t}(u)$  del capítulo 5.

# Bibliografía

- [1] O. BABELON, D. BERNARD, *Dressing transformations*, Commun. Math. Phys. **149**, 279 (1992) <https://arxiv.org/abs/hep-th/9111036>
- [2] V. A. BELINSKI, V. E. ZAKHAROV, *Integration of the Einstein equations by means of the inverse scattering problem technique and construction of exact soliton solutions*, Sov. Phys. JETP **48**, 985 (1978)
- [3] D. BERNARD, N. REGNAULT, *Poisson Algebra of 2d Dimensionally Reduced Gravity*, J. High Energy Phys. **05**, 5 (2000) <https://arxiv.org/abs/hep-th/0002207>
- [4] D. BERNARD, B. JULIA, *Twisted Self-Duality of Dimensionally Reduced Gravity and Vertex Operators*, Nucl. Phys. B. **547**, 427 (1999) <https://arxiv.org/abs/hep-th/9712254>
- [5] H. BETHE, *Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette*, Zeitschrift für Physik, **71**, 205 (1931)
- [6] P. BREITENLOHNER, D. MAISON, *On the Geroch Group*, Ann. Inst. H. Poincaré. Phys. Théor. **46**, 215 (1987)
- [7] BOUSSO, J. High Energy Phys. **07**, 4 (1999)
- [8] V. CHARI, A. N. PRESSLEY, *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, Cambridge (1994)
- [9] A. DAS, *Integrable models*, World Scientific Lectures Notes in Physics, Vol. 30, World Scientific, 1989.
- [10] G. DAUTCOURT, Ann. Physik., 12:202, 1963
- [11] V. G. DRINFEL'D, *Quantum Groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 798-820, Berkeley, 1987.
- [12] V. G. DRINFEL'D, *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Soviet Math. Dokl. 283 (1985).
- [13] V. G. DRINFEL'D, *Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bi-algebras and the geometrical meaning of the classical Yang-Baxter equations*, Soviet Math. Dokl. **27**, 68 (1983)

- [14] V. G. DRINFEL'D, *A new realization of Yangians and quantum affine algebras*, Soviet Math. Dokl. **32** (1988), 212-216.
- [15] M. P. DO CARMO, *Riemannian Geometry*, 2ª Edición, Birkhäuser, 1993.
- [16] J. EHLERS, Dissertation, Hamburg University (1957)
- [17] G. F. R. ELLIS, S. W. HAWKING, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, 1976.
- [18] A. FUCHS, *Null canonical formulation and integrability of cylindrical gravitational waves*, Diplomarbeit, Technische Universität Wien, 2014
- [19] A. FUCHS, M. P. REISENBERGER, *Integrable structures and the quantization of free null initial data for gravity*, Class. Quantum Grav. **18** (2017) Preprint <https://arxiv.org/abs/1704.06992>
- [20] R. GEROCH, J. Math. Phys., 12:918 (1971) y 13:394 (1972)
- [21] I. HAUSER, F.J. ERNST, *Proof of a Geroch conjecture* J. Math. Phys. **22** 1051 (1981)
- [22] B. JULIA, H. NICOLAI, *Conformal internal symmetry of 2d  $\sigma$ -models coupled to gravity and a dilaton*, Nucl. Phys. B. **482**, 431 (1996) <https://arxiv.org/abs/hep-th/9608082>
- [23] V. G. KAC, *Infinite dimensional Lie algebras*, 3ª Edición, Cambridge University Press
- [24] D. KATSIMPOURI, *Integrability in two-dimensional gravity*, phd thesis
- [25] C. KEIFER, *Quantum gravity: general introduction and recent developments*, Ann. Phys. **15** 129 (2006) Preprint <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0508120>
- [26] S. M. KHOROSHTKIN, *Central Extension of the Yangian Double*, Preprint <https://arxiv.org/abs/q-alg/9602031>
- [27] S. M. KHOROSHTKIN, D. LEBEDEV, S. PAKULIAK, *Yangian algebras and classical Riemann problems*, Preprint <https://arxiv.org/abs/q-alg/9712057>
- [28] D. KOROTKIN, H. SAMTLEBEN, *Yangian symmetry and integrable quantum gravity*, Nucl. Phys. B, 427:657 (1998) <https://arxiv.org/abs/hep-th/9710210>
- [29] D. KOROTKIN, H. SAMTLEBEN, *Canonical quantization of cylindrical gravitational waves with two polarizations*, Phys. Rev. Lett. **80**:14 (1998)
- [30] D. KOROTKIN, H. SAMTLEBEN, *Poisson realization and quantization of the Geroch group*, Class. Quantum Grav. **14**, L151 (1997)
- [31] Y. KOSMANN-SCHWARZBACH, *Lie bialgebras, Poisson Lie groups and dressing transformations*, Integrability of Nonlinear Systems (2004)

- [32] D. MAISON, ON THE COMPLETE INTEGRABILITY OF THE STATIONARY, AXIALLY SYMMETRIC EINSTEIN EQUATIONS, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 521 (1978)
- [33] A. MOLEV, M. NAZAROV, G. OLSHHANSKII, *Yangians and classical Lie algebras*, *Russ. Math. Surveys* **51**, 205 (1996) <https://arxiv.org/abs/hep-th/9409025>
- [34] H. NICOLAI, D. KOROTKIN, H. SAMTLEBEN, *Integrable classical and quantum gravity*, Preprint <https://arxiv.org/abs/hep-th/9612065>
- [35] H. NICOLAI, *Two-Dimensional Gravities, and Supergravities as Integrable Systems*, *Recent Aspects of Quantum Fields*, ed. por H. Mitter y H. Gausterer, Springer-Verlag, Berlin, 1991
- [36] M. P. REISENBERGER, *The symplectic 2-form for gravity in terms of free null initial data*, *Class. Quantum Grav.* 30:155022 (2013) <https://arxiv.org/abs/1211.3880>.
- [37] M. P. REISENBERGER, *The Poisson bracket on free null initial data for gravity*, *Phys. Rev. Lett.* 101:211101 (2008) <https://arxiv.org/abs/0712.2541>.
- [38] M. P. REISENBERGER, *The symplectic 2-form and Poisson bracket of null canonical gravity*, (2007) Preprint <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0703134>.
- [39] RENDALL, *Proc. R. Soc. A* **427**, 221 (1990)
- [40] N. YU. RESHETIKHIN, M. SEMENOV-TIAN-SHANSKY, *Central extensions of quantum current groups*, *Commun. Math. Phys.* **19** 133 (1990)
- [41] SEGAL, A. N. PRESSLEY, *Loop groups*, Cambridge University Press, 1986
- [42] R. K. SACHS, *On the characteristic initial value problem in gravitational theory*, *J. Math. Phys.*, 3:908, 1962
- [43] M. SEMENOV-TIAN-SHANSKY, *What is a classical r-matrix?*, *Funct. Anal. Appl.* 17 (1983) 259.
- [44] M. SEMENOV-TIAN-SHANSKY, *Dressing Transformations and Poisson Lie Group actions*, *Publ. RIMS Kyoto Univ.* **21**, 1237 (1985)
- [45] G. 'T HOOFT, *Dimensional reduction in quantum gravity*, Preprint <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9310026>
- [46] L. SUSSKIND, *The world as a hologram*, *J. Math. Phys.* **36**, 6377 (1995) <https://arxiv.org/abs/hep-th/9409089>
- [47] T. TIJN, *An introduction to quantized Lie groups and algebras*, *Int.J.Mod.Phys. A* **7** 6175 (1992)
- [48] R. M. WALD, *General Relativity*, The University of Chicago Press, 1984.

- [49] R. M. WALD, *Quantum field theory in curved spacetime and Black hole thermodynamics*, The University of Chicago Press, 1994.
- [50] WEINSTEIN, *An introduction to Lorentz surfaces*, De Gruyter Exp. in Math. **22** (1996)
- [51] C. M. WILL, *The confrontation between general relativity and experiment*, Living Rev.Rel. **17** 4 (2014) Preprint <https://arxiv.org/pdf/1403.7377>
- [52] Y. Z. ZHANG, M. D. GOULD, *Quantum Affine Algebra and Universal R-Matrix with spectral parameter, II*, <https://arxiv.org/abs/hep-th/9307008>