



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY



ANII AGENCIA NACIONAL
DE INVESTIGACIÓN
E INNOVACIÓN



Universidad de la República
Facultad de Ingeniería
Instituto de Física

TERMODINÁMICA DEL ENREDO EN SISTEMAS CUÁNTICOS BIPARTITOS SIMPLES

Lic. Andrés Vallejo

Tesis para optar al título de Magíster en Física

Orientador: Dr. Alejandro Romanelli

Co-orientador: Dr. Raúl Donangelo

*A mi querido viejo, Don Jesús Vallejo
quien me enseñó, entre tantas otras cosas
que las Matemáticas podían ser tan divertidas como jugar a la pelota*

Resumen

Se presenta un análisis de los estados de equilibrio de sistemas cuánticos bipartitos compuestos por un qubit en interacción con sistemas de dimensión $N \gg 2$ desde una perspectiva termodinámica. Para ello, se introducen las nociones de Hamiltoniano y Temperatura de Enredo, siendo ésta última una medida del grado de enredo entre el qubit y su ambiente una vez alcanzado el equilibrio. Se enuncian y demuestran resultados que permiten caracterizar los estados termales, discutir su geometría en la esfera de Bloch y obtener los tipos de termalización asintótica para evoluciones reducidas específicas. Los resultados obtenidos son luego corroborados mediante el estudio concreto de dos modelos paradigmáticos: la Caminata Cuántica y el modelo de Jaynes-Cummings.

Abstract

We present an analysis of the equilibrium states of bipartite quantum systems, composed by a qubit interacting with an arbitrary system of dimension $N \gg 2$, from a thermodynamic perspective. With this purpose, the notions of entanglement Hamiltonian and entanglement temperature are introduced, the last being a measure of the degree of entanglement generated between the qubit and its environment once the equilibrium state is reached. We present some results that allow to characterize thermal states, discuss their geometry on the Bloch sphere and obtain the classes of asymptotic thermalization for a specific reduced evolution. These results are then corroborated via the concrete study of two paradigmatic models: the Quantum Walk on the Line and the Jaynes-Cummings model.

Índice general

Introducción	1
Elementos de Mecánica Cuántica en Sistemas Abiertos	4
2.1. MC de Estados Puros	4
2.1.1. Espacio de estados	4
2.1.2. Evolución	5
2.1.3. Observables y Medidas	5
2.1.4. Estados enredados	6
2.2. Mezclas estadísticas y MC en sistemas abiertos	7
2.2.1. El operador densidad	7
2.2.2. Sistemas abiertos. Operador Densidad Reducida	8
2.2.3. Evolución del operador densidad reducida. Representación de Kraus	9
2.2.4. Entropía de Von Neumann	10
2.2.5. Descomposición de Schmidt	11
2.3. Qubits	12
Termodinámica del enredo	15
3.1. Equilibración y Termalización	15
3.1.1. Equilibración	16
3.1.2. Termalización	16
3.2. Densidades reducidas y estados termales	17
3.2.1. El caso diagonal	17
3.2.2. Condición necesaria y suficiente para la existencia de un Hamiltoniano de Enredo	19
3.2.3. Exploración del Hamiltoniano de enredo	23
3.2.4. Estados termales en la esfera de Bloch	24
3.3. Temperatura de enredo	25
3.3.1. Definición	25
3.3.2. Propiedades	26
3.4. Ejemplo: Termalización bajo proyectores ortogonales	28
Termalización en la Caminata Cuántica en la Línea	32
4.1. El modelo	32
4.2. Solución general en el espacio de Fourier	33
4.3. Caminantes extendidos en la recta	34
4.3.1. Obtención de la densidad reducida	34
4.3.2. Temperatura de Enredo	37

Termalización en el modelo de Jaynes-Cummings	41
5.1. El modelo	41
5.2. Colapso y resurgimiento frente a estados coherentes	43
5.2.1. Evolución de las poblaciones	43
5.2.2. Temperatura de enredo media	44
5.3. Termalización ante distribuciones uniformes en el límite $N \gg 1$	46
Conclusiones y perspectivas	49
Apéndice: Cálculos en el modelo de Jaynes-Cummings	52
7.1. Preliminares	52
7.1.1. Constante de normalización	52
7.1.2. Obtención de a_n^+ y a_n^- en términos del estado inicial	52
7.2. Expresiones generales para el operador densidad	53
7.2.1. Poblaciones	53
7.2.2. Coherencias	54
7.3. Fotones con distribución uniforme	54
7.3.1. Poblaciones	54

Índice de figuras

2.1. Estados puros en la esfera de Bloch	12
2.2. Mezclas en la esfera de Bloch	14
3.1. Estados termales en la esfera de Bloch	25
3.2. Curvas de nivel de la temperatura en la esfera de Bloch para el caso $\kappa \in R$ bajo evolución guiada por proyectores ortogonales	31
4.1. Temperatura de enredo adimensional en función de χ para el caminante cuántico con distribución inicial uniforme en el espacio de posiciones	38
4.2. Curvas de nivel de la temperatura de enredo en el espacio (γ, φ) para la caminata de Hadamard con distribución inicial uniforme	39
4.3. Curvas de nivel de la temperatura sobre la esfera de Bloch para la caminata de parámetro $\kappa = \text{tg}(\theta)$ y distribución inicial uniforme	39
5.1. Colapso y resurgimiento de las poblaciones para estados coherentes de la luz	43
5.2. Curvas de nivel de la temperatura media en función de γ and φ	45
5.3. Curvas de nivel de la temperatura media en la esfera de Bloch correspondientes a la Fig. 5.2	45
5.4. Comportamiento de la función $f_N(gt) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \cos(\sqrt{n+1}gt)$	47
5.5. $f_N(gt) = \frac{1}{N} \sum^N \cos(\sqrt{n+1}gt)$ hasta gt del orden de 10^5	47

Introducción

La Termodinámica es una de las teorías sobre la naturaleza más firmemente establecidas. Esto se debe no solamente a la validez de sus principios, que se han visto verificados en cada experimento realizado, sino también al papel fundamental que ha jugado en el desarrollo tecnológico y a la vigencia de sus aplicaciones. Podría decirse que pocas teorías gozan de semejante reputación.

Quizás debido a este carácter casi dogmático que ostenta, ya desde los albores de la Mecánica Cuántica (MC) surgió el cuestionamiento sobre la vinculación entre ambas teorías. La comprensión de esta vinculación, que casi un siglo después aún dista de ser completa, es de suma importancia no solo desde el punto de vista académico o filosófico, sino también desde la perspectiva tecnológica. La progresiva miniaturización de los dispositivos electrónicos requiere establecer control sobre sistemas que actualmente llegan al orden nanométrico, por lo que una comprensión detallada de cómo los efectos cuánticos compiten con las fluctuaciones térmicas es de vital importancia [1], [2].

Estas razones, sumadas a las posibilidades que promete la implementación de la Computación Cuántica [3], han derivado en un importantísimo florecimiento en las últimas décadas de trabajos que exploran la termodinámica en este régimen, y que se agrupan bajo la denominación general de *Termodinámica Cuántica* (TC). Cabe aclarar que la TC no es una disciplina bien establecida como lo son las teorías de las que su nombre deriva y que ésta intenta conciliar, sino que dentro de ella conviven diversos enfoques provenientes de distintos paradigmas, que se diferencian en el objeto específico de estudio y/o en las herramientas utilizadas para su abordaje.

Grosso modo, las principales cuestiones que aborda la TC son:

- La emergencia del comportamiento termodinámico a partir de los principios de la MC. Si la MC es la teoría fundamental subyacente, entonces toda la física macroscópica debería poder ser explicada a partir de ella.
- El rango de aplicación de las Leyes de la Termodinámica, su validez o no en escalas de longitud y tiempo pequeñas, y en sistemas que no pueden ser descritos por la Mecánica Estadística (ME), en particular, en sistemas cuánticos individuales.

Con respecto al primer punto, la principal limitación surge al intentar explicar los procesos irreversibles. La existencia de dichos procesos se evidencia en la experiencia cotidiana, al observar, por ejemplo, la dirección del flujo de calor entre dos cuerpos que se encuentran a diferente temperatura. La mayoría de los procesos ocurren espontáneamente en un sentido (con un incremento de la entropía global asociado) y no en el sentido opuesto, fenómeno que usualmente se denomina *flecha del tiempo*. Sin embargo, la evolución de los sistemas cuánticos es unitaria, y los procesos unitarios son reversibles. Existe entonces una contradicción entre la evolución reversible de la que goza la teoría fundamental (la MC) y la irreversibilidad que se hace presente en casi todos los fenómenos macroscópicos y que son correctamente descritos por la Termodinámica. Esta contradicción, que sigue sin solución universalmente aceptada, se conoce como *Paradoja de Loschmidt* [4], y fue planteada décadas antes del surgimiento de la

MC. De hecho, el planteo original de Loschmidt fue una crítica al famoso *Teorema H* de Boltzmann, del cual se puede deducir la mencionada flecha del tiempo ¹ y que se prueba a partir de leyes (en ese tiempo, de la Mecánica Clásica) que son reversibles ante transformaciones de inversión temporal. La crítica de Loschmidt tuvo un efecto tan profundo sobre Boltzmann, que sus intentos por aclarar el asunto derivaron en su interpretación estadística de la Segunda Ley, y en su famosa expresión para la entropía

$$S = K_B \log(\Omega) \quad (1.1)$$

siendo K_B la constante que lleva su nombre, y Ω el número de microestados del sistema compatibles con el macroestado dado.

Una posible solución de la paradoja planteada nos conduce al segundo ítem mencionado, aspecto sobre el cual en las últimas décadas se han logrado grandes avances. Dentro de los resultados más remarcables se encuentran los denominados *Fluctuation Theorems* [5], [6] que muestran que existe una probabilidad no nula de que la entropía de un sistema aislado arbitrario evolucione en sentido contrario al que establece la Segunda Ley de la Termodinámica. Esta probabilidad posee una distribución exponencial que decrece con el tamaño del sistema y con el tiempo, lo cual explica que ese tipo de procesos no sean observables en la práctica cotidiana. Sin embargo, simulaciones computacionales y experimentos finamente diseñados han permitido detectar las fluctuaciones que predice el teorema [7].

En cuanto a las distintas aproximaciones a la TC, todas comparten la hipótesis fundamental de que el universo es un sistema aislado que evoluciona unitariamente bajo la acción de un Hamiltoniano global, para luego analizar el comportamiento de los sistemas que lo componen empleando la MC de sistemas abiertos. Los diferentes matices se dan en función de los insumos provenientes de otras disciplinas que se emplean en el análisis. Dentro de las distintas corrientes, se destacan particularmente los desarrollos vinculados al campo de la *Teoría de la Información*, por lo que haremos algunos comentarios al respecto.

El rol de la información en las teorías físicas permaneció oculto hasta las primeras décadas del siglo XX y se remonta al surgimiento de la Teoría de la Información [8], donde se aprecia una sugestiva analogía entre la entropía termodinámica y los conceptos de *Entropía de la información* (Shannon), o su correspondiente cuántico, la *Entropía de Von Neumann*. Sin embargo, su relevancia sólo fue clara cuando permitió resolver un viejo enigma: la célebre paradoja denominada *Demonio de Maxwell* [9].

El experimento mental propuesto por Maxwell para explicar cómo podría violarse la Segunda Ley utiliza un gas dividido en dos compartimentos separados por una pared con un pequeño orificio, y asume la existencia de una entidad que posee la capacidad de clasificar las moléculas del gas en función de su velocidad, permitiendo el pasaje de aquellas que tienen una energía mayor que el promedio hacia un recinto (digamos, el de la derecha), y al mismo tiempo dejando pasar las que se encuentran del lado derecho con una energía menor que la media hacia el recinto de la izquierda. De esta manera, se produciría un gradiente de temperatura en un sistema en equilibrio sin gasto de calor ni trabajo, lo que equivale a una reducción de la entropía global y por lo tanto, a una violación a la Segunda Ley. Alternativamente, una vez generado el gradiente de temperatura, se podría obtener trabajo de forma cíclica colocando una máquina térmica entre ambos reservorios hasta alcanzar el equilibrio y repitiendo el procedimiento, lo cual nuevamente entra en contradicción con el mencionado principio.

Durante casi un siglo, los esfuerzos (sin éxito) volcados a resolver esta paradoja se centraron en incluir al demonio en la descripción e intentar calcular la irreversibilidad asociada al proceso de medición necesario para decidir a qué moléculas permitir el paso. La solución de la paradoja consiste en observar que el proceso no es cíclico debido a que la *memoria* del demonio ha

¹De hecho, *dos* posibles flechas del tiempo, como Loschmidt observó.

adquirido información, la cual debe ser borrada para que el sistema total vuelva al estado inicial. Este proceso de borrado resulta ser irreversible, por lo que tiene un incremento de entropía asociado. Los trabajos de Landauer [10] mostraron que la mínima energía necesaria para borrar un bit de información esta dado por la *cota de Landauer*

$$E_{min} = K_B T \log 2 \quad (1.2)$$

resultado que ha sido observado experimentalmente [11]. La inclusión del cambio de entropía asociado a este término en el balance total implica, en efecto, que el experimento propuesto sí satisface la Segunda Ley. Generalizaciones del resultado de Landauer al régimen cuántico han también sido reportadas en la bibliografía [12].

Con respecto a las principales líneas de investigación actuales dentro de la TC, podemos destacar el estudio de la transición hacia los estados de equilibrio (*termalización*) y la búsqueda de protocolos de extracción de *trabajo útil* de sistemas microscópicos. En particular, versiones cuánticas de los ciclos de potencia tradicionales (Stirling, Otto, etc) ya han sido desarrollados [13], obteniéndose en algunos casos eficiencias mayores que para los correspondientes ciclos clásicos [14].

Habiendo presentado ya un panorama general de la disciplina, pasamos a comentar las líneas en las que se enmarca este trabajo.

La hipótesis de partida es que los sistemas cuánticos pueden presentar un comportamiento de tipo termodinámico, que dicho comportamiento puede explicarse dentro de las reglas de juego de la MC y que las correlaciones generadas entre determinado sistema y su ambiente, particularmente el enredo, juegan un rol preponderante en la emergencia de los estados de equilibrio. Bajo esa línea directriz, y luego de introducir las herramientas físicas necesarias, en el capítulo 3 desarrollaremos los primeros pasos de una teoría que denominamos *Termodinámica del Enredo*, identificando sus estados de equilibrio y caracterizándolos mediante una *Temperatura de Enredo* que será definida observando la analogía existente entre ciertas densidades reducidas asintóticas y la distribución de probabilidad canónica de la ME. Luego de explorar las propiedades que posee la temperatura de enredo, algunos resultados generales sobre la ubicación asintótica de dichos estados de equilibrio en la esfera de Bloch, así como las termalizaciones posibles para ciertos conjuntos de operadores de Kraus, son enunciados y demostrados.

En el siguiente capítulo nos centramos en el análisis de un ejemplo concreto, la *Caminata Cuántica* [15], sobre el cual se definió la temperatura de enredo en el trabajo original [16]. La diferencia entre dicho trabajo y lo presentado aquí radica en el método analítico empleado en la resolución así como en el estado inicial considerado, que en este caso se trata de un caminante deslocalizado, con impulso totalmente definido. Esta elección permitirá contrastar los resultados del capítulo anterior con un ejemplo físico concreto.

Para finalizar, en el capítulo 5 se estudia la termalización debida al enredo en el paradigmático modelo propuesto por Jaynes y Cummings [17], que estudia la interacción entre un átomo de dos niveles con un modo cuantizado del campo electromagnético. Este modelo, famoso por presentar colapsos y resurgimientos de las poblaciones de los estados excitado y fundamental del átomo, permitirá mostrar el papel relevante que juega el nivel de ocupación inicial del sistema considerado como ambiente en el proceso de termalización.

Si bien consideramos que el enfoque es novedoso, existen numerosos trabajos en la literatura que abordan esta temática. Por ejemplo, sobre los aspectos termodinámicos del entrelazamiento, puede consultarse la referencia [18], y remitimos a los trabajos [19] y [20] para obtener una noción general sobre los resultados más relevantes acerca de la termalización en el régimen cuántico.

Elementos de Mecánica Cuántica en Sistemas Abiertos

Este capítulo tiene por objetivo presentar las nociones básicas de Mecánica Cuántica (MC) que resultan relevantes para la comprensión del resto del trabajo. Cabe aclarar que esta exposición no pretende ser completa ni rigurosa, ya que existe sobradísima bibliografía disponible que satisface estos requisitos. Nuestra intención pasa más bien por proporcionar al lector una inmediata referencia en caso de necesitarla.

Por lo tanto, aquellos que se encuentren familiarizados con los puntos aquí tratados, podrán prescindir de la lectura de este capítulo sin comprometer de forma alguna la comprensión del resto de la tesis. Aquellos que, en cambio, deseen profundizar, podrán consultar cualquiera de las excelentes referencias disponibles, por ejemplo los clásicos [21], [22], [23].

2.1. MC de Estados Puros

2.1.1. Espacio de estados

La MC postula que el estado de un sistema aislado A al tiempo t queda completamente definido a partir de un vector $|\psi(t)\rangle$, normalizado y perteneciente a cierto espacio vectorial complejo (específicamente, un espacio de Hilbert) que denotaremos \mathcal{H}_A , y que se denomina *espacio de estados* de A . La afirmación acerca de que el vector $|\psi(t)\rangle$ define el estado cuántico significa que la máxima información disponible sobre el sistema se encuentra codificada en dicho vector.

Obsérvese que la estructura de espacio vectorial del espacio de estados implica que superposiciones de estados del tipo $|\psi(t)\rangle = \sum_i \alpha_i |\varphi_i(t)\rangle$ con $\sum_i |\alpha_i|^2 = 1$ son también estados posibles del sistema. Esta propiedad es responsable por algunos de los comportamientos más contraintuitivos que presenta la MC, en particular los efectos de interferencia.

Si el sistema está compuesto por dos subsistemas S y E con respectivos espacios de estados \mathcal{H}_S y \mathcal{H}_E , en este caso la MC postula que el espacio de estados asociado al sistema compuesto está dado por el producto tensorial de los respectivos espacios, es decir [3]:

$$\mathcal{H}_{SE} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E \quad (2.3)$$

Por lo tanto, si disponemos de sendas bases ortonormales $\{|\varphi_j\rangle_S\}$ y $\{|\omega_k\rangle_E\}$ de \mathcal{H}_S y \mathcal{H}_E , una base ortonormal de estados para el sistema total estará dada por el conjunto $\{|\varphi_j\rangle_S \otimes |\omega_k\rangle_E\}$. Esto implica que los estados más generales de un sistema bipartito pueden escribirse en la forma

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k} \alpha_{jk} |\varphi_j\rangle \otimes |\omega_k\rangle \quad (2.4)$$

donde los coeficientes deben satisfacer la condición de normalización $\sum_{j,k} |\alpha_{jk}|^2 = 1$. Este postulado se extiende de manera natural a sistemas compuestos por N subsistemas.

A cada uno de los vectores normalizados del espacio de estados de un sistema dado se le denomina *estado puro*, independientemente de si se trata de un vector de la base elegida para describirlo o de una superposición de ellos.

2.1.2. Evolución

Según los postulados de la MC, la evolución de los sistemas cuánticos aislados es unitaria. Esto significa que si el estado inicial es $|\psi(t_0)\rangle$, el estado al tiempo t estará dado por la acción de cierto operador unitario $U(t, t_0)$ sobre el estado inicial, o sea [3]

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (2.5)$$

Dado que las transformaciones unitarias preservan el producto interno, este postulado asegura que el estado estará normalizado para todo tiempo. Esto será necesario para que las probabilidades de las distintas medidas sumen 1 en todo instante.

Otra consecuencia importante del carácter unitario de la evolución es la imposibilidad para un sistema aislado de alcanzar estados de equilibrio, como veremos más adelante. Esto resulta un obstáculo si uno espera encontrar algún tipo de comportamiento termodinámico en sistemas cuánticos. Sin embargo, no debe perderse de vista que la noción de “sistema cuántico aislado” es una idealización, y que en los hechos, todo sistema interactúa en mayor o menor medida con su ambiente. Veremos que el enredo producido por esa interacción podrá, eventualmente, favorecer que se alcancen estados que desde algún punto de vista (que deberá definirse adecuadamente), pueden considerarse de equilibrio.

Una versión más refinada del postulado de evolución puede plantearse si la dinámica se da en tiempo continuo. En este caso, el estado al tiempo t de un sistema aislado verifica la siguiente ecuación diferencial:

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle \quad (2.6)$$

conocida como ecuación de Schrödinger. Aquí, H es un operador hermítico denominado Hamiltoniano del sistema (usualmente asociado a la energía del mismo), y es sencillo mostrar que su relación con el operador evolución, para el caso en que H es independiente de t , es la siguiente:

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{iH(t-t_0)}{\hbar}} \quad (2.7)$$

2.1.3. Observables y Medidas

La MC asocia a cada magnitud física medible un operador lineal y hermítico, denominado *observable*, definido sobre el espacio de estados del sistema, y que satisface que sus autovalores son los posibles resultados de la medición de dicha magnitud. También establece la regla que permite calcular las probabilidades de cada medida: supongamos que el sistema se encuentra en el estado puro $|\psi\rangle$ y que A es el observable que deseamos medir. Si expresamos A mediante su descomposición espectral (la suma en k denota la posible degeneración del autovalor a_j):

$$A = \sum_{j,k} a_j |A_{j,k}\rangle \langle A_{j,k}| \quad (2.8)$$

Entonces, la probabilidad de obtener a_n está dada por:

$$p(a_n) = \sum_k \langle \psi | A_{n,k} \rangle \langle A_{n,k} | \psi \rangle = \sum_k |\langle \psi | A_{n,k} \rangle|^2 \quad (2.9)$$

lo cual corresponde al módulo cuadrado de la proyección del estado sobre el subespacio propio asociado al autovalor cuya probabilidad se calcula. En particular, el valor esperado de la magnitud en cuestión estará dado por

$$\langle A \rangle = \sum_n a_n p(a_n) = \sum_n a_n \sum_k \langle \psi | A_{n,k} \rangle \langle A_{n,k} | \psi \rangle = \langle \psi | \sum_{n,k} a_n | A_{n,k} \rangle \langle A_{n,k} | \psi \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle \quad (2.10)$$

Sumado a esto, la MC postula que el estado inmediatamente después de la medida corresponde a la proyección normalizada del estado inmediatamente anterior a la medida sobre dicho subespacio. Es decir, si el resultado de la medida fue a_n , el estado posterior será:

$$|\psi'\rangle = \frac{\sum_k |A_{n,k}\rangle \langle A_{n,k} | \psi \rangle}{\sqrt{p(a_n)}} \quad (2.11)$$

O sea que las medidas vienen asociadas a una ruptura de la unitariedad de la evolución, produciéndose un colapso del estado sobre un subespacio específico del espacio de estados. A pesar de estar de acuerdo con la experiencia, este postulado ha resultado insatisfactorio para muchos debido a que no explica como se eligen *a priori* los subespacios posibles, ni cual es el mecanismo que selecciona uno de ellos luego de la medida. Estas cuestiones, que han recibido el nombre de “el problema de la medida”, han sido el motor principal del surgimiento de las diversas interpretaciones existentes de la MC. Algunas buenas referencias sobre estos asuntos, así como sobre esquemas de medida más generales que el expuesto aquí, son [24], [25].

2.1.4. Estados enredados

Consideremos estados puros generales de sistemas bipartitos del tipo (2.4). En el caso en que dicho estado pueda factorizarse de acuerdo a

$$|\psi\rangle = |\psi_S\rangle \otimes |\psi_E\rangle \quad (2.12)$$

con $|\psi_S\rangle \in S$, $|\psi_E\rangle \in E$, diremos que el estado es *separable*, y cada uno de los subsistemas se encontrará también en un estado puro, representado respectivamente por los factores en (2.12). De no ser posible efectuar dicha factorización, se dirá que el estado es *enredado* o *entrelazado*. En este caso, no es posible asignar un estado (puro) a cada subsistema [3]. Esto es un fenómeno cuántico sin contrapartida clásica: objetos enredados sólo son plausibles de ser descritos en términos de un estado global, independientemente de su separación espacial. A modo de ejemplo, consideremos el siguiente estado de Bell asociado a un sistema de dos partículas de espín 1/2:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|00\rangle + |11\rangle] \quad (2.13)$$

Es sencillo mostrar que si intentamos expresar el estado en forma de producto, desarrollando

$$|\psi\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle)(c|0\rangle + d|1\rangle)$$

se obtiene la contradicción $ac = 1/\sqrt{2}$, $bd = 1/\sqrt{2}$, $ad = 0$, lo que muestra que es imposible expresar el estado como producto de estados de los respectivos espines. No obstante, en las próximas secciones veremos que será posible introducir un nuevo objeto que permitirá calcular las probabilidades de los distintos observables locales asociados a cada uno de los subsistemas.

La existencia de los estados enredados fue predicha en el famoso trabajo de Einstein, Podolsky y Rosen [26] y ha sido objeto de debate por lo contraintuitivo de sus consecuencias, en particular porque representaba una ruptura a la consigna de que las teorías físicas debían adaptarse a la tesis realista local. Esto se debe a que mediciones realizadas en una parte de

un sistema enredado implican modificaciones instantáneas en la otra parte. La luz sobre este asunto llegó de la mano de los trabajos de Bell [27] y las posteriores experiencias [28] que, dentro de márgenes de error más que aceptables, parecen haber inclinado la balanza en favor de la existencia de los estados enredados.

El enredo cuántico representa uno de los campos más fértiles de estudio dentro de la MC debido a la potencialidad de sus aplicaciones, en particular en lo referido a algoritmos en computación cuántica y teleportación [29], [30], [31], [32]. En este trabajo no profundizaremos en estas aplicaciones, ya que nuestro interés se centrará en un aspecto específico del enredo, puntualmente, en su capacidad de producir estados de equilibrio.

2.2. Mezclas estadísticas y MC en sistemas abiertos

2.2.1. El operador densidad

Consideremos un sistema que se encuentra en un estado caracterizado por una mezcla estadística de estados puros $\{|\psi_j\rangle\}$, con pesos p_j donde $\sum_j p_j = 1$. Resulta conveniente introducir el operador densidad mediante la relación:

$$\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \quad (2.14)$$

Naturalmente, si el sistema se encuentra en un estado puro $|\psi\rangle$ la definición anterior implica que el operador densidad se reduce al proyector $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$.

Es trivial mostrar que este operador satisface las siguientes propiedades:

- Es semidefinido positivo
- Es hermítico
- $tr(\rho) = 1$, donde tr denota la operación traza

La importancia de este operador radica en que es el equivalente al estado cuántico para sistemas que se encuentran en estados no puros, en el sentido de que permite obtener toda la información disponible sobre el sistema. Para ver esto, obsérvese que si deseamos calcular valores esperados de observables de sistemas que se encuentran en estados mezclados, debemos lidiar con dos tipos de probabilidades. Por un lado, sabemos que existe una incertidumbre puramente cuántica en la medición, que ya fue descrita en la sección anterior y que está presente incluso cuando el estado es puro. Pero a esto debemos agregarle la incertidumbre estadística, dado que estamos frente a un ensemble de estados caracterizado por cierta distribución de probabilidad. Entonces, para el valor esperado de un observable A se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \sum_j p_j \langle\psi_j|A|\psi_j\rangle \\ &= \sum_j p_j tr(|\psi_j\rangle\langle\psi_j|A) \\ &= \sum_j tr(p_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j|A) \\ &= tr\left(\sum_j p_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j|A\right) \\ &= tr(\rho A) \end{aligned} \quad (2.15)$$

En cuanto a la evolución del operador densidad, ésta se deduce directamente de la evolución unitaria de cada estado del ensemble:

$$\begin{aligned}
\rho(t) &= \sum_j p_j |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| \\
&= \sum_j p_j U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle\langle\psi(t_0)| U^\dagger(t, t_0) \\
&= U(t, t_0) \left(\sum_j p_j |\psi(t_0)\rangle\langle\psi(t_0)| \right) U^\dagger(t, t_0) \\
&= U(t, t_0) \rho(t_0) U^\dagger(t, t_0)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

O podemos obtener su versión más sofisticada en tiempo continuo, que es consecuencia directa de la ecuación de Schrodinger:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] \tag{2.17}$$

donde denotamos el conmutador de dos operadores: $[A, B] = AB - BA$

Otra característica importante del operador densidad es que permite establecer el grado de pureza de la mezcla en el que se encuentra el sistema. Obsérvese que si el estado es puro, el operador se reduce a $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Luego, $\rho^2 = |\psi\rangle\langle\psi| |\psi\rangle\langle\psi| = \rho$ y por lo tanto, $tr(\rho^2) = tr(\rho) = 1$. Para sistemas mezclados (en la base en que su expresión es diagonal), se tiene: $\rho^2 = \sum_{j,k} \lambda_j \lambda_k |\psi_j\rangle\langle\psi_j| |\psi_k\rangle\langle\psi_k| = \sum_j \lambda_j^2 |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$, por lo que $tr(\rho^2) = \sum_j \lambda_j^2 < 1$. En particular, puede verse que la cota inferior para $tr(\rho^2)$ está dada por el estado máximamente mezclado, para el cual $tr(\rho^2) = 1/dim(\mathcal{H}_A)$. Por estas razones, a $tr(\rho^2)$ se le denomina *pureza* del estado.

Para finalizar esta presentación del operador densidad, discutiremos el significado de las entradas de su expresión matricial. Típicamente, se afirma que sus elementos diagonales corresponden a las probabilidades de medir un cierto estado del ensemble, mientras que sus elementos no diagonales cuantifican el grado de interferencia entre los estados correpondientes y por lo tanto tienden a anularse para sistemas que se aproximan a la clasicidad. Esta interpretación se basa en el siguiente cálculo:

$$\rho_{kk} = \langle\psi_k|\rho|\psi_k\rangle = \sum_j p_j \langle\psi_k|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\psi_k\rangle = \sum_j p_j p(k|j) = p(k) \tag{2.18}$$

donde $p(k|j)$ denota probabilidad condicional. Esta interpretación es correcta siempre y cuando conozcamos el ensemble de estados puros que dicho operador representa, lo cual no siempre es el caso. De hecho, es sencillo mostrar que infinitos ensembles de diferentes estados puros con diferentes probabilidades pueden conducir al mismo operador densidad, siempre que estén relacionados mediante una transformación unitaria. Es decir que el operador densidad posee toda la información disponible sobre el sistema para cierto observador, pero no la máxima información existente sobre el sistema (no contiene la información del ensemble que representa), a diferencia de los estados puros que sí portan la máxima información disponible. A modo de ejemplo, diferentes observadores pueden disponer de distinta información sobre el sistema y asignarán a éste, por lo tanto, distintos operadores densidad.

2.2.2. Sistemas abiertos. Operador Densidad Reducida

Si ahora nuestro interés se centra en un subsistema S , el objeto que porta la información relevante es el *operador de densidad reducida*. Consideremos un sistema bipartito SE descrito por su operador densidad ρ_{SE} , donde S representará el sistema de interés y E el ambiente con el cual interactúa. Entonces, el operador de densidad reducida se define como:

$$\rho_S(t) = \text{tr}_E(\rho_{SE}) = \sum_k \langle k|_E \rho_{SE} |k\rangle_E \quad (2.19)$$

siendo $\{|k\rangle_E\}$ una base ortonormal de E . La operación tr_E definida arriba se denomina *traza parcial*, y puede mostrarse que preserva las propiedades de semipositividad, hermiticidad y normalización del operador ρ . Como resultado, se obtiene el operador ρ_S que actúa exclusivamente en el espacio \mathcal{H}_S y es el objeto central en el estudio de los sistemas abiertos, dado que permite calcular correctamente los valores esperados que toman los observables locales definidos en \mathcal{H}_S . Para ver esto, consideremos un observable local $X : \mathcal{H}_S \rightarrow \mathcal{H}_S$ y extendámoslo al espacio total multiplicando tensorialmente por la identidad I_E del espacio \mathcal{H}_E . Si denotamos por $X' = X \otimes I_E$ a dicho operador extendido y consideramos una base ortonormal $\{|j\rangle_S |k\rangle_E\}$ del espacio total, es claro que se debe satisfacer $\langle X' \rangle = \langle X \rangle$. Entonces:

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= \langle X' \rangle \\ &= \text{tr}_{SE}(\rho_{SE} X') \\ &= \sum_{j,k} \langle j|_S \langle k|_E \rho_{SE} X \otimes I_E |j\rangle_S |k\rangle_E \\ &= \sum_j \langle j|_S \left[\sum_k \langle k|_E \rho_{SE} |k\rangle_E \right] |j\rangle_S \\ &= \sum_j \langle j|_S \text{tr}_E \rho_{SE} X |j\rangle_S \\ &= \sum_j \langle j|_S \rho_S X |j\rangle_S \\ &= \text{tr}(\rho_S X) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Por lo tanto, si $\{A\}$ es el conjunto de los observables locales definidos en \mathcal{H}_S , sus valores esperados se obtienen a partir del operador densidad reducida a través de:

$$\langle A(t) \rangle = \text{tr}(\rho_S(t) A) \quad (2.21)$$

2.2.3. Evolución del operador densidad reducida. Representación de Kraus

Consideremos un sistema aislado bipartito SE en las condiciones descritas anteriormente. En virtud de (2.5), la evolución del operador densidad asociado al sistema completo está dada por

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle\langle\psi(t_0)| U^\dagger(t, t_0) = U(t, t_0) \rho(t_0) U^\dagger(t, t_0) \quad (2.22)$$

donde $U(t, t_0)$ es el operador evolución. Si partimos de un estado inicial no correlacionado en el cual el baño se encuentra en cierto estado puro $|0\rangle_E$, el operador densidad en el instante inicial se escribe $\rho(t_0) = |0\rangle_E \langle 0|_E \otimes \rho_S(t_0)$. Luego, como estamos interesados en la evolución del subsistema S , debemos tomar la traza parcial en los grados de libertad del ambiente. Sea

$\{|\varphi_j\rangle\}$ una base ortonormal de E , entonces:

$$\begin{aligned}
\rho_S(t) &= \sum_j \langle \varphi_j | U(t, t_0) | 0 \rangle_E \langle 0 |_E \otimes \rho_S(t_0) U^\dagger(t, t_0) | \varphi_j \rangle \\
&= \sum_j \langle \varphi_j | U(t, t_0) | 0 \rangle_E \rho_S(t_0) \langle 0 |_E U^\dagger(t, t_0) | \varphi_j \rangle \\
&= \sum_j M^{(j)} \rho_S(0) M^{(j)\dagger}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

donde se han definido los operadores $M^{(j)} = \langle \varphi_j | U(t, t_0) | 0 \rangle_E$ que actúan exclusivamente sobre el espacio S y se denominan *operadores de Kraus*. A la representación dada por la ecuación (2.23) se le denomina *representación de Kraus* o *representación en suma de operadores*. Obsérvese que la representación no es única dado que depende de la base $\{|\varphi_j\rangle\}$ elegida. Además, dichos operadores satisfacen la relación de completitud:

$$\sum_j M^{(j)\dagger} M^{(j)} = \sum_j \langle 0 |_E U^\dagger(t, t_0) | \varphi_j \rangle \langle \varphi_j | U(t, t_0) | 0 \rangle_E = \langle 0 |_E U^\dagger(t, t_0) \left[\sum_j |\varphi_j\rangle \langle \varphi_j| \right] U(t, t_0) | 0 \rangle_E = 1 \tag{2.24}$$

Es posible mostrar que evoluciones gobernadas por un conjunto de operadores que satisfacen (2.23) y (2.24) preservan las propiedades de hermiticidad, normalización y positividad del operador densidad reducida ρ_S [3]. Obsérvese que en el caso excepcional de que exista solamente un operador de Kraus no nulo, se recupera el carácter unitario de la evolución. Cuando hay más términos en la suma, la evolución no será unitaria, en general será no invertible y los sistemas presentarán enredo, por lo que podría vincularse el entrelazamiento con una “flecha del tiempo” a nivel microscópico

2.2.4. Entropía de Von Neumann

La *entropía de Von Neumann* es la extensión a sistemas cuánticos de la entropía de Shannon, que mide la incerteza asociada a cierta distribución de probabilidad. Sea ρ el operador densidad asociado al sistema, entonces la entropía de Von Neumann se define como:

$$S(\rho) = -\text{tr}(\rho \log(\rho)) \tag{2.25}$$

donde el logaritmo suele tomarse en base 2. Es sencillo ver que si el espectro de dicho operador está constituido por los autovalores $\{\lambda_j\}, j = 1, \dots, N$ entonces la entropía se reduce a la expresión

$$S = - \sum_j \lambda_j \log \lambda_j \tag{2.26}$$

(debe tomarse $0 \cdot \log(0) = 0$), que resulta en los hechos más práctica para su cálculo.

A continuación citamos, sin demostración, algunas de sus propiedades. Las pruebas pueden encontrarse, por ejemplo, en [3]

- $0 \leq S(\rho) \leq \log(\text{dim}(\mathcal{H}_S))$. Los extremos se obtienen cuando el estado es puro ($S = 0$) y cuando está máximamente mezclado ($S = \log(\text{dim}(\mathcal{H}_S))$).
- Si el sistema AB se encuentra en un estado puro, entonces $S(\rho_A) = S(\rho_B)$
- Es no decreciente ante medidas proyectivas. Sin embargo, puede disminuir ante medidas generalizadas.

- Si ρ_1 y ρ_2 son estados arbitrarios, entonces $S(\rho_1 \otimes \rho_2) = S(\rho_1) + S(\rho_2)$
- Es una función cóncava: Si $\{p_j\}$ es una distribución de probabilidad asociada a ciertos estados $\{\rho_j\}$, entonces $S(\sum_j p_j \rho_j) \geq \sum_j p_j S(\rho_j)$.

Una de las utilidades principales de esta entropía es que aplicada al caso de operadores densidad reducidos, representa una buena medida del enredo entre el sistema y su ambiente [33]. Las cuestiones acerca de su relación con la entropía termodinámica, o si efectivamente representa una extensión fiel de la entropía de Shannon aún siguen siendo motivo de debate [34].

2.2.5. Descomposición de Schmidt

En el marco de los sistemas bipartitos, que son el objeto de estudio de este trabajo, es posible demostrar el siguiente teorema

Proposición 2.2.1. *Descomposición de Schmidt.*

Sea $|\psi_{SE}\rangle$ un estado puro de un sistema bipartito definido en $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$. Entonces, existen sendas bases ortonormales $\{|\varphi_S\rangle_j\}$ de \mathcal{H}_S y $\{|\varphi_E\rangle_j\}$ de \mathcal{H}_E tales que el estado se puede escribir en la forma

$$|\psi_{SE}\rangle = \sum_j \lambda_j |\varphi_S\rangle_j \otimes |\varphi_E\rangle_j \quad (2.27)$$

con $\sum_j \lambda_j^2 = 1$

Recuérdese que la expresión más general para los estados de sistemas bipartitos estaba dada por (2.4), por lo que la posibilidad de expresar el estado en términos de una suma en un solo índice es un resultado bastante remarcable.

Definiremos el *índice de Schmidt* de un estado como la cantidad de términos no nulos en la suma (2.27). Obsérvese que los estados con índice de Schmidt igual a 1 serán separables, mientras que si dicho índice es mayor a uno, el estado estará enredado.

Analicemos qué ocurre si calculamos las densidades reducidas de los respectivos subsistemas:

$$\begin{aligned} \rho_S &= tr_E(\rho_{SE}) \\ &= tr_E |\psi_{SE}\rangle \langle \psi_{SE}| \\ &= tr_E \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j |\varphi_S\rangle_i |\varphi_E\rangle_i \langle \varphi_S|_j \langle \varphi_E|_j \\ &= \sum_{i',i,j} \langle \varphi_E|_{i'} \lambda_i \lambda_j |\varphi_S\rangle_i |\varphi_E\rangle_i \langle \varphi_S|_j \langle \varphi_E|_{i'} |\varphi_E\rangle_{i'} \\ &= \sum_{i',i,j} \delta_{i'j} \delta_{i'i} \lambda_i \lambda_j |\varphi_S\rangle_i \langle \varphi_S|_j \\ &= \sum_j \lambda_j^2 |\varphi_S\rangle_j \langle \varphi_S|_j \end{aligned} \quad (2.28)$$

y análogamente, $\rho_E = \sum_j \lambda_j^2 |\varphi_E\rangle_j \langle \varphi_E|_j$, por lo que los estados reducidos tendrán el mismo espectro. Es claro observar si el índice de Schmidt es mayor a 1, se tendrá que:

$$tr(\rho_S^2) = \sum_j \lambda_j^4 < 1 \quad (2.29)$$

por lo que el estado será mezclado. Es decir que los estados puros enredados de sistemas compuestos se caracterizan por el hecho de que los respectivos estados reducidos se encontrarán mezclados.

2.3. Qubits

En términos generales, un *qubit* es un sistema cuántico tal que su espacio de estados posee dimensión 2. Su importancia principal radica en que corresponde a la unidad mínima de información cuántica, por analogía con el *bit* clásico. Dado que este trabajo se centrará en el estudio de la interacción de qubits con otros sistemas, dedicaremos esta sección a introducir una herramienta que permite una elegante visualización de los estados de un qubit, denominada Esfera de Bloch.

Consideremos un estado arbitrario de qubit, que en términos de una base ortonormal $|0\rangle, |1\rangle$ de su espacio de estados se puede escribir en la forma:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (2.30)$$

Obsérvese que cada una de las amplitudes complejas a y b introduce 2 parámetros reales en la descripción del estado. Pero la condición de normalización establece un vínculo, por lo que *a priori* serían necesarios 3 parámetros reales para determinar el estado. Sin embargo, no debemos olvidar que la presencia de una fase global no presenta relevancia física, por lo que este hecho nuevamente reduce en uno los parámetros necesarios. Entonces, resulta evidente que un estado arbitrario de un qubit puede parametrizarse en términos de dos variables γ y φ en la forma:

$$|\psi\rangle = \cos(\gamma/2)|0\rangle + \sin(\gamma/2)e^{i\varphi}|1\rangle \quad (2.31)$$

Luego, interpretando γ y φ como coordenadas esféricas y restringiendo su dominio a los intervalos $0 \leq \gamma \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, tenemos que los estados puros de un qubit se pueden poner en biyección (excepto por los polos) con los puntos de la superficie de una esfera de radio 1, denominada *Esfera de Bloch* y que presentamos en la siguiente figura:

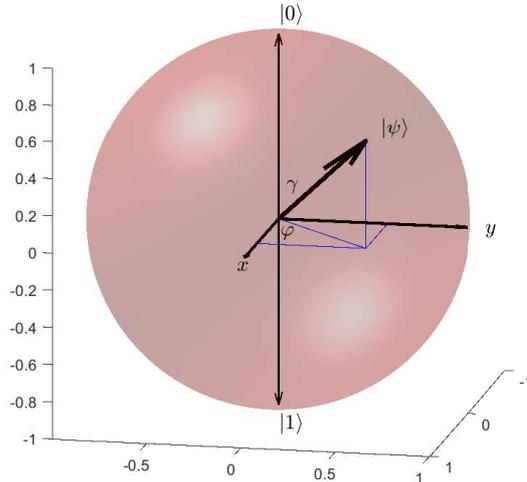


Figura 2.1: Esfera de Bloch. Cada estado puro de un qubit tiene asociado un punto sobre la superficie de la esfera, definido por los ángulos γ y φ de la figura.

La utilidad de la esfera de Bloch no se reduce a la representación de estados puros. Obsérvese que todo operador hermítico con traza 1 en dimensión 2 puede escribirse a partir de 3 parámetros

reales u , v y w en la forma:

$$\rho_S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+w & u-iv \\ u+iv & 1-w \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

O alternativamente:

$$\rho_S = \frac{1}{2}I + \frac{u\sigma_x + v\sigma_y + w\sigma_z}{2} \quad (2.33)$$

Donde I es el operador identidad y σ_x , σ_y y σ_z son las matrices de espín de Pauli, que a menos de una constante son los operadores asociados a las componentes del espín:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Luego, si calculamos los valores esperados del espín mediante (2.15) para el estado mezcla arbitrario (2.32), se obtiene:

$$\begin{cases} \langle \sigma_x \rangle = \text{tr}(\rho_S \sigma_x) = u \\ \langle \sigma_y \rangle = \text{tr}(\rho_S \sigma_y) = v \\ \langle \sigma_z \rangle = \text{tr}(\rho_S \sigma_z) = w \end{cases} \quad (2.35)$$

Por lo que en el espacio real, el espín del sistema, en valor medio, corresponde al vector

$$\vec{B} = (u, v, w) \quad (2.36)$$

denominado *Vector de Bloch*. Esto permite con toda autoridad representar el estado mezclado ρ_S mediante dicho vector. Naturalmente, el argumento expuesto es igualmente válido para estados puros.

Por otro lado, un sencillo cálculo muestra que la pureza satisface la ecuación

$$\text{tr}(\rho_S^2) = 1/2 + \frac{|\vec{B}|^2}{2} \quad (2.37)$$

por lo que los estados en la superficie ($|\vec{B}| = 1$) serán puros, mientras que los que se ubican en el interior ($|\vec{B}| < 1$) serán mezclas. Como caso particular, el estado máximamente mezclado:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

tiene vector de Bloch (0,0,0), por lo que coincide con el centro de la esfera.

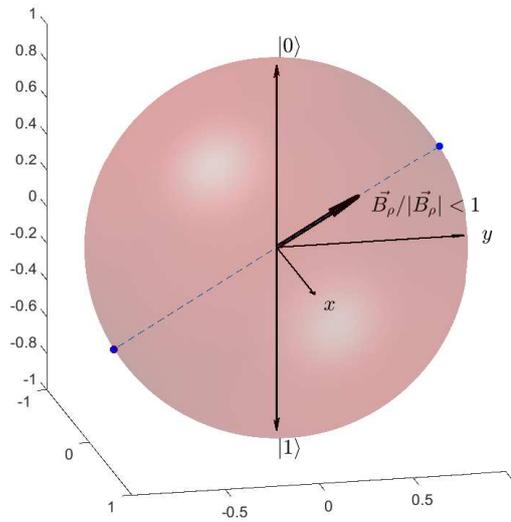


Figura 2.2: Mezclas en la esfera de Bloch. El estado mezclado se ilustra mediante su vector de Bloch, de módulo menor a la unidad. Se muestran los puntos de intersección de la recta sostenida por el vector con la esfera, que sí corresponden a estados puros.

Algunas referencias sobre la implementación de qubits en el marco de la computación cuántica empleando trampas de iones o fotones polarizados pueden ser encontradas en [35], [36] y [37].

Termodinámica del enredo

La *temperatura de enredo* fue introducida en la referencia [16] como un parámetro que permite caracterizar los estados de equilibrio que surgen debido al enredo entre los grados de libertad de posición y quiralidad para una caminata cuántica en el régimen asintótico. Posteriormente, el concepto de temperatura de enredo fue trabajado en las referencias [38], [39] y [40]. Un concepto similar, denominado *temperatura espectral*, ha sido propuesto en [41].

En términos generales y abstrayéndonos de cualquier modelo en particular, la idea implementada en [16] es que si se establece una dinámica de interacción entre 2 sistemas S y E tales que $\dim(\mathcal{H}_S) \ll \dim(\mathcal{H}_E)$, el sistema E (ambiente) puede ser percibido por S como un baño térmico. Esto implicaría que si trazamos en los grados de libertad de E , el estado reducido del sistema S puede ponerse en correspondencia con una distribución canónica, por analogía con el caso clásico. Entonces, en la base en que la densidad reducida es diagonal tendremos que sus autovalores serán de la forma:

$$\lambda_j = \frac{e^{-\beta E_j}}{\sum_j e^{-\beta E_j}} \quad (3.39)$$

donde las E_j son las energías posibles del subsistema S . Luego, la relación anterior permite obtener el parámetro β a partir de los autovalores λ_j de la densidad reducida. Dicho parámetro es lo que se define en la referencia [16] como el inverso de la temperatura de enredo.

El objetivo de este capítulo es establecer bajo qué condiciones el argumento anterior es válido, es decir, caracterizar aquellas densidades reducidas que efectivamente corresponden a estados de equilibrio térmico, que a partir de ahora llamaremos *estados termales* y permiten definir una temperatura de enredo.

En esa dirección, comenzaremos introduciendo las nociones de *equilibración*, *termalización*, *estados termales* y *hamiltoniano y temperatura de enredo*.

Luego, centraremos nuestra atención en sistemas compuestos por un qubit en interacción con cierto ambiente, que, en virtud de la observación realizada parágrafos atrás, se supondrá está descrito por un espacio de Hilbert de dimensión mucho mayor que 2. Para este caso, y asumiendo la equilibración térmica, se demostrarán resultados que permiten establecer si un estado de equilibrio dado corresponde o no a un estado termal y se estudiarán algunas propiedades de los estados termales y de la temperatura de enredo.

Para finalizar, se analizará la termalización para un tipo de evolución reducida específica, a ser, aquella que es guiada por operadores de Kraus que poseen la característica de conformar un conjunto completo de proyectores ortogonales. Este tipo de evolución permite realizar una exploración exhaustiva de los distintos tipos de termalización que el qubit puede alcanzar, lo cual se ilustrará mediante las curvas de nivel de la temperatura en la esfera de Bloch (conjuntos de estados iniciales del qubit que poseen asintóticamente la misma temperatura de enredo).

3.1. Equilibración y Termalización

Cuando términos que históricamente han estado asociados a una disciplina se emplean en otra área del conocimiento, es fundamental definirlos claramente en este nuevo contexto a

efectos de evitar posibles confusiones. Conceptos tales como los de equilibrio o termalización son característicos de la termodinámica clásica, donde su significado está bien definido y no admite dualidad de interpretaciones.

Estos mismos términos han sido adoptados por la TC, y una rápida exploración de la literatura existente muestra que su significado varía de un grupo de investigación a otro. A continuación procederemos a explicitar las definiciones de equilibración y termalización que adoptaremos en este trabajo, que se asemejan en espíritu a las propuestas en [19], aunque son menos restrictivas. Buenas referencias sobre otras nociones de equilibración y termalización y sobre el estado del arte en general son, por ejemplo, [19] y [20].

3.1.1. Equilibración

Sea S un sistema cuántico. Denotemos por \mathcal{H}_S a su espacio de estados y por $\{A\}$ al conjunto de sus observables locales. Diremos que el sistema se equilibra asintóticamente a partir de un estado inicial $\rho_s(0)$ si y solo si existe el límite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle A(t) \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{tr}(\rho_s(t) A) \quad \forall A \in \{A\} \quad (3.40)$$

Obsérvese que según esta definición, el requisito para que el sistema se equilibre es que todos los observables locales tengan valores asintóticos fijos. Naturalmente, esta condición se verificará si el operador densidad reducida satisface que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_s(t) = \rho_s^\infty \quad (3.41)$$

En general, ρ_s^∞ dependerá del estado inicial del sistema y del ambiente con el que interactúa. Dicha dependencia se trasladará, por lo tanto, a los valores asintóticos de todos los observables locales. Entonces, por regla general, los sistemas que se equilibran en el sentido de la definición anterior pueden poseer memoria sobre su estado inicial.

3.1.2. Termalización

Diremos que un sistema cuántico definido en el espacio de estados \mathcal{H}_S e inicialmente en el estado $\rho_s(0)$ termaliza asintóticamente si y solo si

- Se equilibra asintóticamente
- Existe un conjunto denso de estados iniciales B tal que $\rho_0 \in B$ que satisface que el límite (3.40) es independiente de $\rho_0 \in B$
- Existe un operador H_S definido en \mathcal{H}_S y un real β tales que el estado ρ_s^∞ adopta la forma:

$$\rho_s^\infty = \frac{e^{-\beta H_S}}{\text{tr}(e^{-\beta H_S})} \quad (3.42)$$

Obsérvese que la termalización es un proceso más restrictivo que la equilibración en al menos, dos aspectos. En primer lugar, requiere cierta pérdida de memoria sobre el estado inicial. Algunos autores son más estrictos al respecto, proponiendo como requisito para la termalización mayores grados de independencia respecto al estado inicial que el planteado aquí. En el contexto de los modelos bipartitos del tipo subsistema - baño térmico, una opción interesante es exigir independencia en el estado inicial del subsistema [19]. En ese caso, en el cual la pérdida de memoria es total, diremos que ocurre termalización global. Otra exigencia comunmente empleada en la literatura tiene que ver con que el estado reducido final dependa exclusivamente de

las propiedades macroscópicas del baño, y no del estado cuántico particular en que se encuentre inicialmente. Esta opción, si bien es más compatible con la realidad macroscópica, representa serias dificultades operativas a la hora de investigar si un sistema en contacto con un baño termaliza o no.

El otro aspecto importante y sobre el que existe mayor acuerdo, es que para que ocurra termalización el estado reducido debe corresponder a un estado de equilibrio térmico (3.42). Extendámonos sobre este punto.

En Mecánica Estadística, bajo la hipótesis de que los microestados compatibles con el macroestado dado son equiprobables, un cálculo estándar basado en que el estado de equilibrio es aquel que maximiza los microestados ω del sistema total, muestra que los subsistemas de un sistema mayor aislado están descritos por la distribución de probabilidad canónica [44]:

$$p(E_n) = \frac{e^{-\beta E_n}}{\sum_j e^{-\beta E_j}} \quad (3.43)$$

donde E_n son las energías asociadas a cada microestado y $\beta = 1/T$ es un parámetro que se iguala en el equilibrio para los dos sistemas y que se interpreta, por lo tanto, como una función de la temperatura (este cálculo define los conceptos de entropía y temperatura en ME, observando la analogía con un resultado similar de la Termodinámica Clásica). Los estados termales definidos en (3.42) representan el equivalente cuántico de (3.43). Hasta la última década, el principal resultado vinculado con estos estados provenía de los trabajos de Jaynes [45]. En particular, el Principio de Jaynes propone que para determinar el estado (reducido) de un sistema cuántico, debe maximizarse su entropía de Von Neumann (nuestra ignorancia) bajo la restricción impuesta por la información disponible. En particular, si el sistema se encuentra aislado (energía constante), la aplicación trivial del método de Lagrange muestra que la maximización de S sujeta a la condición de que el valor medio de la energía sea constante implica que el estado reducido es de la forma (3.42). Nada se establece acerca de la interpretación del parámetro β , que simplemente juega el papel de ser el multiplicador de Lagrange asociado a dicho proceso de maximización.

Sin embargo, en los últimos años ha resurgido el interés en los estados termales a nivel cuántico debido a que dos importantes trabajos mostraron que dichos estados son mucho más comunes en la naturaleza de lo que se pensaba [46], [47]. En particular, muestran que si se elige al azar un estado puro $|\psi\rangle$ de un sistema aislado, bajo condiciones bastante generales el estado de una porción pequeña de dicho sistema puede ser considerado en equilibrio térmico. A este hecho se le denomina *Tipicalidad Canónica*, y juega un rol importante en nuestro trabajo ya que apoya la hipótesis de que ciertas densidades reducidas pueden considerarse estados termales. Sin embargo, deben tomarse precauciones cuando el subsistema es de distinta naturaleza que su ambiente. La estructura matemática similar (producto tensorial de espacios) empleada para describir, por ejemplo, un subconjunto de espines de un conjunto más amplio, o un átomo interactuando con un baño de fotones, puede conducir a la conclusión errónea de que la tipicalidad canónica vale para ambos sistemas, cuando es sabido que el segundo modelo dista radicalmente de alcanzar estados de equilibrio [51].

Por esta razón, será necesario caracterizar aquellas densidades reducidas que sí corresponden a estados termales. De eso nos ocuparemos en la próxima sección.

3.2. Densidades reducidas y estados termales

3.2.1. El caso diagonal

Por no haberlo encontrado explícitamente en la literatura, enunciaremos el siguiente resultado sobre estados reducidos diagonales:

Proposición 3.2.1. *Sea un sistema cuántico abierto S con hamiltoniano asociado H_S y sea ρ_S su operador densidad reducido. Luego, ρ_S es diagonal en la base de autoestados de H_S si y solo si corresponde a un estado termal:*

$$\rho_S = \frac{e^{-\beta H_S}}{\text{tr}(e^{-\beta H_S})} \quad (3.44)$$

donde se ha definido $\beta = \frac{1}{T} = \left(\frac{dS}{dE} \right)_V$ con $E = \langle H_S \rangle$

Una de las implicaciones es directa: si escribimos la descomposición espectral de H_S : $H_S = \sum_j E_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$, entonces la relación funcional entre ρ_S y H_S lleva a $\rho_S = \sum_j \frac{e^{-\beta E_j}}{\sum_j e^{-\beta E_j}} |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$, por lo que ρ_S será también diagonal. Para ver el recíproco, supongamos que ambos operadores son diagonales en la misma base, y denotemos por (λ_j, E_j) a sus correspondientes parejas de autovalores. Entonces:

$$\begin{aligned} S &= - \sum_{j=1}^N \lambda_j \log(\lambda_j) \rightarrow dS = - \sum_j (d\lambda_j \log(\lambda_j) - d\lambda_j) \\ &= - \sum_j d\lambda_j \log(\lambda_j) - \sum_j d\lambda_j \\ &= - \sum_j d\lambda_j \log(\lambda_j) - d \sum_j \lambda_j \\ &= - \sum_j d\lambda_j \log(\lambda_j) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Por otro lado:

$$E = \langle H_S \rangle = \sum_j \lambda_j E_j \rightarrow dE = \sum_j d\lambda_j E_j + \sum_j \lambda_j dE_j \quad (3.46)$$

Para hamiltonianos cuya dependencia temporal está bajo el control del experimentador, el término

$$\sum_j \lambda_j dE_j \quad (3.47)$$

corresponde al cambio en el valor medio de la energía sobre el cual tenemos control, y por lo tanto se suele considerar como la definición en el régimen cuántico del concepto de *trabajo* (δW) realizado sobre el sistema. Mientras tanto, el término

$$\sum_j d\lambda_j E_j \quad (3.48)$$

computa la modificación en la energía media debido al cambio en el estado cuántico producto de la interacción, el cual es inaccesible al experimentador y por lo tanto puede identificarse con el concepto de *calor* (δQ). Obsérvese que empleando estas definiciones, la ecuación (3.46) adopta la forma

$$dE = \delta Q + \delta W \quad (3.49)$$

y puede interpretarse como una versión de la *Primera Ley de la Termodinámica* en el régimen cuántico.

Nos restringiremos a procesos en los cuales el sistema de interés sólo intercambia calor con su ambiente; en este caso:

$$\beta = \frac{1}{T} = - \frac{\sum_{j=1}^N d\lambda_j \log(\lambda_j)}{\sum_{j=1}^N d\lambda_j E_j} \rightarrow \sum_{j=1}^N d\lambda_j \{-\log(\lambda_j) - \beta E_j\} = 0 \quad (3.50)$$

Obsérvese que debido a la condición de normalización $\sum_{j=1}^N \lambda_j = 1$, las variaciones $d\lambda_j$ no son independientes. Por ejemplo, $\lambda_k = 1 - \sum_{j \neq k}^N \lambda_j \rightarrow d\lambda_k = -\sum_{j \neq k}^N d\lambda_j$. Entonces, (3.50) queda:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=1}^N d\lambda_j \{-\log(\lambda_j) - \beta E_j\} \\
&= \sum_{j \neq k}^N d\lambda_j \{-\log(\lambda_j) - \beta E_j\} + d\lambda_k \{-\log(\lambda_k) - \beta E_k\} \\
&= \sum_{j \neq k}^N d\lambda_j \{-\log(\lambda_j) - \beta E_j\} - \sum_{j \neq k}^N d\lambda_j \{-\log(\lambda_k) - \beta E_k\} \\
&= \sum_{j \neq k}^N d\lambda_j \left\{-\log\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_k}\right) - \beta(E_j - E_k)\right\}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Luego, en virtud de que las variaciones ahora sí son independientes, los respectivos coeficientes deben anularse simultáneamente, de donde se deduce que $\forall j, k$:

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_k} = e^{-\beta(E_j - E_k)} = \frac{e^{-\beta E_j}}{e^{-\beta E_k}} \tag{3.52}$$

Y teniendo en cuenta la condición de normalización, se obtiene:

$$\lambda_j = \frac{e^{-\beta E_j}}{\sum_j e^{-\beta E_j}}, \forall j = 1, \dots, N \tag{3.53}$$

Es decir que los únicos estados reducidos que son diagonales en la base de autoestados de energía son los estados de Gibbs, como se quería demostrar. El resultado anterior permite afirmar que si resolvemos la dinámica reducida de un sistema y obtenemos un operador densidad diagonal, inmediatamente podemos asociarlo a un estado termal y obtener la temperatura conociendo los autovalores de energía del sistema. Sin embargo, nada asegura que el operador H que rige la dinámica del sistema coincida con su hamiltoniano libre, debido a la presencia de interacción con el ambiente. De hecho, en general la evolución de sistemas abiertos no es unitaria y no tiene, por lo tanto, un hamiltoniano asociado, sino que su evolución está gobernada por una relación del tipo (2.23). No obstante, si el sistema se equilibra asintóticamente, en algunos casos será posible encontrar un operador H_{enr} , que denominaremos *Hamiltoniano de Enredo*, cuyos autovalores son las energías posibles del subsistema (asumiendo interacción débil) y que verificará una relación análoga a (3.44), por lo que el estado reducido será termal. En la siguiente sección analizaremos, para el caso de un sistema de dos niveles, bajo qué condiciones un operador de densidad reducida no diagonal en el equilibrio tiene asociado un hamiltoniano de enredo, y como esto permitirá introducir la noción de temperatura del sistema.

3.2.2. Condición necesaria y suficiente para la existencia de un Hamiltoniano de Enredo

Consideremos un sistema cuántico bipartito integrado por un qubit S en interacción débil con cierto ambiente E , de manera que el espacio de Hilbert asociado al sistema total es el producto tensorial de los respectivos espacios, es decir $\mathcal{H}_{SE} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$.

Supondremos que inicialmente no hay correlación entre los sistemas, por lo que el estado inicial es un estado producto, que sin pérdida de generalidad puede escribirse en la forma:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n C_n |\varphi_n\rangle \otimes (\cos \frac{\gamma}{2} |+\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\gamma}{2} |-\rangle) \quad (3.54)$$

Donde

- $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ es una base de \mathcal{H}_S
- $\{|\varphi_n\rangle\}$ es una base ortonormal de \mathcal{H}_E
- γ y φ definen el punto sobre la esfera de Bloch asociado al estado inicial del qubit
- C_n son las amplitudes que definen la ocupación inicial del ambiente y satisfacen la condición de normalización $\sum_n |C_n|^2 = 1$.

En virtud del comentario realizado al comienzo de este capítulo, nos restringiremos al caso en que $\dim(\mathcal{H}_S) \ll \dim(\mathcal{H}_E)$, ya que esto puede permitir que el ambiente sea percibido por el sistema como baño térmico capaz de inducir un estado de equilibrio.

Supongamos entonces que bajo las condiciones descritas, efectivamente se produce un estado de equilibrio. Tomando la traza parcial sobre los grados de libertad del baño, obtenemos el operador de densidad reducida del qubit, que en virtud de su hermiticidad y por poseer traza 1, puede escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \rho_S^\infty(C_n, \gamma, \varphi) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \text{tr}_E(\rho_{SE}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + A(C_n, \gamma, \varphi, t) & B(C_n, \gamma, \varphi, t) \\ B^*(C_n, \gamma, \varphi, t) & \frac{1}{2} - A(C_n, \gamma, \varphi, t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + a(C_n, \gamma, \varphi) & b(C_n, \gamma, \varphi) \\ b^*(C_n, \gamma, \varphi) & \frac{1}{2} - a(C_n, \gamma, \varphi) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Luego, la idea central en el trabajo [16] que permite introducir la temperatura de enredo es que dicha densidad reducida, por encontrarse en equilibrio con un baño térmico y por analogía con el caso clásico, corresponde a una distribución canónica:

$$\rho_S^\infty \sim \rho_{C.E.} = \frac{e^{-\beta H}}{\text{tr}(e^{-\beta H})} \quad (3.56)$$

donde H es cierto operador que deberá determinarse, y β será el inverso de la temperatura de enredo.

Obsérvese que, dada la positividad de ρ_S^∞ , siempre es posible encontrar un operador H que satisfaga una relación del tipo (3.56), por lo que todo estado reducido es, potencialmente, un estado termal.

Por otro lado, la ecuación (3.55) muestra que el operador ρ_S^∞ presenta dependencia explícita en el estado inicial. Si efectivamente dicho operador corresponde a un estado termal, esta dependencia se trasladará a βH . Pero el hamiltoniano H que gobierna la dinámica en el régimen asintótico no puede (o al menos, no debería) depender del estado inicial. Por lo tanto, dicha dependencia (si existe) debe encontrarse contenida completamente en el parámetro β . Se tendrá entonces que la posibilidad de asociar ρ_S^∞ con un estado termal es equivalente a que exista un operador H_{enr} que denominaremos hamiltoniano de enredo, independiente del estado inicial, que satisfaga la ecuación (3.56). Luego, dado que la dependencia en el estado inicial sólo se verá

incluida en β , se tendrá que distintos estados iniciales, gobernados para tiempos largos por el mismo hamiltoniano de enredo termalizarán a distintas temperaturas de enredo inversas β .

A continuación se emplearán las observaciones anteriores para caracterizar las densidades reducidas asintóticas que admiten un hamiltoniano de enredo y que por lo tanto, tienen asociada una temperatura de enredo.

Sea $\{|\varphi_1(t)\rangle, |\varphi_2(t)\rangle\}$ la base en la cual el operador densidad reducida $\rho_s(t)$ es diagonal $\forall t$. Si es posible establecer la correspondencia (3.56), la relación funcional entre los operadores ρ_s^∞ y H_{enr} implica que éste último también tendrá una expresión diagonal en esa base. Si denotamos por $\{\varepsilon, -\varepsilon\}$ a los autovalores de H_{enr} , y por $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ a las correspondientes poblaciones naturales, tendremos que en la base elegida:

$$H_{enr}^{(diag)} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}, \rho_s^{\infty(diag)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

Obsérvese que si $\rho_s^{\infty(diag)}$ puede obtenerse de ρ_s^∞ a través del cambio de base

$$\rho_s^{\infty(diag)} = Q^\dagger \rho_s^\infty Q \quad (3.58)$$

entonces mediante el cambio de base inverso podemos obtener la forma explícita de H_{enr} en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$:

$$H_{enr} = Q H_{enr}^{(diag)} Q^\dagger \quad (3.59)$$

Naturalmente, las matrices Q y Q^\dagger dependerán en general del estado inicial del qubit, y en virtud de (3.59), esta dependencia se trasladará al hamiltoniano de enredo, lo cual según lo comentado en los párrafos anteriores, queremos evitar. Concluimos entonces que el problema de determinar bajo qué condiciones una densidad reducida admite un hamiltoniano de enredo equivale a caracterizar las matrices del tipo (3.55) que, a pesar de su dependencia en el estado inicial, se diagonalizan en una base fija independiente de C_n , γ y φ . En esa dirección, comenzamos calculando los autovalores y autovectores de (3.55):

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{a^2 + |b|^2} \Rightarrow |\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{a + \sqrt{a^2 - |b|^2}}{b^*} \\ 1 \end{pmatrix}, |||\psi_1\rangle|| = \frac{\sqrt{(a + \sqrt{a^2 + |b|^2})^2 + |b|^2}}{|b|} \quad (3.60)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{a^2 + |b|^2} \Rightarrow |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} \frac{a - \sqrt{a^2 - |b|^2}}{b^*} \\ 1 \end{pmatrix}, |||\psi_2\rangle|| = \frac{\sqrt{(a - \sqrt{a^2 + |b|^2})^2 + |b|^2}}{|b|} \quad (3.61)$$

De modo que las matrices de cambio de base que simultáneamente diagonalizan a los operadores ρ_s^∞ y H_{enr} son:

$$Q = |b| \begin{pmatrix} \frac{a + \sqrt{a^2 + |b|^2}}{b^* \sqrt{(a + \sqrt{a^2 + |b|^2})^2 + |b|^2}} & \frac{a - \sqrt{a^2 + |b|^2}}{b^* \sqrt{(a - \sqrt{a^2 + |b|^2})^2 + |b|^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{(a + \sqrt{a^2 + |b|^2})^2 + |b|^2}} & \frac{1}{\sqrt{(a - \sqrt{a^2 + |b|^2})^2 + |b|^2}} \end{pmatrix}$$

y

$$Q^\dagger = |b| \begin{pmatrix} \frac{a + \sqrt{a^2 + |b|^2}}{b\sqrt{(a + \sqrt{a^2 + |b|^2})^2 + |b|^2}} & \frac{1}{\sqrt{(a + \sqrt{a^2 + |b|^2})^2 + |b|^2}} \\ \frac{a - \sqrt{a^2 + |b|^2}}{b\sqrt{(a - \sqrt{a^2 + |b|^2})^2 + |b|^2}} & \frac{1}{\sqrt{(a - \sqrt{a^2 + |b|^2})^2 + |b|^2}} \end{pmatrix}$$

Luego, por medio de (3.59) obtenemos la expresión de H_{enr} en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$:

$$H_{enr} = QH_dQ^\dagger = \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + |b|^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2 + |b|^2}} \\ \frac{b^*}{\sqrt{a^2 + |b|^2}} & -a \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

La ecuación (3.62) muestra una evidente dependencia con el estado inicial a través de los coeficientes a y b . Concluimos entonces que en general, por más que una densidad reducida arbitraria posea límite asintótico constante (se equilibre), no tiene asociado un hamiltoniano de enredo independiente de las condiciones iniciales, por lo que no corresponde a un estado termal. Sin embargo, existe una relación particular entre los parámetros a y b que independiza H_{enr} del estado inicial. Obsérvese que si existe una constante κ independiente de γ , φ y C_n tal que $b = \kappa a$, y en virtud de que $a \in R$, se tiene:

$$H_{enr} = \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + |\kappa a|^2}} & \frac{\kappa a}{\sqrt{a^2 + |\kappa a|^2}} \\ \frac{\kappa^* a}{\sqrt{a^2 + |\kappa a|^2}} & -a \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + |\kappa|^2}} \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ \kappa^* & -1 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

O sea que H_{enr} se vuelve independiente del estado inicial del qubit.

Recíprocamente, supongamos que (3.62) es independiente del estado inicial. Las entradas H_{enr11} y H_{enr12} serán sendas constantes C_1 y C_2 , de donde se deduce que:

$$b/a = \frac{\frac{b}{\sqrt{a^2 + |b|^2}}}{\frac{a}{\sqrt{a^2 + |b|^2}}} = \frac{C_2}{C_1} = \kappa(\text{constante})$$

En resumen, hemos demostrado la siguiente

Proposición 3.2.2. *La condición necesaria y suficiente para que una densidad reducida asintótica en equilibrio de la forma (3.55) tenga asociado un hamiltoniano de enredo es que exista una constante κ , independiente del estado inicial, tal que*

$$b(C_n, \gamma, \varphi) = \kappa a(C_n, \gamma, \varphi)$$

En ese caso, la expresión para el hamiltoniano de enredo es es:

$$H_{enr} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + |\kappa|^2}} \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ \kappa^* & -1 \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

Esperamos, en general, que la cantidad adimensional κ que determina dicho operador pueda construirse a partir de los parámetros relevantes del sistema y de su interacción con el ambiente (frecuencias características, constantes de acoplamiento, constantes universales, etc).

3.2.3. Exploración del Hamiltoniano de enredo

A continuación analizaremos la evolución unitaria de un qubit sometido a la acción exclusiva del hamiltoniano de enredo. Es claro que en el contexto de este trabajo, H_{enr} sólo pretende guiar la evolución en el régimen asintótico (recordemos que durante el proceso de termalización la evolución no es unitaria). Sin embargo, resulta ilustrativo analizar este caso para intentar comprender por qué, en efecto, este operador juega un papel relevante en la termalización asintótica.

La evolución unitaria del operador densidad sometida a este hamiltoniano está dada por la ecuación (2.17), o sea:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [H_{enr}, \rho] \quad (3.65)$$

Empleando las ecuaciones (3.62) y (3.55) se obtiene que el conmutador vale

$$[H_{enr}, \rho] = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1+|\kappa|^2}} \begin{pmatrix} 0 & B - \kappa A \\ B^* - \kappa^* A & 0 \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

lo cual conduce al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial t} = -i\omega B + i\omega\kappa A \end{cases} \quad (3.67)$$

donde ω está dado por la expresión

$$\omega = \frac{2\varepsilon}{\hbar\sqrt{1+|\kappa|^2}} \quad (3.68)$$

La solución del sistema es sencilla de obtener dado que las ecuaciones quedan desacopladas. Si el estado inicial satisface $A(0) = A_0$ y $B(0) = B_0$, entonces:

$$\begin{cases} A(t) = A_0, \forall t \\ B(t) = (B_0 - \kappa A_0) \exp(-i\omega t) + \kappa A_0 \end{cases} \quad (3.69)$$

por lo que observamos que las poblaciones permanecen constantes en el tiempo, mientras que las coherencias presentan un comportamiento oscilatorio con frecuencia ω .

En particular, se aprecia que si inicialmente se satisface la condición de la proposición (3.2.2), el sistema permanecerá en dicho estado:

$$\begin{cases} A(t) = A_0 \\ B(t) = \kappa A_0 = B_0 \quad \forall t \end{cases} \quad (3.70)$$

Las observaciones anteriores permiten establecer una posible descripción cualitativa del proceso de termalización. En primer lugar, la acción de los operadores de Kraus que rigen la evolución debe poder aproximarse, para tiempos grandes, por la acción de un único operador U_{enr} , o sea

$$\rho(t) = \sum_j M_j(t) \rho(0) M_j^\dagger(t) \simeq U_{enr}(t) \rho(0) U_{enr}^\dagger(t) \quad \text{si } t \rightarrow \infty \quad (3.71)$$

donde

$$U_{enr}(t) = \exp\left(-\frac{iH_{enr}t}{\hbar}\right) \quad (3.72)$$

Luego, si el sistema en cierto $t_0 \gg 0$ pasa por el estado particular que satisface la condición $B(t_0) = \kappa A(t_0)$, en virtud de (3.70), permanecerá en ese estado para todos los tiempos posteriores. La plausibilidad de este mecanismo así como el papel del enredo en el proceso debería ser objeto de estudios posteriores.

3.2.4. Estados termales en la esfera de Bloch

Un interesante corolario de la proposición (3.2.2) resulta si analizamos la implicancia de la restricción

$$b(C_n, \gamma, \varphi) = \kappa a(C_n, \gamma, \varphi)$$

respecto a la ubicación de los estados termales en la esfera de Bloch. Se resume en el siguiente enunciado:

Proposición 3.2.3. *Los estados termales accesibles a un qubit en interacción con un ambiente dado se ubican sobre un diámetro fijo de la esfera de Bloch.*

En virtud de (3.2.2), sabemos que los estados que se vuelven termales en el régimen asintótico son de la forma:

$$\rho_s^\infty = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + a & \kappa a \\ \kappa^* a & \frac{1}{2} - a \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

Donde la dependencia en el estado inicial se encuentra exclusivamente en el parámetro a . Por otro lado, sabemos que todo operador densidad reducida puede expresarse en términos de las componentes del vector de Bloch $\vec{B} = (u, v, w)$ en la forma:

$$\rho_s^\infty = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + w & u - iv \\ u + iv & 1 - w \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

Luego, comparando ambas expresiones se obtienen las relaciones:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + a = \frac{1}{2} + \frac{w}{2} \\ \frac{1}{2}(u - iw) = \kappa a \\ \frac{1}{2}(u + iw) = \kappa^* a \end{cases} \quad (3.75)$$

Resolviendo dicho sistema se encuentra para el vector de Bloch:

$$\vec{B} = 2a (\Re(\kappa), -\Im(\kappa), 1) \quad (3.76)$$

Obsérvese que la dirección del vector de Bloch está definida exclusivamente por el parámetro κ que define el hamiltoniano de enredo (3.64), mientras que la dependencia en el estado inicial a través de a interviene sólo en el módulo de dicho vector. Luego, como κ está dado por la naturaleza física del sistema en cuestión, que consideramos determinada a priori, todos los estados termales para una configuración física dada (es decir, para un valor de κ fijo) se ubicarán en un diámetro fijo de la esfera, determinado por la dirección (3.76) (Fig.(3.1)). La ubicación exacta de cada estado termal sobre dicho diámetro dependerá del estado inicial a través de a . En otras palabras, para un qubit en interacción con un ambiente dado cuya dinámica está regida por la cantidad adimensional κ , el subconjunto de la esfera de Bloch que resulta de intersecarla con la recta

$$\begin{cases} x = 2a\Re(\kappa) \\ y = 2a\Im(\kappa) \\ z = 2a \end{cases} \quad (3.77)$$

es el atractor de los estados iniciales que termalizan bajo esa dinámica. Por ejemplo, para $a = 0$ el operador densidad se reduce al estado

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

cuyo vector de Bloch es $(0,0,0)$, que se ubica en el centro de la esfera (y por lo tanto, pertenece a cualquier diámetro). En la próxima sección veremos que dicho estado corresponde a la temperatura de enredo $T = \infty$).

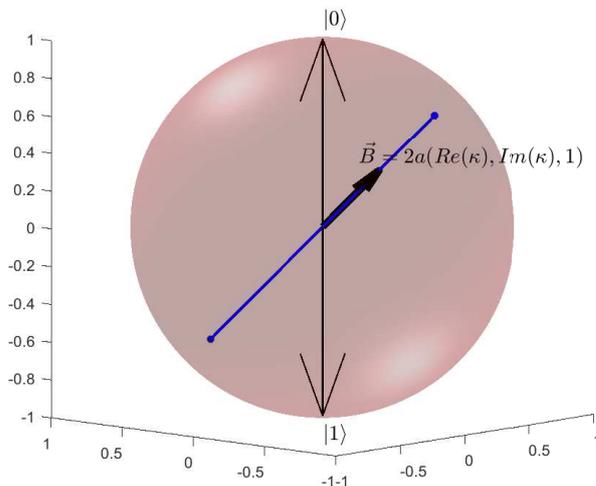


Figura 3.1: Estados termales en la esfera de Bloch. La dinámica definida por el parámetro κ determina una dirección privilegiada, ilustrada por el vector de Bloch \vec{B} . En azul se representa el lugar geométrico de los posibles estados termales para este sistema, que corresponde al diámetro que contiene al vector de Bloch.

3.3. Temperatura de enredo

3.3.1. Definición

Una vez caracterizadas las densidades reducidas en el equilibrio que admiten un hamiltoniano de enredo, es posible plantear una definición coherente para la temperatura de enredo. Sea ρ_s^∞ una densidad reducida asintótica tal que $\exists \kappa \in C$ que satisface $b(C_n, \gamma, \varphi) = \kappa \cdot a(C_n, \gamma, \varphi)$. Entonces, según lo demostrado en la sección anterior, es válida la asociación:

$$\rho_s^\infty = \frac{\exp(-\beta H_{enr})}{tr(\exp(-\beta H_{enr}))} \quad (3.78)$$

donde H_{enr} esta dada por la expresion (3.64). Definimos entonces la Temperatura de Enredo como el inverso del número real β , dependiente en general de las condiciones iniciales, que satisface (3.78). Claro está que la definición anterior se puede extender a sistemas de dimensión mayor que 2, siempre que el estado reducido corresponda a un estado termal (3.78). Obtener una condición equivalente a la hallada para qubits en (3.2.2) sería de gran importancia para asegurar que la temperatura se encuentre bien definida.

3.3.2. Propiedades

- *Cálculo a partir de los autovalores*

La relación (3.78) en la base que diagonaliza ambos operadores se traduce a las ecuaciones:

$$\lambda_1 = \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{e^{-\beta\varepsilon} + e^{\beta\varepsilon}}, \quad \lambda_2 = \frac{e^{\beta\varepsilon}}{e^{-\beta\varepsilon} + e^{\beta\varepsilon}}$$

de donde

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = e^{2\beta\varepsilon} \rightarrow T_{enr} = \frac{1}{\beta} = \frac{2\varepsilon}{\log\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)} \quad (3.79)$$

Es importante aclarar que la expresión (3.79) permitiría, a priori, asignar una temperatura a cualquier estado reducido, ya que los autovalores de la densidad reducida son siempre positivos (o a lo sumo, uno de ellos es cero). Sin embargo, dicha relación fue obtenida bajo el supuesto de que dicha densidad reducida corresponde a un estado termal del sistema dado. Por lo tanto, su empleo en situaciones más generales conlleva el riesgo de asociar una temperatura a sistemas que pueden no presentar en absoluto un comportamiento de tipo termodinámico.

- *La temperatura de enredo es cero para estados puros*

Estados puros se caracterizan por el hecho de que los autovalores de la densidad reducida son 1 y 0. Luego, en virtud de (3.79) se obtiene $T = 0$.

- *Es infinita para estados máximamente mezclados*

En el caso de estados máximamente mezclados, la densidad reducida posee valor propio $1/2$ con multiplicidad 2. Luego, de acuerdo con (3.79) se obtiene $T = \infty$. Esta propiedad y la anterior sugieren que la temperatura de enredo es una medida de la pureza del estado reducido, o equivalentemente, del enredo presente entre los sistemas.

- *Ley Cero*

Extensiones a sistemas de dimensión mayor son necesarios para establecer un enunciado general sobre la Ley Cero. Nos restringiremos entonces a 2 qubits en interacción que alcanzan sendos estados termales

$$\rho_1 = \frac{e^{-\beta_1 H_1}}{\text{tr}(e^{-\beta_1 H_1})}, \quad \rho_2 = \frac{e^{-\beta_2 H_2}}{\text{tr}(e^{-\beta_2 H_2})} \quad (3.80)$$

En virtud de la descomposición de Schmidt, si el sistema compuesto evoluciona de manera aislada entonces existen bases ortonormales de \mathcal{H}_S y $\mathcal{H}_{S'}$ en las cuales el estado global se escribe

$$|\psi\rangle = \sum_j \lambda_j |\varphi_1^j\rangle |\varphi_2^j\rangle \quad (3.81)$$

Luego, los estados reducidos tendrán los mismos autovalores. Como la temperatura depende exclusivamente de los autovalores, se obtiene $\beta_1 = \beta_2$

- *Relación con la Entropía de Von Neumann*

En la primera sección mostramos que los estados termales son diagonales en la base de autoestados de energía. Entonces, bajo la suposición de interacción débil se tiene:

$$\langle E \rangle = \lambda E_1 + (1 - \lambda) E_2 \rightarrow d\langle E \rangle = d\lambda(E_1 - E_2)$$

Por otro lado

$$S = -\lambda \log(\lambda) - (1 - \lambda) \log(1 - \lambda) \rightarrow dS = -\log(\lambda) d\lambda + \log(1 - \lambda) d\lambda = \log\left(\frac{1 - \lambda}{\lambda}\right) d\lambda$$

Luego:

$$\frac{dS}{dE} = \frac{\log\left(\frac{1 - \lambda}{\lambda}\right)}{E_1 - E_2} = \frac{1}{T}$$

luego, en virtud de (3.79) la definición es consistente con la definición usual de temperatura.

■ *Relación con la Energía libre de Helmholtz*

Veremos que en este marco teórico, la energía libre de Helmholtz satisface una relación análoga a la conocida de la Mecánica Estadística.

Partamos de la definición termodinámica como la transformada de Legendre de la energía interna, cuyo análogo en nuestro caso es el valor esperado del Hamiltoniano $E = \langle H_S \rangle$:

$$\langle F \rangle = E - TS \quad (3.82)$$

En este contexto, T será la temperatura de enredo y S la entropía de Von Neumann. Para mantener la analogía, agregamos una constante K_B a la definición de la entropía. Entonces:

$$\begin{aligned} F &= E - TS \\ &= \sum_j \lambda_j E_j - T(-K_B \sum_j \lambda_j \log(\lambda_j)) \\ &= \sum_j \lambda_j [E_j + K_B T \log(\lambda_j)] \end{aligned} \quad (3.83)$$

Pero en virtud de que el estado es termal, $\lambda_j = \frac{e^{-\beta E_j}}{\sum_k e^{-\beta E_k}}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} F &= \sum_j \lambda_j \left[E_j + K_B T \log \left(\frac{e^{-\beta E_j}}{\sum_k e^{-\beta E_k}} \right) \right] \\ &= \sum_j \lambda_j \left[E_j + K_B T \left(-\beta E_j - \log \left(\sum_k e^{-\beta E_k} \right) \right) \right] \\ &= \sum_j \lambda_j \left[E_j - E_j - K_B T \log \left(\sum_k e^{-\beta E_k} \right) \right] \\ &= - \sum_j \lambda_j K_B T \log \left(\sum_k e^{-\beta E_k} \right) \\ &= -K_B T \log \left(\sum_k e^{-\beta E_k} \right) \sum_j \lambda_j \\ &= -K_B T \log(Z) \end{aligned} \quad (3.84)$$

donde se definió $Z = \text{tr}(e^{-\beta H_S}) = \sum_k e^{-\beta E_k}$. Es decir que la traza del operador densidad reducida ocupa un papel análogo a la función de partición clásica, como era esperable. Remárese la importancia de que en el cálculo anterior el estado sea termal.

Es sencillo observar que a medida que los estados evolucionan desde la superficie de la esfera de Bloch ($T = 0, S = 0$) hacia el interior (por ejemplo, durante un proceso de termalización), la energía libre disminuye. Esto está de acuerdo con la intuición de que cuanto mayor sea la incerteza asociada al estado, menor es nuestra capacidad de extraer trabajo del mismo. Un trabajo reciente e interesante que trata estos aspectos es [48].

Una vez obtenida la energía libre estamos en condiciones de desarrollar toda la termodinámica del enredo y estudiar sus implicaciones, objetivo que trasciende las aspiraciones de este trabajo pero que se encuentra entre las líneas a seguir en futuros desarrollos del tema.

3.4. Ejemplo: Termalización bajo proyectores ortogonales

En esta sección estudiaremos las posibles termalizaciones que puede alcanzar un qubit en interacción con un baño térmico cuántico, en el caso de que su evolución reducida esté guiada por operadores de Kraus que poseen la característica de ser proyectores ortogonales. Si bien se trata de un tipo de evolución restringido dentro del universo de posibilidades, la simpleza de la dinámica resultante permite realizar una exhaustiva caracterización de los tipos de termalización que puede alcanzar el qubit, lo cual resulta ilustrativo de los conceptos trabajados en este capítulo. Consideremos un sistema bipartito SE cuyo espacio de estados es

$$\mathcal{H}_{SE} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$$

y tal que la evolución restringida al sistema S está dada por (2.23). Asumiremos que existe un conjunto ortogonal $\{|\psi_k\rangle\} \subset H_S$ tal que cada operador de Kraus se escribe en la forma $M^{(k)} = |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$. Luego, el operador densidad reducida al tiempo t será:

$$\begin{aligned} \rho_S(t) &= \sum_k M^{(k)} \rho_S(0) M^{(k)\dagger} \\ &= \sum_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \rho_S(0) |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \\ &= \sum_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \langle\varphi_0|\rho_S(0)|\varphi_0\rangle \langle\varphi_0|\psi_k\rangle\langle\psi_k| \\ &= \sum_k |\langle\varphi_0|\psi_k\rangle|^2 |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \end{aligned} \tag{3.85}$$

Nótese que al aplicar ρ_S sobre los estados $\{|\psi_k\rangle\}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho_S |\psi_{k'}\rangle &= \sum_k |\langle\varphi_0|\psi_k\rangle|^2 |\psi_k\rangle\langle\psi_k| |\psi_{k'}\rangle \\ &= \sum_k |\langle\varphi_0|\psi_k\rangle|^2 |\psi_k\rangle \delta_{kk'} \\ &= |\langle\varphi_0|\psi_{k'}\rangle|^2 |\psi_{k'}\rangle \end{aligned} \tag{3.86}$$

La ecuación (3.86) muestra que los estados $\{|\psi_k\rangle\}$ son autoestados de la densidad reducida, y que los autovalores son el módulo cuadrado de la proyección del estado inicial sobre los correspondientes autoestados.

Analizaremos ahora el comportamiento asintótico en el caso de que el sistema de interés sea un qubit S en interacción con un ambiente E en el estado inicial (3.54), y supondremos que se

verifica la condición de la proposición (3.2.2). Los autovalores de la densidad reducida pueden calcularse directamente a partir de su expresión:

$$\rho_s^\infty = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + a & \kappa a \\ \kappa^* a & \frac{1}{2} - a \end{pmatrix} \quad (3.87)$$

Obteniéndose:

$$\lambda_{1(2)} = \frac{1}{2} \pm a\sqrt{1 + |\kappa|^2} \quad (3.88)$$

Pero por otro lado, la ecuación (3.86) nos proporciona otra forma independiente de calcular los autovalores. Empleando los autoestados (3.60), (3.61) y la condición inicial (3.54) se obtiene:

$$\lambda_{1(2)} = |\langle \psi(0) | \psi_{1(2)} \rangle|^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{1 + |\kappa|^2}} (\cos \gamma + \Re(\kappa) \sin \gamma \cos \varphi) \quad (3.89)$$

Luego, comparando (3.88) y (3.89) se obtiene el valor de a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{1 + |\kappa|^2}} [\cos \gamma + \Re(\kappa) \sin \gamma \cos \varphi] &= \frac{1}{2} \pm a\sqrt{1 + |\kappa|^2} \\ \Rightarrow a &= \frac{1}{2(1 + |\kappa|^2)} [\cos \gamma + \Re(\kappa) \sin \gamma \cos \varphi] \end{aligned} \quad (3.90)$$

y podemos, por lo tanto, expresar la densidad reducida asintótica exclusivamente en términos del parámetro dinámico κ y de los ángulos que definen el estado inicial del qubit:

$$\rho_s^\infty = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1 + |\kappa|^2)} [\cos \gamma + \Re(\kappa) \sin \gamma \cos \varphi] & \frac{\kappa}{2(1 + |\kappa|^2)} [\cos \gamma + \Re(\kappa) \sin \gamma \cos \varphi] \\ \frac{\kappa^*}{2(1 + |\kappa|^2)} [\cos \gamma + \Re(\kappa) \sin \gamma \cos \varphi] & \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1 + |\kappa|^2)} [\cos \gamma + \Re(\kappa) \sin \gamma \cos \varphi] \end{pmatrix} \quad (3.91)$$

mientras que para la temperatura de enredo, que depende exclusivamente de los autovalores (3.89), se obtiene la expresión:

$$T = \frac{2\varepsilon}{\log \left(\frac{\sqrt{1 + |\kappa|^2} + (\cos \gamma + \Re(\kappa) \sin \gamma \cos \varphi)}{\sqrt{1 + |\kappa|^2} - (\cos \gamma + \Re(\kappa) \sin \gamma \cos \varphi)} \right)} \quad (3.92)$$

Las curvas de nivel en la esfera de Bloch se obtienen planteando $T = cte = T_0$. Esto equivale a la ecuación $\cos \gamma + \Re(\kappa) \sin \gamma \cos \varphi = cte$, que expresada en coordenadas cartesianas $x = \sin \gamma \cos \varphi$, $y = \sin \gamma \sin \varphi$, $z = \cos \gamma$ luce así:

$$z + \Re(\kappa)x = cte \quad (3.93)$$

La ecuación (3.93) representa una familia de planos paralelos ortogonales a la dirección $(\Re(\kappa), 0, 1)$, cuya intersección con la esfera de Bloch resulta en una familia de circunferencias paralelas, cada una de ellas caracterizada por cierto valor de temperatura de enredo asintótica. En otras palabras, encontramos conjuntos densos de estados iniciales que, en caso de termalizar, lo harán al mismo estado termal (termalización parcial).

Prosigamos con este análisis desde el punto de vista geométrico asumiendo que $\kappa \in R$.

Los autovalores de ρ_S^∞ , para $\kappa \in R$, son:

$$\lambda_{1(2)} = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2\sqrt{1+\kappa^2}}(z + \kappa x) \quad (3.94)$$

Obsérvese que para los estados iniciales tales que $z + \kappa x = 0$, la densidad reducida adopta la forma de un estado máximamente mezclado:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

que corresponde al valor de temperatura $T = \infty$. A medida que nos desplazamos sobre la superficie de la esfera hacia los polos definidos por la dirección $(\kappa, 0, 1)$, la temperatura disminuye. En particular, sobre los polos:

$$\left(\frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}} \right), \left(-\frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}} \right) \quad (3.95)$$

los autovalores son 1 y cero, por lo que los estados reducidos son puros. Esto indica que, o bien el sistema no se entrelazó con su ambiente, o que las correlaciones disminuyeron hasta anularse en el régimen asintótico. Estos estados corresponden al valor de temperatura de enredo $T = 0$.

A esta altura, surge preguntarse sobre la posición en la esfera de Bloch del estado asintótico. Consideremos para ello una curva de nivel de temperatura arbitraria, dada por intersección de la esfera con uno de los planos de ecuación $\pi : z + \kappa x = p$. Dado que el vector de Bloch es proporcional a $(\kappa, 0, 1)$, será ortogonal a dicho plano. La distancia desde el centro de la esfera a este plano vale:

$$d((0, 0, 0), \pi) = \frac{|p|}{\sqrt{1+\kappa^2}} \quad (3.96)$$

mientras que el módulo del vector de Bloch asociado al estado termal (3.76) estará dado por:

$$|\vec{B}| = 2|a|\sqrt{\Re(\kappa)^2 + \Im(\kappa)^2 + 1} = 2|a|\sqrt{1+\kappa^2} \quad (3.97)$$

Donde a corresponde a la ecuación (3.90). Se obtiene entonces:

$$\begin{aligned} |\vec{B}| &= 2 \frac{1}{2(1+|\kappa|^2)} |\cos \gamma + \kappa \sin \gamma \cos \varphi| \sqrt{1+\kappa^2} \\ &= \frac{|p|\sqrt{1+\kappa^2}}{1+\kappa^2} \\ &= \frac{|p|}{\sqrt{1+\kappa^2}} \\ &= d((0, 0, 0), \pi) \end{aligned} \quad (3.98)$$

Los resultados obtenidos en esta sección se resumen en la siguiente

Proposición 3.4.1. *Sea un qubit S cuyo estado reducido es guiado en el régimen asintótico por operadores de Kraus $M_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ y $M_2 = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$ tales que $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$. Entonces, si el sistema termaliza se tiene que:*

- *Las curvas de nivel de la temperatura en la esfera de Bloch son circunferencias paralelas*
- *El estado termal alcanzado por los estados iniciales en cada curva de nivel coincide con el centro de dicha curva*

Obsérvese que este resultado es consistente con la proposición (3.2.3), ya que la unión de los estados que se ubican en los centros de circunferencias paralelas determina un diámetro fijo de la esfera de Bloch. Esto se ilustra en la siguiente figura:

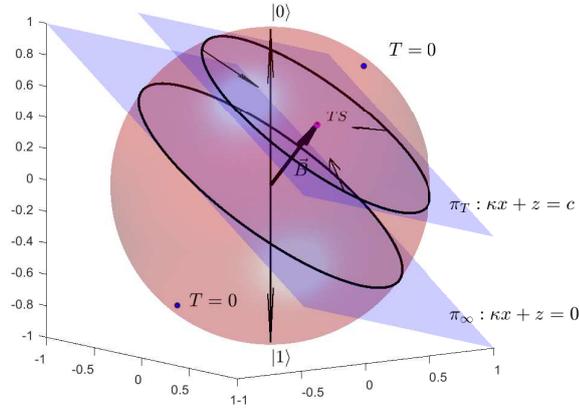


Figura 3.2: Curvas de nivel de la temperatura en la esfera de Bloch para el caso $\kappa \in \mathbb{R}$ bajo evolución guiada por proyectores ortogonales. El vector de Bloch \vec{B} define el estado termal TS asociado a los estados iniciales que se encuentran en la intersección del plano $\kappa x + z = cte$ con la esfera, como indican las flechas. Se representan también los estados de temperatura cero (polos) y el plano que biseca la esfera, cuyos estados termalizan a $T = \infty$.

Termalización en la Caminata Cuántica en la Línea

La caminata cuántica es el análogo cuántico del famoso problema clásico conocido como caminata aleatoria (o paseo del borracho), y es el modelo teórico en el que se introduce la Temperatura de Enredo en la referencia [16].

El modelo es relevante en el contexto de este trabajo debido a que presenta equilibración en el régimen asintótico, por lo que resulta adecuado para verificar algunos de los resultados obtenidos en el capítulo anterior.

Debido a este interés en un aspecto específico de la caminata (el termodinámico), la presentación del modelo se hará de manera sucinta. Luego, resolveremos su dinámica con condiciones iniciales adecuadas a la intuición de que un alto nivel de ocupación del sistema mayor (espacio de posiciones) puede inducir termalización en el subsistema de interés (espacio de espines). En efecto, se mostrará que bajo estas condiciones el operador densidad reducida corresponde a un estado termal, que permite definir una temperatura de enredo dependiente del estado inicial y dar interpretación física al parámetro κ que caracteriza el hamiltoniano de enredo definido en el capítulo anterior.

Para una presentación más completa del modelo y de sus diversas aplicaciones, particularmente en el terreno de los algoritmos en computación cuántica, pueden consultarse las referencias [42],[43].

4.1. El modelo

Consideremos una partícula que puede ubicarse en posiciones discretas de la recta, que etiquetaremos con los números enteros $\{n\}$, $n \in \mathbb{Z}$. En la caminata clásica, la partícula se moverá en un sentido u otro con respectivas probabilidades p y $1 - p$ que resultan, por ejemplo, de lanzar una moneda. Si queremos establecer un análogo cuántico de este sistema, debemos, en primer lugar, permitir que el caminante pueda encontrarse en superposiciones de estados. Esto se logra asociando al caminante un espacio de Hilbert \mathcal{H}_n de dimensión infinita, generado por la base ortogonal $\{|n\rangle\}$, $n \in \mathbb{Z}$, donde cada elemento de la base puede asociarse a los estados clásicos del caminante. Por otro lado, dado que la moneda posee dos estados clásicos $\{R, L\}$, el espacio de Hilbert asociado a su versión cuántica, que denominaremos \mathcal{H}_S , será de dimensión 2. Si denotamos a una de sus bases por $\{|R\rangle, |L\rangle\}$, entonces un estado arbitrario del sistema total al tiempo t se escribe en la forma:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n |n\rangle \otimes [a_n(t)|R\rangle + b_n(t)|L\rangle] \quad (4.99)$$

La otra modificación necesaria para establecer una versión puramente cuántica de la caminata aleatoria tiene que ver con la evolución. Sabemos que para sistemas aislados, la misma debe ser unitaria. De esta forma, la acción de lanzar la moneda será reemplazada por la aplicación

de un operador unitario genérico, que en 2D adopta la forma:

$$U_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.100)$$

Mientras que el paso del caminante será descrito por el operador de traslación condicional:

$$T = \sum_n |n+1\rangle\langle n| \otimes |R\rangle\langle R| + \sum_n |n-1\rangle\langle n| \otimes |L\rangle\langle L|.$$

Por lo tanto, la dinámica global estará regida por el siguiente operador actuando en el espacio total $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_S$:

$$U = T(I_n \otimes U_\theta). \quad (4.101)$$

y al cabo de t aplicaciones, el estado del sistema estará dado por

$$|\psi(t)\rangle = U^t |\psi(0)\rangle \quad (4.102)$$

Obsérvese que si partimos de un estado puro y dado que el sistema total se encuentra aislado, el estado se mantendrá puro ante sucesivas aplicaciones del operador (4.101). Sin embargo, aunque partamos de un estado producto, es sencillo ver que las iteraciones tienden a enredar los sistemas. Este enredo, potenciado por una amplia ocupación del estado inicial, será responsable de la termalización que presentará el sistema en el régimen asintótico.

4.2. Solución general en el espacio de Fourier

Haciendo uso de la periodicidad que presenta el espacio de posiciones \mathcal{H}_n , en las referencias [49] y [50] se desarrolla un método general que permite resolver la caminata cuántica para condiciones iniciales arbitrarias, transformando el problema al espacio de Fourier. Desarrollando en la base dual de \mathcal{H}_n dada por $\{|k\rangle = \sum_n e^{ikn}|n\rangle\}$, $k \in (-\pi, \pi)$, el estado (4.99) se convierte en:

$$|\psi_k\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} |k\rangle \otimes [\tilde{a}_k |R\rangle + \tilde{b}_k |L\rangle] \quad (4.103)$$

Mientras que el operador evolución para una iteración estará dado por:

$$U_k = \begin{pmatrix} e^{-ik} \cos \theta & e^{-ik} \text{sen } \theta \\ e^{ik} \text{sen } \theta & -e^{ik} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.104)$$

Por lo que el sistema evolucionará de acuerdo a

$$|\varphi_k(t+1)\rangle = U_k |\varphi_k(t)\rangle \quad (4.105)$$

donde $|\varphi_k\rangle = \langle k|\psi_k\rangle = (\tilde{a}_k, \tilde{b}_k)'$

Si denotamos λ_k^1 y λ_k^2 a los autovalores de (4.104), y a sus correspondientes autovectores por

$$|\varphi_k^1\rangle = \alpha_k \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}, |\varphi_k^2\rangle = \beta_k \begin{pmatrix} u_k \\ w_k \end{pmatrix} \quad (4.106)$$

donde α_k y β_k representan constantes de normalización, podemos escribir el estado luego de t iteraciones del operador (4.104) empleando su descomposición espectral:

$$|\varphi_k(t)\rangle = U^t |\varphi_k(0)\rangle = (\lambda_k^1)^t \langle \varphi_k^1 | \varphi_k(0) \rangle |\varphi_k^1\rangle + (\lambda_k^2)^t \langle \varphi_k^2 | \varphi_k(0) \rangle |\varphi_k^2\rangle \quad (4.107)$$

Luego, estamos en condiciones de obtener la densidad reducida escribiendo el operador densidad para el sistema total y trazando en los grados de libertad de posición. Si se definen los parámetros

$$\begin{cases} F_k = u_k^* \tilde{a}_k(0) + v_k^* \tilde{b}_k(0) \\ G_k = u_k^* \tilde{a}_k(0) + w_k^* \tilde{b}_k(0) \end{cases} \quad (4.108)$$

la densidad reducida adopta la forma:

$$\rho_S^\infty = \begin{pmatrix} \rho_{11}^\infty & \rho_{12}^\infty \\ \rho_{12}^{\infty*} & \rho_{22}^\infty \end{pmatrix} \quad (4.109)$$

donde [49]

$$\begin{cases} \rho_{11} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} |\tilde{a}_k|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} [\alpha_k^4 |F_k|^2 + \beta_k^4 |G_k|^2] + \mathcal{O}(t^{-1/2}) \\ \rho_{12} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} |\tilde{b}_k|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} [\alpha_k^4 |F_k|^2 u_k v_k^* + \beta_k^4 |G_k|^2 u_k w_k^*] + \mathcal{O}(t^{-1/2}) \\ \rho_{22} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \tilde{a}_k \tilde{b}_k^* = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} [\alpha_k^4 |F_k|^2 |v_k|^2 + \beta_k^4 |G_k|^2 |w_k|^2] + \mathcal{O}(t^{-1/2}) \end{cases} \quad (4.110)$$

Luego, es claro que en el régimen $t \rightarrow \infty$ tendremos equilibración debido a que la dependencia temporal figura en términos de orden $t^{-1/2}$. Sin embargo, esto no asegura que el estado obtenido sea termal. A modo de ejemplo, en la referencia [50] se propone el siguiente estado inicial guiado por una moneda de Hadamard ($\theta = \pi/4$):

$$|\psi(\gamma, \varphi)\rangle = [\cos \gamma | -1\rangle + e^{i\varphi} \sin \gamma |1\rangle] \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [|R\rangle + i|L\rangle] \quad (4.111)$$

y se obtiene el siguiente operador densidad reducido:

$$\rho_S^\infty = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + a & b \\ b^* & \frac{1}{2} - a \end{pmatrix} \quad (4.112)$$

donde:

$$\begin{cases} a = \frac{-(\sqrt{2}-1)^2}{2} \sin(2\gamma) \sin \varphi \\ b = -\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2} \sin(2\gamma) \sin(\varphi) - [i\frac{\sqrt{2}-1}{2} - \frac{3\sqrt{2}-4}{2} \sin(2\gamma) \sin(\varphi)] \end{cases} \quad (4.113)$$

El cociente b/a está dado por:

$$b/a = 1 + \frac{i\frac{\sqrt{2}-1}{2} - \frac{3\sqrt{2}-4}{2} \sin(2\gamma) \sin(\varphi)}{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2} \sin(2\gamma) \sin(\varphi)} = 1 - \sqrt{2} + \frac{i\sqrt{2} + 1}{\sin(2\gamma) \sin(\varphi)} \quad (4.114)$$

y por lo tanto es explícitamente dependiente del estado inicial. Entonces, en virtud de la proposición (3.2.2) concluimos que este operador no corresponde a un estado termal a pesar de ser un estado de equilibrio.

4.3. Caminantes extendidos en la recta

4.3.1. Obtención de la densidad reducida

En esta sección, obtendremos el operador densidad reducida para una situación en la que el estado inicial del caminante es fuertemente no local, a efectos de que un subespacio grande de H_n se encuentre inicialmente ocupado. Esta elección se basa en algunos trabajos que sugieren que una ocupación inicial considerable del espacio de dimensión mayor favorecería el establecimiento de un equilibrio en el régimen asintótico [46]. Si consideramos el estado inicial:

$$|\psi\rangle(0) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^{1/2} |n\rangle \otimes \left[\cos(\gamma/2) |R\rangle + \text{sen}(\gamma/2) e^{i\varphi} |L\rangle \right] \quad (4.115)$$

es claro que a medida que $\sigma \rightarrow \infty$, la distribución gaussiana se aproximará a una distribución uniforme, por lo que todo el espacio de estados del caminante se encontrará inicialmente ocupado, satisfaciendo el requisito planteado en el párrafo anterior. Comenzamos hallando la transformada de Fourier de las amplitudes iniciales

$$a_n(0) = \frac{e^{-\frac{n^2}{4\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cos(\gamma/2), b_n(0) = \frac{e^{-\frac{n^2}{4\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sin(\gamma/2) e^{i\varphi} \quad (4.116)$$

obteniendo:

$$\begin{cases} \tilde{a}_k(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{ikn} a_n(0) = 2^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{\pi} \sqrt{\sigma} e^{-k^2\sigma^2} \Theta_3(-2ik\pi\sigma^2, e^{-4\pi^2\sigma^2}) \cos \gamma/2 \\ \tilde{b}_k(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{ikn} a_n(0) = 2^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{\pi} \sqrt{\sigma} e^{-k^2\sigma^2} \Theta_3(-2ik\pi\sigma^2, e^{-4\pi^2\sigma^2}) \sin(\gamma/2) e^{i\varphi} \end{cases} \quad (4.117)$$

donde Θ_3 es una de las denominadas funciones elípticas, definida así:

$$\Theta_3(u, q) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2nu$$

Luego, para valores grandes de σ se obtiene:

$$\Theta_3(-2ik\pi\sigma^2, e^{-4\pi^2\sigma^2}) \simeq 1 + 2[e^{-4\pi^2\sigma^2} \cos(-4ik\pi\sigma^2) + e^{-16\pi^2\sigma^2} \cos(-8ik\pi\sigma^2) + \dots] \simeq 1 \quad (4.118)$$

de donde:

$$\begin{cases} \tilde{a}_k(0) \simeq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{ikn} a_n(0) = 2^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{\pi} \sqrt{\sigma} e^{-k^2\sigma^2} \cos \gamma/2 = c(k) \cos \gamma/2 \\ \tilde{b}_k(0) \simeq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{ikn} a_n(0) = 2^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{\pi} \sqrt{\sigma} e^{-k^2\sigma^2} \sin(\gamma/2) e^{i\varphi} = c(k) \sin(\gamma/2) e^{i\varphi} \end{cases} \quad (4.119)$$

con $c(k) = 2^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{\pi} \sqrt{\sigma} e^{-k^2\sigma^2}$. Obsérvese, por ejemplo, que al calcular la primera entrada de la matriz densidad mediante las ecuaciones (4.108), (4.110) y (4.119), se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho_{11}^{\infty} &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} [\alpha_k^4 |F_k|^2 + \beta_k^4 |G_k|^2] \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} c_k^2 [\alpha_k^4 |u_k^* \cos \frac{\gamma}{2} + v_k^* \text{sen} \frac{\gamma}{2} e^{i\varphi}|^2 + \beta_k^4 |u_k^* \cos \frac{\gamma}{2} + w_k^* \text{sen} \frac{\gamma}{2} e^{i\varphi}|^2] \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} 2^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi} \sigma e^{-2k^2\sigma^2} S(k) \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2\pi} \sqrt{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma e^{-2k^2\sigma^2} S(k) \\ &= \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2\pi} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} S(0) \\ &= S(0) \end{aligned} \quad (4.120)$$

Donde

$$S(k) = \alpha_k^4 |u_k^* \cos \frac{\gamma}{2} + v_k^* \text{sen} \frac{\gamma}{2} e^{i\varphi}|^2 + \beta_k^4 |u_k^* \cos \frac{\gamma}{2} + w_k^* \text{sen} \frac{\gamma}{2} e^{i\varphi}|^2 \quad (4.121)$$

y por lo tanto

$$S(0) = \alpha_0^4 |u_0^* \cos \frac{\gamma}{2} + v_0^* \text{sen} \frac{\gamma}{2} e^{i\varphi}|^2 + \beta_0^4 |u_0^* \cos \frac{\gamma}{2} + w_0^* \text{sen} \frac{\gamma}{2} e^{i\varphi}|^2 \quad (4.122)$$

El cálculo anterior implica que para esta condición extendida, sólo se requiere el valor de los parámetros definidos en (4.106) para el caso $k = 0$. Esto era esperable, debido a que si la dispersión del caminante en el espacio real es infinita, éste se encontrará completamente localizado en el espacio recíproco. Los valores de dichos parámetros son, para $k = 0$:

$$\begin{cases} u_0 = -\operatorname{sen} \theta \\ v_0 = \cos \theta + 1 \\ w_0 = \cos \theta - 1 \end{cases} ; \begin{cases} \alpha_0 = \frac{1}{2 \cos \frac{\theta}{2}} \\ \beta_0 = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} \end{cases} \quad (4.123)$$

De donde se obtiene el siguiente resultado para la primera entrada del operador densidad:

$$\begin{aligned} \rho_{11}^\infty &= \frac{1}{16 \cos^4 \frac{\theta}{2}} \left[\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \frac{\gamma}{2} - \operatorname{sen} \theta (\cos \theta + 1) \operatorname{sen} \gamma \cos \varphi + (\cos \theta + 1)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2} \right] \\ &+ \frac{1}{16 \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}} \left[\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \frac{\gamma}{2} - \operatorname{sen} \theta (\cos \theta - 1) \operatorname{sen} \gamma \cos \varphi + (\cos \theta - 1)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2} \right] \end{aligned} \quad (4.124)$$

cuya expresión simplificada luego de alguna manipulación algebraica es:

$$\rho_{11}^\infty = \frac{1}{2} + \cos \theta \frac{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \gamma \cos \varphi + \cos \theta \cos \gamma}{2} \quad (4.125)$$

Análogamente, para la componente ρ_{12}^∞ se tiene:

$$\begin{aligned} \rho_{12}^\infty &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} |\tilde{b}_k|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \alpha_k^4 |F_k|^2 u_k v_k^* + \beta_k^4 |G_k|^2 u_k w_k^* \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2\pi} \sqrt{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma e^{-2k^2 \sigma^2} R(k) \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2\pi} \sqrt{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma e^{-2k^2 \sigma^2} R(k) \\ &= \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2\pi} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} R(0) \\ &= R(k=0) \end{aligned} \quad (4.126)$$

Donde se definió la función $R(k)$:

$$R(k) = \alpha_k^4 |u_k^* \cos \frac{\gamma}{2} + v_k^* \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} e^{i\varphi}|^2 u_k v_k^* + \beta_k^4 |u_k^* \cos \frac{\gamma}{2} + w_k^* \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} e^{i\varphi}|^2 u_k w_k^* \quad (4.127)$$

Luego, en virtud de (4.123):

$$\begin{aligned} R(0) &= \\ &= \frac{-\operatorname{sen} \theta (\cos \theta + 1)}{16 \cos^4 \frac{\theta}{2}} \left[\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \frac{\gamma}{2} - \operatorname{sen} \theta (\cos \theta + 1) \operatorname{sen} \gamma \cos \varphi + (\cos \theta + 1)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2} \right] \\ &+ \frac{-\operatorname{sen} \theta (\cos \theta - 1)}{16 \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}} \left[\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \frac{\gamma}{2} - \operatorname{sen} \theta (\cos \theta - 1) \operatorname{sen} \gamma \cos \varphi + (\cos \theta - 1)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2} \right] \end{aligned} \quad (4.128)$$

cuya expresión reducida es

$$\rho_{12}^\infty = \operatorname{sen} \theta \frac{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \gamma \cos \varphi + \cos \theta \cos \gamma}{2} \quad (4.129)$$

y un idéntico cálculo deriva en la expresión siguiente para ρ_{22}^∞ :

$$\rho_{22}^\infty = \frac{1}{2} - \cos \theta \frac{\sin \theta \sin \gamma \cos \varphi + \cos \theta \cos \gamma}{2} \quad (4.130)$$

Obsérvese, a modo de verificación, que se satisface la condición de normalización $\rho_{11}^\infty + \rho_{22}^\infty = 1$. En resumen, la forma definitiva para el operador densidad reducida asociado a la moneda es:

$$\rho_s^\infty = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \cos \theta \left[\frac{\sin \theta \sin \gamma \cos \varphi + \cos \theta \cos \gamma}{2} \right] & \sin \theta \left[\frac{\sin \theta \sin \gamma \cos \varphi + \cos \theta \cos \gamma}{2} \right] \\ \sin \theta \left[\frac{\sin \theta \sin \gamma \cos \varphi + \cos \theta \cos \gamma}{2} \right] & \frac{1}{2} - \cos \theta \left[\frac{\sin \theta \sin \gamma \cos \varphi + \cos \theta \cos \gamma}{2} \right] \end{pmatrix} \quad (4.131)$$

Que puede escribirse en la forma

$$\rho_s^\infty = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + a & b \\ b^* & \frac{1}{2} - a \end{pmatrix} \quad (4.132)$$

con

$$\begin{cases} a = \cos \theta \left[\frac{\sin \theta \sin \gamma \cos \varphi + \cos \theta \cos \gamma}{2} \right] \\ b = \sin \theta \left[\frac{\sin \theta \sin \gamma \cos \varphi + \cos \theta \cos \gamma}{2} \right] \end{cases} \quad (4.133)$$

Obsérvese que si calculamos el cociente entre los parámetros b y a se obtiene:

$$\frac{b(\gamma, \varphi)}{a(\gamma, \varphi)} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta \quad (4.134)$$

O sea que en este caso, a diferencia de (4.114), dicho cociente sí resulta independiente del estado inicial. Eso implica que nos encontramos en las condiciones de la proposición (3.2.2), por lo que podemos afirmar que la densidad reducida obtenida en este caso corresponde, en efecto a un estado termal. Esto garantiza que la temperatura de enredo se encuentra bien definida.

Atribuimos la diferencia entre ambos comportamientos al hecho ya mencionado de que una mayor ocupación inicial del subsistema mayor puede generar que, desde el punto de vista del subsistema menor, el ambiente que lo rodea sea percibido como una reserva térmica. Luego, por analogía con el caso macroscópico, una temperatura puede ser asociada al subsistema.

Por otro lado, apréciase que podemos dar una interpretación en este contexto al parámetro κ definido en (3.2.2). En virtud de (4.134) se obtiene

$$\kappa = \frac{b}{a} = \tan \theta \quad (4.135)$$

que corresponde, en este caso, a la tangente del ángulo θ que define al operador asociado a la moneda y que determina la dinámica de la evolución. Esto era esperable, ya que las únicas cantidades adimensionales que podemos construir a partir de los parámetros relevantes asociados a la dinámica son funciones de θ , que es el único parámetro del modelo y es, en sí mismo, ya un adimensional.

4.3.2. Temperatura de Enredo

Los valores propios de (4.131) son

$$\lambda_{+/-} = \frac{1}{2} \pm \frac{\cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma \cos \varphi}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\chi}{2} \quad (4.136)$$

donde

$$\chi = \cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma \cos \varphi \quad (4.137)$$

por lo que de acuerdo con (3.79), la temperatura de enredo es proporcional a

$$\left[\log \left(\frac{\sqrt{2} + \chi}{\sqrt{2} - \chi} \right) \right]^{-1} \quad (4.138)$$

Las correspondientes curvas de nivel sobre la esfera de Bloch quedan entonces definidas por la ecuación $\chi = cte$, o sea:

$$\cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma \cos \varphi = cte \quad (4.139)$$

o equivalentemente, en coordenadas cartesianas $x = \sin \gamma \cos \varphi$, $y = \sin \gamma \sin \varphi$, $z = \cos \gamma$:

$$x \sin \theta + z \cos \theta = cte \quad (4.140)$$

La ecuación (4.140) representa una familia de planos paralelos, ortogonales a la dirección $(\sin \theta, 0, \cos \theta)$ determinada por el parámetro $\kappa = \tan \theta$. La intersección de dichos planos con la esfera de Bloch resulta en una familia de circunferencias tales que, para todos los estados iniciales contenidos en cada una de ellas, se alcanza la misma temperatura de enredo asintótica.

Prestemos atención a los casos límite:

- $\chi = 0$.

La ecuación (4.140) representa un plano por el origen, que por lo tanto divide a la esfera de Bloch en dos semiesferas idénticas. Los estados iniciales asociados a puntos en dicha circunferencia termalizarán, según (3.79) a $T = \infty$.

- $\chi = 1$.

En este caso, cada uno los planos $x \sin \theta + z \cos \theta = \pm 1$ interseca a la esfera de Bloch en un único punto. Los correspondientes estados son ortogonales (diametralmente opuestos en la esfera) y están dados por las coordenadas $(\gamma = \theta, \varphi = 0)$ y $(\gamma = \pi - \theta, \varphi = \pi)$.

Dichos estados iniciales termalizaran a $T = 0$. De hecho, puede verse que corresponden a los autoestados del operador unitario que rige la dinámica de la moneda, y que por lo tanto, no se entrelazan con los grados de libertad de posición ante sucesivas aplicaciones del operador. Esto implica que el estado global es separable $\forall t$. El siguiente gráfico muestra la dependencia de la temperatura de enredo con el parámetro χ para $\theta = \pi/4$:

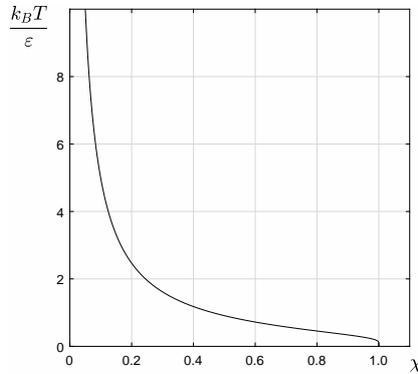


Figura 4.1: Temperatura de enredo adimensional en función de χ para el caminante cuántico con distribución inicial uniforme en el espacio de posiciones. La misma es divergente para χ tendiendo a cero, y tiende a cero con tangente vertical en $\chi = 1$

Mientras que las curvas de nivel se representan en las siguientes figuras

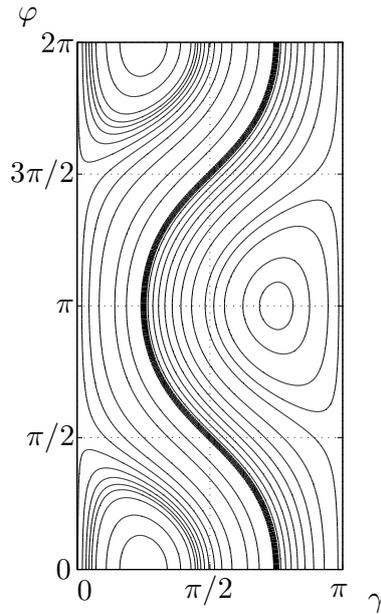


Figura 4.2: Curvas de nivel de la temperatura de enredo en el espacio (γ, φ) para la caminata de Hadamard con distribución inicial uniforme. La línea gruesa central corresponde a $T = \infty$, mientras que los centros de las curvas cerradas están asociados a los estados de temperatura nula ($\gamma = \pi/4, \varphi = 0$) y ($\gamma = 3\pi/4, \varphi = \pi$)

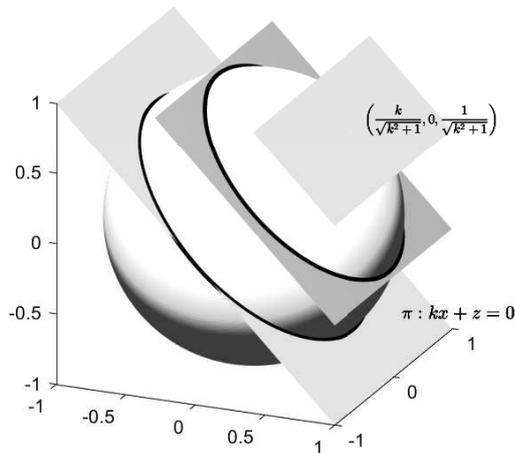


Figura 4.3: Curvas de nivel de la temperatura sobre la esfera de Bloch para la caminata de parámetro $\kappa = \text{tg}(\theta)$ y distribución inicial uniforme. El plano inferior biseca a la esfera de Bloch, de manera que los estados iniciales sobre esta curva termalizan a $T = \infty$. El plano superior es tangente a la esfera en el punto indicado, cuyo estado asociado termaliza a $T = 0$. Se representa también una isoterma intermedia.

Este tipo de termalización es idéntico al obtenido en la proposición (3.4.1) al analizar el caso de la evolución bajo proyectores ortogonales, lo cual exige un análisis más profundo. Si

calculamos el módulo cuadrado de la proyección del estado inicial del qubit

$$|\varphi_0\rangle = \cos(\gamma/2)|R\rangle + e^{i\varphi}\sin(\gamma/2)|L\rangle \quad (4.141)$$

sobre los autoestados de la densidad reducida (o equivalentemente, del hamiltoniano de enredo) dados por:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= -\sin\frac{\theta}{2}|R\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|L\rangle \\ |\psi_2\rangle &= \cos\frac{\theta}{2}|R\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|L\rangle \end{aligned} \quad (4.142)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} |\langle\varphi_0|\psi_1\rangle|^2 &= \frac{1}{2} + \frac{\cos\theta\cos\gamma + \sin\theta\sin\gamma\cos\varphi}{2} = \lambda_+ \\ |\langle\varphi_0|\psi_2\rangle|^2 &= \frac{1}{2} - \frac{\cos\theta\cos\gamma + \sin\theta\sin\gamma\cos\varphi}{2} = \lambda_- \end{aligned} \quad (4.143)$$

que corresponden a los autovalores del operador ρ_s^∞ hallados en (4.131). Luego, la descomposición espectral de dicho operador será:

$$\begin{aligned} \rho_s^\infty &= \lambda_+|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \lambda_-|\psi_2\rangle\langle\psi_2| \\ &= |\langle\varphi_0|\psi_1\rangle|^2|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\langle\varphi_0|\psi_2\rangle|^2|\psi_2\rangle\langle\psi_2| \\ &= \langle\psi_1|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|\psi_1\rangle|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \langle\psi_2|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|\psi_2\rangle|\psi_2\rangle\langle\psi_2| \\ &= |\psi_1\rangle\langle\psi_1|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|\psi_2\rangle\langle\psi_2| \\ &= M_1\rho_s(0)M_1^\dagger + M_2\rho_s(0)M_2^\dagger \end{aligned} \quad (4.144)$$

donde se definió $M_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$, $M_2 = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$ y se empleó que $\rho_s(0) = |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|$. Esto muestra que, efectivamente, el estado reducido admite una descomposición de Kraus en términos de proyectores ortogonales, cada uno de los cuales se construye a partir de los correspondientes autovectores del hamiltoniano de enredo. Estamos entonces en las condiciones de la proposición (3.4.1) y las curvas de termalización deben ser, por lo tanto, circunferencias paralelas, hecho que fue verificado explícitamente resolviendo el modelo.

Para finalizar, analizaremos la disposición geométrica de los estados termales obtenidos en la esfera de Bloch. Para ello, consideremos una curva de nivel dada por la ecuación

$$\chi = \cos\theta\cos\gamma + \sin\theta\sin\gamma\cos\varphi = \chi_0 = cte \quad (4.145)$$

El correspondiente estado termal es:

$$\rho_s^\infty = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \chi_0 \cos\theta & \chi_0 \sin\theta \\ \chi_0 \sin\theta & 1 - \chi_0 \cos\theta \end{pmatrix} \quad (4.146)$$

que se representa mediante su vector de Bloch

$$\vec{B} = \chi_0(\sin\theta, 0, \cos\theta) \quad (4.147)$$

el cual es evidentemente perpendicular a la curva de termalización y verifica que $|\vec{B}| = |\chi_0|$. Un cálculo directo muestra también que la distancia desde el origen al plano π que contiene la curva de termalización es

$$d((0, 0, 0), \pi) = \frac{|\chi_0|}{\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta}} = |\chi_0| \quad (4.148)$$

por lo que el estado termal se ubica en el centro de su curva de nivel asociada. Luego, dado que las curvas de nivel son circunferencias paralelas, el conjunto de los estados termales accesibles al qubit es el diámetro de la esfera de Bloch definido por la dirección $(\sin\theta, 0, \cos\theta)$, lo cual concuerda con el resultado de la proposición (3.2.3).

Termalización en el modelo de Jaynes-Cummings

Desde su aparición hace ya más de medio siglo en el artículo seminal [17], el modelo de Jaynes-Cummings se ha convertido en uno de los modelos paradigmáticos dentro de la MC de interacciones y ha sido objeto de numerosa cantidad de estudios. El modelo estudia la interacción de un átomo de 2 niveles con un modo cuantizado del campo electromagnético. La absorción o emisión de fotones con la correspondiente transición del electrón entre los estados excitado y fundamental presenta un colapso con posterior resurgimiento de oscilaciones en las poblaciones, un comportamiento extremadamente no clásico que evidencia la naturaleza cuántica de la radiación electromagnética. El empleo de este modelo ha permitido comprender propiedades básicas del enredo cuántico así como prosperar en el camino de entender el vínculo entre el mundo cuántico y el clásico [52].

En este trabajo nos centraremos en analizar si bajo ciertas condiciones el sistema puede presentar un comportamiento termodinámico. Dado que la dimensión del espacio de Hilbert asociado a los fotones es mucho mayor que la correspondiente al del átomo, existe la posibilidad de que éste perciba a los fotones como un baño térmico y que el entrelazamiento producido durante la evolución conduzca a un estado de equilibrio. Por otro lado, sabemos que para estados coherentes del campo electromagnético, el sistema alcanza estados que parecen de equilibrio para luego abandonarlos y retomar el comportamiento oscilatorio, lo cual es un fuerte argumento en contra de nuestra hipótesis anterior.

Basados en la idea de que una importante ocupación del ambiente en el estado inicial favorece el establecimiento de un equilibrio, analizaremos la interacción del átomo con una distribución ancha y uniforme de fotones. Si bien dicho estado inicial no corresponde a la realidad física estándar del laboratorio, permitirá investigar si los estados de equilibrio son posibles a pesar de la evolución unitaria del sistema global.

A continuación haremos una breve introducción al modelo, para luego adentrarnos en su estudio desde el punto de vista recién expuesto. Para adquirir una idea de los numerosos enfoques desde los que se ha analizado el modelo y sus aplicaciones, puede consultarse por ejemplo [51]

5.1. El modelo

Consideremos un sistema compuesto por un átomo de dos niveles en una cavidad óptica en interacción con un modo cuantizado del campo electromagnético de frecuencia ω . El espacio de Hilbert asociado a este sistema es:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_N \otimes \mathcal{H}_A, \quad (5.149)$$

donde el espacio \mathcal{H}_N asociado a los fotones es generado por la base $\{|n\rangle\}$, mientras que el espacio \mathcal{H}_A correspondiente al átomo será expresado en términos de la base $\{|e\rangle, |f\rangle\}$, que representan los estados excitado y fundamental respectivamente. Obsérvese que $\{|n, e\rangle, |n, f\rangle\}$, donde $|n, e\rangle = |n\rangle|e\rangle$ and $|n, f\rangle = |n\rangle|f\rangle$ es una base ortonormal de (5.149).

Si la frecuencia ω de la excitación es próxima a la que corresponde a la diferencia de niveles de energía del átomo (ω_a), el sistema se encontrará próximo a la resonancia. Bajo estas condiciones, es válida la aproximación de onda rotatoria (RWA) y el hamiltoniano se escribe como la suma de 3 términos, correspondientes al campo, el átomo y la interacción dipolar entre ambos:

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{\hbar}{2}\omega_a \sigma_z + \frac{\hbar}{2}g (a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+), \quad (5.150)$$

donde:

- a^\dagger y a son los operadores de creación y aniquilación acutando sobre el espacio \mathcal{H}_N .
- g es la constante de acoplamiento, que dependerá de aspectos tales como el volumen de la cavidad y el momento dipolar del átomo.
- σ_+ y σ_- son los operadores de subida y bajada, definidos mediante

$$\begin{aligned} \sigma_+ &\equiv |e\rangle\langle f|, \\ \sigma_- &\equiv |f\rangle\langle e|, \end{aligned} \quad (5.151)$$

- σ_z es el operador de espín de Pauli en la dirección z , que se vincula con los operadores anteriores según:

$$\sigma_z \equiv |e\rangle\langle e| - |f\rangle\langle f| = [\sigma_+, \sigma_-] \quad (5.152)$$

Los autovalores del hamiltoniano (5.150) se calculan en [51] y son:

$$E_\pm(n) = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \pm \frac{1}{2}\hbar\Omega_n(\delta), \quad (5.153)$$

donde

$$\Omega_n(\delta) = \sqrt{\delta^2 + (n+1)g^2}, \quad (5.154)$$

es al frecuencia de Rabi y se ha definido la desintonía $\delta \equiv \omega - \omega_a$.

Los correspondientes autoestados, denominados *estados vestidos*, están dados por

$$\begin{aligned} |n+\rangle &= \cos\theta_n |n, e\rangle + \sin\theta_n |n+1, f\rangle, \\ |n-\rangle &= \cos\theta_n |n+1, f\rangle - \sin\theta_n |n, e\rangle, \end{aligned} \quad (5.155)$$

donde

$$\tan(2\theta_n) = \frac{g\sqrt{n+1}}{\delta}. \quad (5.156)$$

La evolución en la base de autoestados del Hamiltoniano es trivial y puede escribirse de la forma

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n^+ e^{-\frac{iE_+(n)t}{\hbar}} |n+\rangle + a_n^- e^{-\frac{iE_-(n)t}{\hbar}} |n-\rangle \right), \quad (5.157)$$

donde los coeficientes a_n^+ y a_n^- son constantes definidas por el estado inicial. Con respecto a este punto, consideraremos que el estado inicial del átomo es arbitrario, mientras que para la distribución inicial de fotones consideraremos dos situaciones: en primer lugar, asumiremos que los fotones en la cavidad siguen una distribución de Poisson. Luego, investigaremos la situación en que la distribución de fotones es uniforme y ocupa un gran número de autoestados de energía, con la esperanza de que, de acuerdo a lo observado en capítulos anteriores, esto favorezca la equilibración. Sin embargo, en ambos casos debemos ser cuidadosos de eliminar

del estado inicial $|0\rangle|f\rangle$ (ver 5.155) ya que éste no puede construirse a partir de los estados vestidos. Más específicamente, consideraremos estados iniciales del tipo:

$$|\Psi(0)\rangle = \mathcal{N} \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle \left(|e\rangle \cos \frac{\gamma}{2} + |f\rangle e^{i\varphi} \sin \frac{\gamma}{2} \right) - \mathcal{N} C_0 |0\rangle |f\rangle e^{i\varphi} \sin \frac{\gamma}{2}, \quad (5.158)$$

donde los ángulos $\gamma \in [0, \pi]$ y $\varphi \in [0, 2\pi]$ definen el estado inicial del átomo en la esfera de Bloch, y \mathcal{N} es una constante de normalización dada por

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{1 - |C_0|^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}}. \quad (5.159)$$

5.2. Colapso y resurgimiento frente a estados coherentes

5.2.1. Evolución de las poblaciones

En la referencia [51] se obtienen las poblaciones del operador densidad reducida para estados coherentes de la luz, que corresponden a una distribución inicial de fotones del tipo Poisson:

$$|C_n|^2 = \frac{e^{-\langle n \rangle} \langle n \rangle^n}{n!} \quad (5.160)$$

donde $\langle n \rangle$ es el número medio de fotones de la distribución. La solución, para el caso resonante ($\delta = 0$) está dada por:

$$\rho_{S11} = \frac{1}{2} \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\langle n \rangle} \langle n \rangle^n}{n!} \cos(2g\sqrt{n+1}t) \right] \quad (5.161)$$

y se ilustra en la siguiente figura:

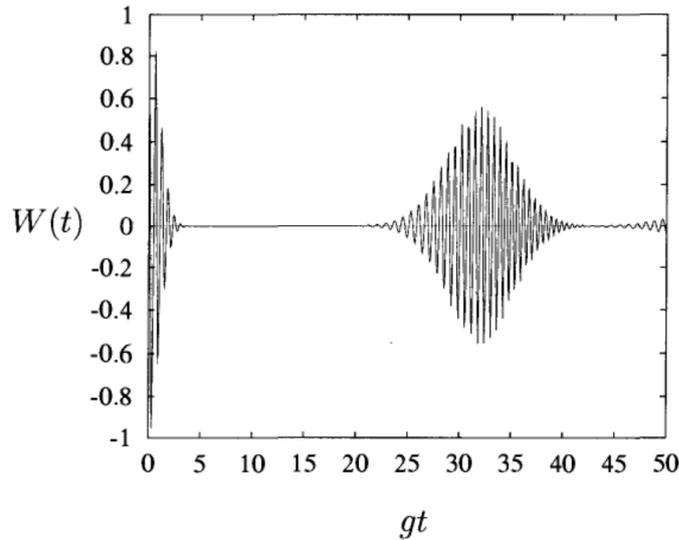


Figura 5.1: Colapso y resurgimiento de las poblaciones para estados coherentes de la luz. $W(t)$ representa el desvío respecto al valor medio ($1/2$). La figura corresponde a los valores $\langle n \rangle = 25$ y $\delta = 0$ y fue tomada de la referencia [53]

En presencia de un fotón, las poblaciones evolucionan de acuerdo a una oscilación pura en torno a su valor medio ($1/2$). En el caso $\langle n \rangle \gg 1$, la amplitud de la oscilación se apaga para

tiempos del orden de $t_{colapso} = \sqrt{2}/g$, para luego resurgir periódicamente. Se tiene entonces, como ya fue comentado, que el sistema pasa por estados que en primera instancia parecen de equilibrio para luego abandonarlos y retomar el comportamiento oscilatorio. La primera verificación experimental de este comportamiento se reportó en [54].

5.2.2. Temperatura de enredo media

Dado que el estado no presenta límite asintótico, no ocurre equilibración y por lo tanto, estrictamente hablando, no se puede asociar una temperatura al sistema. Sin embargo, el análisis de la figura 5.1 muestra que el sistema se mantiene próximo a cierto *estado promedio* durante la mayor parte de su evolución, donde dicho estado promedio se define como

$$\sigma_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \rho_s(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \rho(t) | n \rangle \quad (5.162)$$

Luego, si σ_s corresponde a un estado termal, podremos caracterizarlo a través de una *temperatura media* definida de manera análoga al caso en que si ocurre termalización. En efecto, es sencillo observar que empleando el estado (5.157) y efectuando la integración, se obtiene para el caso general (no resonante) el estado promedio:

$$\sigma_s = \begin{pmatrix} P_e & 0 \\ 0 & P_f \end{pmatrix}, \quad (5.163)$$

donde P_e está dado por:

$$P_e = \sum_{n'=0}^{\infty} \{ |a_{n'}^+|^2 \cos^2 \theta_{n'} + |a_{n'}^-|^2 \sin^2 \theta_{n'} \} \quad (5.164)$$

y de acuerdo a la condición de normalización, $P_f = 1 - P_e$ (el cálculo, así como las expresiones de $|a_{n'}^+|^2$ y $|a_{n'}^-|^2$ se dan en el apéndice). Dado que el estado obtenido es diagonal, en virtud de la proposición (3.2.2) sabemos que corresponde a un estado termal, caracterizado por la temperatura de enredo:

$$T = \frac{2\epsilon}{k_B \ln \left(\frac{P_e}{P_f} \right)}. \quad (5.165)$$

cuyo comportamiento en función del estado inicial se ilustra en las siguientes figuras.

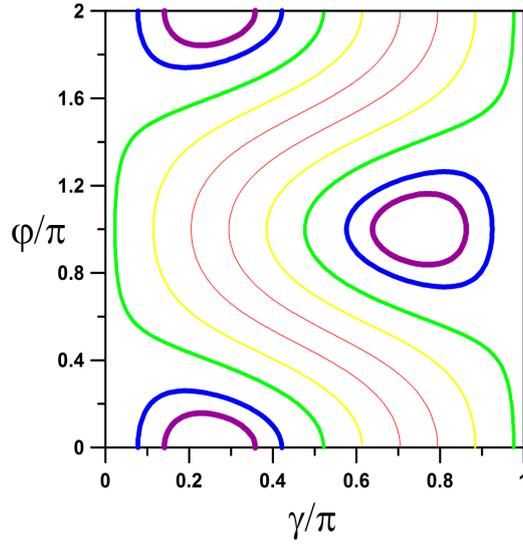


Figura 5.2: Curvas de nivel de la temperatura media en función de γ and φ . Las curvas corresponden a los valores de $\beta = 1/T = 0.8$ (violeta), 0.7 (azul), 0.5 (verde), 0.3 (amarillo) y 0.1 (rojo). La curva correspondiente al valor $\beta = 0$ ($T = \infty$) se sitúa entre las dos rojas. La figura corresponde a los valores de los parámetros $g = 0,001$, $\bar{n} = 100$, $\delta = 0,01$.

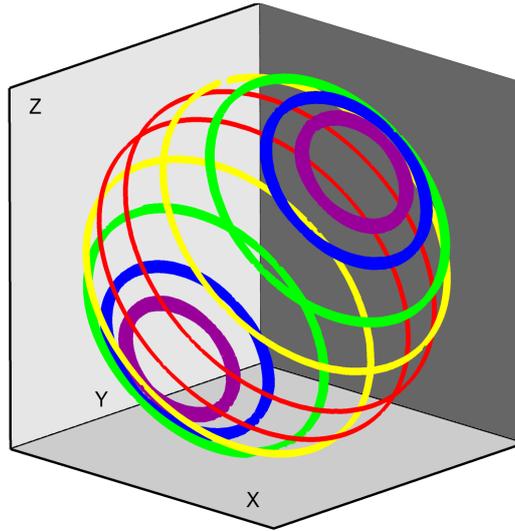


Figura 5.3: Cuvas de nivel de la temperatura media en la esfera de Bloch correspondientes a la Fig. 5.2. El eje de simetría tiene por dirección el vector $(1, 0, 1)$, mientras que el valor de temperatura media queda definido, para $\langle n \rangle$ fijo, por el estado inicial del átomo.

Apréciese la similitud entre las figuras anteriores y las correspondientes a la temperatura de enredo asintótica para la caminata cuántica (Fig. 4.2 y Fig. 4.3). Si bien este caso corresponde a la temperatura de los estados promedio alrededor de los cuales oscila el estado real para cada conjunto de condiciones iniciales, las figuras sugieren una posible relación entre ambos modelos, a pesar de las diferencias notables que presentan ambos sistemas. En ese sentido, sería interesante estudiar si la termalización no ostenta rasgos de universalidad, la cual suponemos estaría vinculada a la estructura matemática compartida por los diversos sistemas que efectivamente la presentan (en este caso, el producto tensorial de un espacio de dimensión 2 por otro de dimensión infinita) así como a aspectos muy generales de la interacción. Un paso en esa dirección

puede haber sido realizado en este trabajo y corresponde a la proposición (3.4.1), en la cual se mostró que la estructura geométrica de las curvas de nivel de la temperatura bajo cierto tipo de evolución (proyectores ortogonales) es universal (circunferencias paralelas en la esfera de Bloch), con independencia del sistema físico bajo consideración, salvo en la orientación de dichas curvas.

5.3. Termalización ante distribuciones uniformes en el límite $N \gg 1$

En la sección anterior fuimos capaces de caracterizar los estados reducidos de un átomo en interacción con estados coherentes de la luz mediante una temperatura de enredo media, debido a que en ese caso el sistema no alcanza estados de equilibrio (aunque se mantiene próximo a ellos durante toda su evolución).

El objetivo de esta sección es analizar si dichos estados de equilibrio son posibles dentro del mismo modelo, y para ello analizaremos la interacción con una distribución ancha y uniforme de fotones. Nuestra experiencia en la resolución de la caminata cuántica mostró que superpoblar inicialmente el espacio de posiciones indujo a la moneda a alcanzar un estado termal, por lo que tiene sentido plantearse un estado inicial similar en el cual muchas dimensiones del espacio de los fotones estén ocupadas y observar qué ocurre para tiempos grandes con el estado reducido del átomo.

En el apéndice se muestra que la expresión general para las poblaciones para estados iniciales arbitrarios consta de 2 contribuciones, la primera, independiente del tiempo (y que por lo tanto, coincide con el promedio temporal definido en la sección anterior)

$$P_e = \sum_{n'=0}^{\infty} \{|a_{n'}^+|^2 \cos^2 \theta_{n'} + |a_{n'}^-|^2 \sin^2 \theta_{n'}\} \quad (5.166)$$

mientras que la parte dependiente del tiempo adopta la forma:

$$\lambda = - \sum_{n'=0}^{\infty} \{\sin(2\theta_{n'}) \Re[a_{n'}^+ a_{n'}^{-*} e^{-\frac{i(E_+(n') - E_-(n'))t}{\hbar}}]\} \quad (5.167)$$

Siendo entonces $\rho_{S11} = P_e + \lambda$

Para el caso de una distribución uniforme de $N \gg 1$ fotones, las expresiones anteriores se reducen a :

$$\rho_{S11} \simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{2(N+1)} + \frac{\text{sen } \gamma}{8(N+1)^2} + \lambda(t) \quad (5.168)$$

donde $\lambda(t)$ es (por simplicidad, tomando $\delta = 0$)

$$\lambda(t) = \frac{\mathcal{N}^2}{2(N+1)} \left[\cos \gamma \sum_{n'=0}^{N-1} \cos(g\sqrt{n+1}t) + \text{sen } \gamma \text{sen } \varphi \sum_{n'=0}^{N-1} \text{sen}(g\sqrt{n+1}t) \right] \quad (5.169)$$

El comportamiento de las series de términos oscilatorios involucradas en (5.169) se muestra en las siguientes figuras:

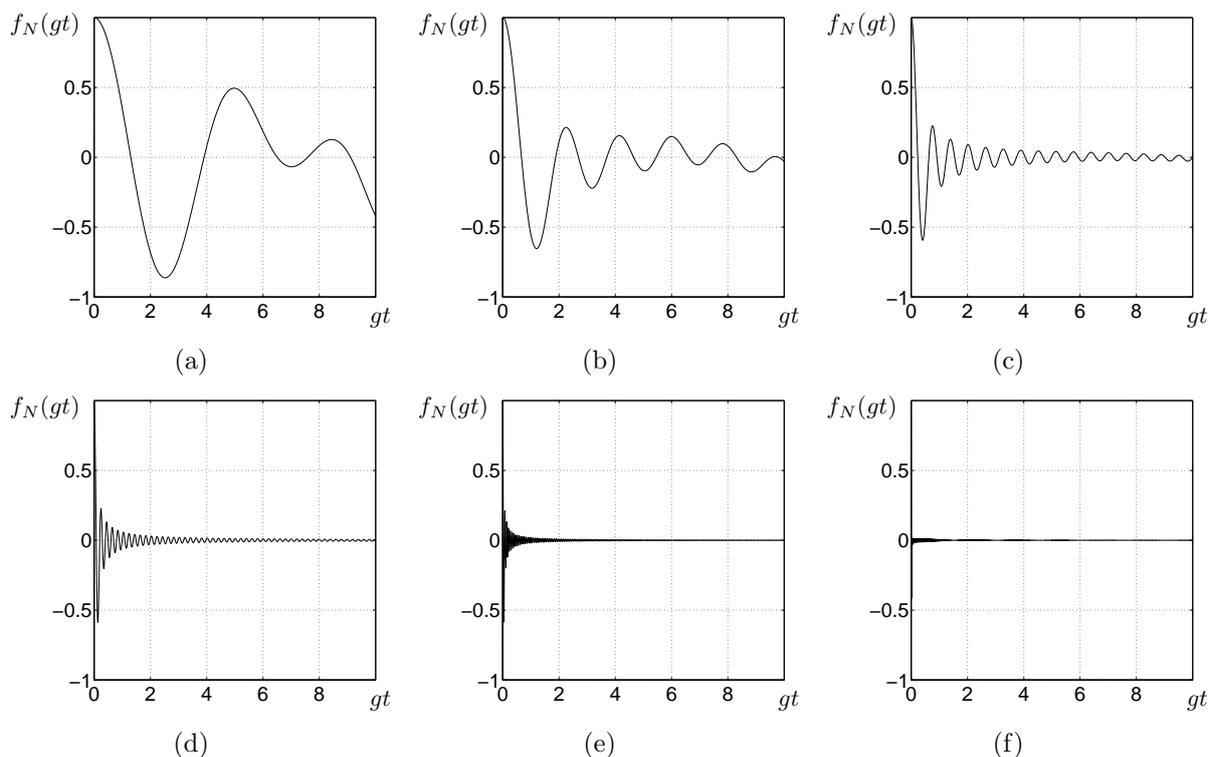


Figura 5.4: Comportamiento de la función $f_N(gt) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \cos(\sqrt{n+1}gt)$. Los gráficos corresponden respectivamente a la interacción con baños de $N = 10^p$, $p=0,1,2,3,4,5$ fotones respectivamente. Obsérvese como a medida que N crece, la amplitud de la oscilación tiende a cero más rápidamente. Los gráficos abarcan el intervalo desde $t=0$ (donde la amplitud es máxima) hasta $gt = 10$)

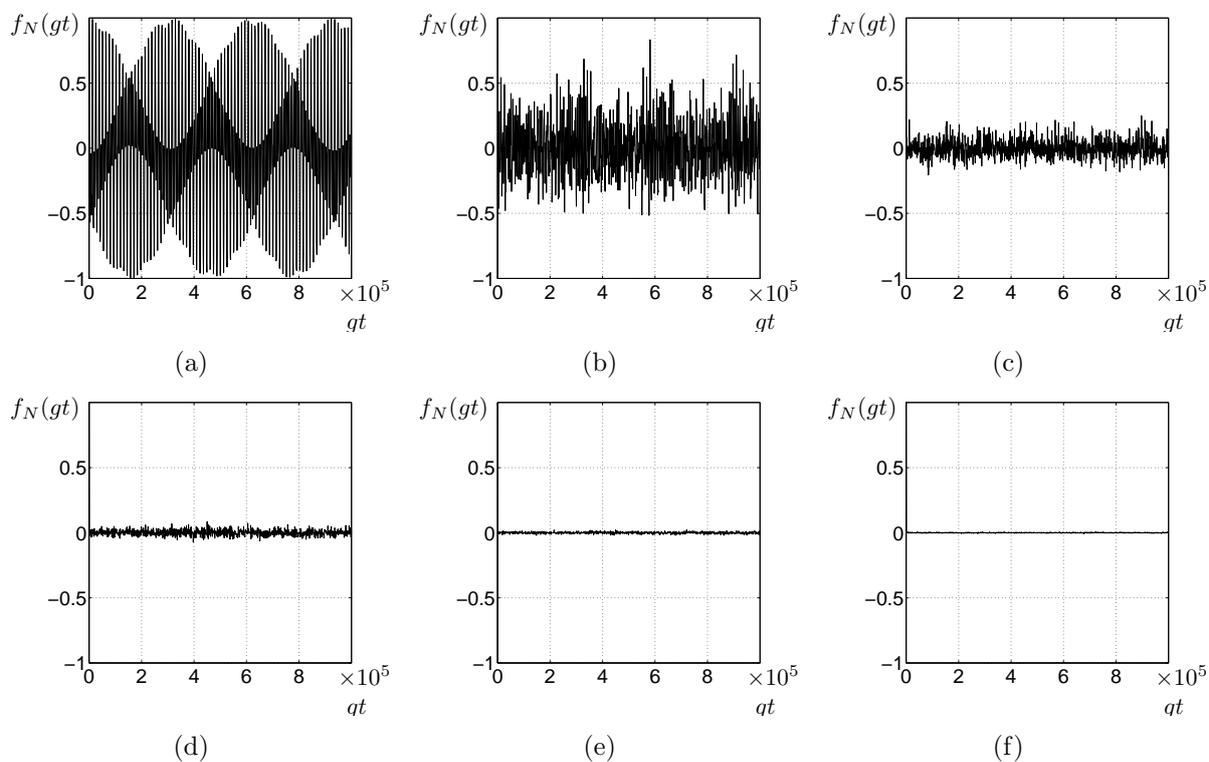


Figura 5.5: $f_N(gt) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \cos(\sqrt{n+1}gt)$ hasta gt del orden de 10^5 . No se aprecia resurgimiento. Análoga conducta presenta la función $g_N(gt) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \sin(\sqrt{n+1}gt)$

A partir de los gráficos anteriores concluimos que para este nivel de ocupación del baño de fotones, el sistema alcanza efectivamente un estado estacionario en el cual no ocurre resurgimiento luego del colapso inicial. Series similares series aparecen en el cálculo de las coherencias, las cuales también tienden a cero en el límite considerado. La ecuación (5.168) muestra que la dependencia en el estado inicial del átomo se vuelve despreciable a medida que N crece, obteniéndose el estado termal

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

por lo que ocurre termalización global a temperatura de enredo $T = \infty$ y el sistema admite, por lo tanto, estados de equilibrio.

Conclusiones y perspectivas

Para finalizar, haremos algunos comentarios sobre los resultados obtenidos y sobre las posibles líneas de trabajo a futuro que se desprenden de esta Tesis.

El objeto de estudio central de este trabajo han sido los estados de equilibrio de qubits en interacción con baños térmicos cuánticos, refiriéndose esto último a sistemas cuánticos cuya dimensión del espacio de Hilbert asociado es mucho mayor que 2. Los resultados obtenidos se dividen en 3 capítulos, uno de desarrollo teórico y los otros dedicados a la aplicación de estas ideas sobre dos modelos concretos.

En el capítulo 2, se define el concepto de temperatura de enredo, que resulta ser una medida del grado de enredo producido entre dos sistemas cuánticos una vez alcanzado el equilibrio debido a la interacción entre ellos. La definición hace uso de la analogía estructural existente entre los operadores de densidad reducida que describen al qubit y las distribuciones de probabilidad asociadas a sistemas en equilibrio térmico en el contexto de la Mecánica Estadística. En este trabajo observamos que a pesar de lo que sugieren los resultados sobre tipicalidad canónica, no todos los estados de equilibrio corresponden a estados termales (a menos que admitamos hamiltonianos diferentes para cada estado inicial), por lo que la analogía antes mencionada no es universal. En cuanto a esto, se logró caracterizar aquellos estados reducidos dependientes del estado inicial que sí pueden ponerse en correspondencia con una distribución canónica, demostrándose las entradas de dicho operador deben satisfacer la relación siguiente:

$$\rho_s^\infty = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + a(C_n, \gamma, \varphi) & b(C_n, \gamma, \varphi) \\ b^*(C_n, \gamma, \varphi) & \frac{1}{2} - a(C_n, \gamma, \varphi) \end{pmatrix} \quad \text{thermal} \iff \exists \kappa/b = \kappa a \quad (6.170)$$

donde κ es una constante adimensional independiente del estado inicial, y que por lo tanto dependerá de aspectos generales de la interacción del qubit con su ambiente. La búsqueda de relaciones similares en sistemas de dimensión mayor que permitan establecer si un estado dado corresponde o no a un estado termal son extensiones que merecen ser analizadas.

Una vez caracterizados los estados termales de un qubit, se mostró que la temperatura de enredo verifica relaciones con la entropía de Von Neumann y con la energía libre de Helmholtz análogas a aquellas que vinculan las variables termodinámicas usuales. La interpretación de la energía libre en este contexto así como de toda la termodinámica que de ella se desprende también amerita posteriores reflexiones.

Otro resultado relevante obtenido en el capítulo 2 es la proposición (3.2.3), que muestra que los estados termales que puede alcanzar un qubit que interactúa con un ambiente dado mediante una dinámica prefijada se ubican sobre un diámetro de la esfera de Bloch, cuya dirección está completamente determinada por la cantidad κ . Este parámetro nuevamente juega un rol importante, ya que determina a priori los estados termales posibles. Dado que dichos estados son insumos fundamentales para algunos protocolos cuánticos de extracción de trabajo, este resultado puede ser relevante pues permitiría, mediante el ajuste de los parámetros que gobiernan la interacción, seleccionar κ de manera de “preparar” el estado termal más adecuado a cada protocolo.

El último resultado obtenido en el capítulo 2 tiene que ver con la termalización bajo evoluciones gobernadas por proyectores ortogonales. Se demostró que las curvas de nivel de la temperatura de enredo son circunferencias paralelas sobre la esfera de Bloch, en cuyos centros se ubican los respectivos estados termales asintóticos. Si consideramos el plano que contiene a una curva de nivel en particular, es evidente que el estado termal es, de todos los estados reducidos localizados en ese plano, el de mayor entropía. Esto implica que los procesos de termalización desde estados puros en la superficie hacia sus correspondientes estados termales asintóticos exhiben un comportamiento que como mínimo, evoca la Segunda Ley de la Termodinámica y que amerita un estudio más profundo.

Por otro lado, cabe recordar que la evolución bajo proyectores ortogonales es un caso muy particular de evolución reducida, por lo que sería interesante estudiar la termalización para tipos de evolución más generales.

Si bien la extensión de los resultados anteriores a sistemas de dimensión mayor no es trivial, creemos que es posible. La caracterización de los estados termales mediante un razonamiento análogo al de la proposición (3.2.3) involucra, ya en dimensión 3, cálculos muy engorrosos. De todas formas, no descartamos que exista un enfoque alternativo que permita evadir esta dificultad. Otra limitante tiene que ver con la ausencia de una representación geométrica sencilla en dimensión mayor a 2. Sin embargo, algunos trabajos sobre generalizaciones de la esfera de Bloch a espacios de otras dimensiones ya figuran en la literatura [57].

En el capítulo 3, se analizaron los estados de equilibrio de la caminata cuántica en la línea, estudio que resultó muy ilustrativo por diferentes motivos.

En primer lugar, permitió dar solidez a la hipótesis de que lo relevante a efectos de que se produzca termalización no es la dimensión del espacio de Hilbert que opera como reserva térmica, sino más bien el nivel de ocupación que dicho espacio presenta una vez que comienza la interacción con el qubit. Esto pudo observarse comparando los estados de equilibrio obtenidos para una condición inicial localizada [50] y luego para una extendida. En el primer caso, el estado reducido, si bien es un estado de equilibrio, no corresponde a un estado termal. En cambio, para el estado inicial extendido del caminante, apreciamos que se obtiene una densidad reducida que satisface la condición de la proposición (3.2.2).

En segundo lugar, el análisis de este modelo mostró que efectivamente la cantidad κ puede obtenerse de los parámetros que gobiernan la interacción, en este caso el ángulo θ asociado al sesgo de la moneda, y que determina la evolución unitaria del sistema. Para otros sistemas, proponemos que un análisis del correspondiente Hamiltoniano permitirá construir su correspondiente magnitud adimensional κ .

Por otro lado, el estudio de la caminata cuántica permitió verificar en un modelo específico los resultados de las proposiciones (3.2.3) y (3.4.1) referidas a la ubicación de los estados termales en la esfera de Bloch y a la termalización bajo proyectores ortogonales. Cabe aclarar que todos los resultados comentados han sido obtenidos de forma analítica, sin necesidad de emplear aproximaciones de ningún tipo ni análisis numérico.

El último capítulo consistió en el análisis de otro modelo clásico, en este caso el modelo de Jaynes-Cummings. Este estudio permitió, nuevamente, mostrar que una mayor ocupación del sistema de dimensión mayor favorece el establecimiento de equilibrios en el régimen asintótico. Esto pudo apreciarse mediante la comparación entre los estados reducidos obtenidos en el caso de la interacción con estados coherentes (donde se aprecia el colapso y resurgimiento de las poblaciones) y aquellos que resultan de la interacción del átomo con distribuciones anchas y uniformes de fotones.

En el caso límite estudiado, se mostró que el sistema puede llegar a presentar incluso termalización global, donde el estado final se vuelve independiente de las condiciones iniciales del

átomo. Conjeturamos que el estudio del caso fuera de la resonancia puede conducir a estados termales no tan extremos, caracterizados por un parámetro κ de la forma

$$\kappa = f(\delta/g) \quad (6.171)$$

siendo f una función que verifique la condición $f(0) = 0$. Esta conjetura se basa en el hecho de que éstas son las únicas cantidades adimensionales que podemos construir a partir de los parámetros relevantes que figuran en el hamiltoniano, y a la observación de que, dado que nuestro estudio se realizó bajo la condición de resonancia, se obtuvo una densidad reducida diagonal en el equilibrio, lo cual corresponde al caso $\kappa = 0$ de la proposición (3.2.2). La verificación (o no) de esta conjetura también se encuentra entre las posibles futuras extensiones de este trabajo.

Para finalizar, conexiones entre este trabajo y otros presentes en la literatura que han abordado el modelo de Jaynes-Cummings deben ser exploradas. En particular, la aplicación del formalismo denominado *Thermo Field Dynamics* al modelo mencionado permite mostrar que las poblaciones del átomo, en equilibrio térmico con un ambiente a temperatura termodinámica inversa β adoptan la forma [55], [56]:

$$P_e = \frac{e^{\beta\hbar\omega/2}}{e^{\beta\hbar\omega/2} + e^{-\beta\hbar\omega/2}}, \quad (6.172)$$

$$P_f = \frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{e^{\beta\hbar\omega/2} + e^{-\beta\hbar\omega/2}}. \quad (6.173)$$

donde $\beta = (k_B T)^{-1}$, y k_B es la constante de Boltzmann. Esto permitiría establecer la vinculación entre la la temperatura termodinámica y la temperatura de enredo definida en este trabajo.

Apéndice: Cálculos en el modelo de Jaynes-Cummings

7.1. Preliminares

7.1.1. Constante de normalización

A partir del estado inicial (5.158) e imponiendo $\langle \Psi(0) | \Psi(0) \rangle = 1$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^2 [\langle e|e \rangle \cos^2(\gamma/2) + \langle f|f \rangle \sin^2(\gamma/2)] [(\sum_n C_n^2) - \langle 0|0 \rangle |C_0^2| - |C_0^2| + \langle 0|0 \rangle |C_0^2|] &= 1 \\ \rightarrow \mathcal{N}^2 [\cos^2(\gamma/2) + \sin^2(\gamma/2) - |C_0^2| \sin^2(\gamma/2)] &= \mathcal{N}^2 [1 - |C_0^2| \sin^2(\gamma/2)] = 1 \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{1 - |C_0^2| \sin^2(\gamma/2)}}$$

7.1.2. Obtención de a_n^+ y a_n^- en términos del estado inicial

Desarrollando un estado inicial arbitrario en la base de estados vestidos (5.155) se obtiene:

$$\begin{aligned} |\Psi(0)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} [a_n^+ |n^+\rangle + a_n^- |n^-\rangle] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [a_n^+ (\cos \theta_n |n, e\rangle + \sin \theta_n |n+1, f\rangle) + a_n^- (-\sin \theta_n |n, e\rangle + \cos \theta_n |n+1, f\rangle)] \quad (7.174) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(a_n^+ (\cos \theta_n - a_n^- \sin \theta_n) |n, e\rangle + (a_n^+ \sin \theta_n + a_n^- \cos \theta_n) |n+1, f\rangle)] \end{aligned}$$

Mientras que para el estado inicial considerado (5.158):

$$\begin{aligned} |\Psi(0)\rangle &= \mathcal{N} \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle \left(|e\rangle \cos \frac{\gamma}{2} + |f\rangle e^{i\varphi} \sin \frac{\gamma}{2} \right) - \mathcal{N} C_0 |0\rangle |f\rangle e^{i\varphi} \sin(\gamma/2) \\ &= \mathcal{N} \left[\sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle |e\rangle \cos \frac{\gamma}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n |n\rangle |f\rangle e^{i\varphi} \sin \frac{\gamma}{2} \right] \quad (7.175) \\ &= \mathcal{N} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \frac{\gamma}{2} |n, e\rangle + \mathcal{N} \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\varphi} \sin \frac{\gamma}{2} C_{n+1} |n+1, f\rangle \end{aligned}$$

Igualando coeficiente a coeficiente se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} a_n^+ \cos \theta_n - a_n^- \sin \theta_n = \mathcal{N} \cos \frac{\gamma}{2} C_n \\ a_n^+ \sin \theta_n + a_n^- \cos \theta_n = \mathcal{N} \sin \frac{\gamma}{2} e^{i\varphi} C_{n+1} \end{cases}$$

Cuya solución es:

$$\begin{cases} a_n^+ = \mathcal{N}[C_n \cos \frac{\gamma}{2} \cos \theta_n + C_{n+1} e^{i\varphi} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \theta_n] \\ a_n^- = \mathcal{N}[-C_n \cos \frac{\gamma}{2} \sin \theta_n + C_{n+1} e^{i\varphi} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \theta_n] \end{cases}$$

También necesitaremos los cuadrados de sus módulos:

$$\begin{aligned} |a_n^+|^2 &= \mathcal{N}^2 [C_n \cos \frac{\gamma}{2} \cos \theta_n + C_{n+1} e^{i\varphi} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \theta_n] [C_n \cos \frac{\gamma}{2} \cos \theta_n + C_{n+1} e^{-i\varphi} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \theta_n] \\ &= \mathcal{N}^2 [C_n^2 \cos^2 \theta_n \cos^2 \frac{\gamma}{2} + C_{n+1}^2 \sin^2 \theta_n \sin^2 \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} C_n C_{n+1} \sin(2\theta_n) \sin \gamma \cos \varphi] \end{aligned} \quad (7.176)$$

$$\begin{aligned} |a_n^-|^2 &= \mathcal{N}^2 [C_n \cos \frac{\gamma}{2} \sin \theta_n + C_{n+1} e^{i\varphi} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \theta_n] [C_n \cos \frac{\gamma}{2} \sin \theta_n + C_{n+1} e^{-i\varphi} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \theta_n] \\ &= \mathcal{N}^2 [C_n^2 \sin^2 \theta_n \cos^2 \frac{\gamma}{2} + C_{n+1}^2 \cos^2 \theta_n \sin^2 \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} C_n C_{n+1} \sin(2\theta_n) \sin \gamma \cos \varphi] \end{aligned} \quad (7.177)$$

7.2. Expresiones generales para el operador densidad

7.2.1. Poblaciones

El operador densidad reducida del átomo se obtiene trazando en los grados de libertad del ambiente, es decir:

$$\rho_S = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \Psi(t) \rangle \langle \Psi(t) | n \rangle \quad (7.178)$$

Reemplazando (5.157) se obtiene para la primera población:

$$\begin{aligned} \rho_{S11}(t) &= \sum_{n'=0}^{\infty} \langle n', e | \{ \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^+ e^{-\frac{iE_+(n)t}{\hbar}} (\cos \theta_n |n, e\rangle + \sin \theta_n |n+1, f\rangle) \\ &\quad + a_n^- e^{-\frac{iE_-(n)t}{\hbar}} (\cos \theta_n |n+1, f\rangle - \sin \theta_n |n, e\rangle) \} [\sum_{m=0}^{\infty} (a_m^{+*} e^{\frac{iE_+(m)t}{\hbar}} (\cos \theta_m \langle m, e| + \sin \theta_m \langle m+1, f| \\ &\quad + a_m^{-*} e^{\frac{iE_-(m)t}{\hbar}} (\cos \theta_m \langle m+1, f| - \sin \theta_m \langle m, e|)) \} |n', e\rangle \\ &= \sum_{n'=0}^{\infty} \{ [a_n^+ e^{-\frac{iE_+(n')t}{\hbar}} \cos \theta_n - a_n^- \sin \theta_n e^{-\frac{iE_-(n')t}{\hbar}}] [a_n^{+*} e^{\frac{iE_+(n')t}{\hbar}} \cos \theta_n - a_n^{-*} \sin \theta_n e^{\frac{iE_-(n')t}{\hbar}}] \} \end{aligned} \quad (7.179)$$

Desarrollando se aprecia que la primer entrada del operador densidad reducida puede expresarse como suma dos términos, el primero independiente del tiempo que denotaremos (P_e):

$$P_e = \sum_{n'=0}^{\infty} \{ |a_n^+|^2 \cos^2 \theta_{n'} + |a_n^-|^2 \sin^2 \theta_{n'} \} \quad (7.180)$$

y el segundo, de comportamiento oscilatorio (λ):

$$\lambda(t) = \sum_{n'=0}^{\infty} \{ -\sin 2\theta_{n'} \Re [a_n^+ a_n^{-*} e^{-\frac{i(E_+(n') - E_-(n'))t}{\hbar}}] \} \quad (7.181)$$

En virtud de la condición de normalización, para la población ρ_{S22} se tendrá: $\rho_{S22} = 1 - \rho_{S11} = 1 - (P_e + \lambda(t))$.

7.2.2. Coherencias

$$\begin{aligned}
\rho_{S_{12}}(t) &= \sum_{n'=0}^{\infty} \langle n', e | \{ \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^+ e^{-\frac{iE_+(n)t}{\hbar}} (\cos \theta_n |n, e\rangle + \sin \theta_n |n+1, f\rangle) \\
&\quad + a_n^- e^{-\frac{iE_-(n)t}{\hbar}} (\cos \theta_n |n+1, f\rangle - \sin \theta_n |n, e\rangle) \} [\sum_{m=0}^{\infty} (a_m^{+*} e^{\frac{iE_+(m)t}{\hbar}} (\cos \theta_m \langle m, e| + \sin \theta_m \langle m+1, f| \\
&\quad + a_m^{-*} e^{\frac{iE_-(m)t}{\hbar}} (\cos \theta_m \langle m+1, f| - \sin \theta_m \langle m, e|)) \} |n', f\rangle \\
&= \sum_{n'=0}^{\infty} \{ [a_{n'}^+ e^{-\frac{iE_+(n')t}{\hbar}} \cos \theta_{n'} - a_{n'}^- \sin \theta_{n'} e^{-\frac{iE_-(n')t}{\hbar}}] [a_{n'-1}^{+*} e^{\frac{iE_+(n'-1)t}{\hbar}} \sin \theta_{n'-1} + a_{n'-1}^{-*} \cos \theta_{n'-1} e^{\frac{iE_-(n'-1)t}{\hbar}}] \}
\end{aligned} \tag{7.182}$$

7.3. Fotones con distribución uniforme

Consideremos la situación en que $C_n = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \forall n \leq N$, y 0 en otro caso.

Los coeficientes a_n^+ , a_n^- y sus módulos se escriben ($n \leq N-1$):

$$\begin{cases} a_n^+ = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{N+1}} [\cos \frac{\gamma}{2} \cos \theta_n + e^{i\varphi} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \theta_n] \\ a_n^- = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{N+1}} [-\cos \frac{\gamma}{2} \sin \theta_n + e^{i\varphi} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \theta_n] \\ |a_n^+|^2 = \frac{\mathcal{N}^2}{N+1} [\cos^2 \theta_n \cos^2 \frac{\gamma}{2} + \sin^2 \theta_n \sin^2 \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \sin 2\theta_n \sin \gamma \cos \varphi] \\ |a_n^-|^2 = \frac{\mathcal{N}^2}{N+1} [\sin^2 \theta_n \cos^2 \frac{\gamma}{2} + \cos^2 \theta_n \sin^2 \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \sin 2\theta_n \sin \gamma \cos \varphi] \end{cases}$$

mientras que para $n = N$:

$$\begin{cases} a_N^+ = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{N+1}} \cos \frac{\gamma}{2} \cos \theta_N \\ a_N^- = -\frac{\mathcal{N}}{\sqrt{N+1}} \cos \frac{\gamma}{2} \sin \theta_N \\ |a_N^+|^2 = \frac{\mathcal{N}^2}{N+1} \cos^2 \theta_n \cos^2 \frac{\gamma}{2} \\ |a_N^-|^2 = \frac{\mathcal{N}^2}{N+1} \sin^2 \theta_n \cos^2 \frac{\gamma}{2} \end{cases}$$

7.3.1. Poblaciones

El término independiente del tiempo P_e , en este caso adopta la forma:

$$\begin{aligned}
P_e &= \sum_{n'=0}^{N-1} \{|a_{n'}^+|^2 \cos^2 \theta_{n'} + |a_{n'}^-|^2 \sin^2 \theta_{n'}\} + \sum_{n'=N}^N \{|a_{n'}^+|^2 \cos^2 \theta_{n'} + |a_{n'}^-|^2 \sin^2 \theta_{n'}\} \\
&= \frac{\mathcal{N}^2}{N+1} \sum_{n'=0}^{N-1} \left\{ \left[\cos^4 \theta_n \cos^2 \frac{\gamma}{2} + \sin^2 \theta_n \cos^2 \theta_n \sin^2 \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \sin(2\theta_n) \cos^2 \theta_n \sin \gamma \cos \varphi \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\sin^4 \theta_n \cos^2 \frac{\gamma}{2} + \sin^2 \theta_n \cos^2 \theta_n \sin^2 \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \sin(2\theta_n) \sin^2 \theta_n \sin \gamma \cos \varphi \right] \right\} \\
&\quad + |a_N^+|^2 \cos^2 \theta_N + |a_N^-|^2 \sin^2 \theta_N \\
&= \frac{\mathcal{N}^2}{N+1} \sum_{n'=0}^{N-1} \left\{ (\sin^4 \theta_n + \cos^4 \theta_n) \cos^2 \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \sin(2\theta_n) (\cos^2 \theta_n - \sin^2 \theta_n) \sin \gamma \cos \varphi \right. \\
&\quad \left. + 2 \sin^2 \theta_n \cos^2 \theta_n \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right\} + |a_N^+|^2 \cos^2 \theta_N + |a_N^-|^2 \sin^2 \theta_N \\
&= \frac{\mathcal{N}^2}{N+1} \sum_{n'=0}^{N-1} \left\{ (1 - 2 \sin^2 \theta_n \cos^2 \theta_n) \cos^2 \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \sin(2\theta_n) \cos(2\theta_n) \sin \gamma \cos \varphi \right. \\
&\quad \left. + 2 \sin^2 \theta_n \cos^2 \theta_n \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right\} + |a_N^+|^2 \cos^2 \theta_N + |a_N^-|^2 \sin^2 \theta_N \\
&= \frac{\mathcal{N}^2}{N+1} \sum_{n'=0}^{N-1} \left\{ \cos^2 \frac{\gamma}{2} - 2 \sin^2 \theta_n \cos^2 \theta_n (\cos^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \sin(2\theta_n) \cos(2\theta_n) \sin \gamma \cos \varphi \right\} + |a_N^+|^2 \cos^2 \theta_N + |a_N^-|^2 \sin^2 \theta_N \\
&= \frac{\mathcal{N}^2}{N+1} \sum_{n'=0}^{N-1} \left\{ \cos^2 \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \sin^2(2\theta_n) \cos \gamma + \frac{1}{4} \sin(4\theta_n) \sin \gamma \cos \varphi \right\} \\
&\quad + |a_N^+|^2 \cos^2 \theta_N + |a_N^-|^2 \sin^2 \theta_N \\
&= \frac{\mathcal{N}^2}{N+1} \sum_{n'=0}^{N-1} \cos^2 \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \cos \gamma \frac{\mathcal{N}^2}{N+1} \sum_{n'=0}^{N-1} \sin^2(2\theta_n) + \frac{1}{4} \sin \gamma \cos \varphi \frac{\mathcal{N}^2}{N+1} \sum_{n'=0}^{N-1} \sin(4\theta_n) \\
&\quad + |a_N^+|^2 \cos^2 \theta_N + |a_N^-|^2 \sin^2 \theta_N
\end{aligned} \tag{7.183}$$

Recordando que $\tan(2\theta_n) = \frac{g\sqrt{n+1}}{\delta}$ se obtiene $\theta_n = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{g\sqrt{n+1}}{\delta}\right) = \frac{1}{2} \arctan(\varepsilon\sqrt{n+1})$, donde se ha definido $\varepsilon = g/\delta$. Calculemos entonces los cuatro sumandos S_1 , S_2 , S_3 y S_4 involucrados en (7.183) en el límite $N \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{\mathcal{N}^2}{N+1} \sum_{n'=0}^{N-1} \cos^2 \frac{\gamma}{2} \simeq \mathcal{N}^2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} \\
S_2 &= \frac{1}{2} \cos \gamma \frac{\mathcal{N}^2}{N+1} \sum_{n'=0}^{N-1} \sin^2(2\theta_n) = \frac{1}{2} \cos \gamma \frac{\mathcal{N}^2}{N+1} \sum_{n'=0}^{N-1} \sin^2 \arctan(\varepsilon\sqrt{n+1}) \simeq \frac{\mathcal{N}^2}{2} \cos \gamma \\
S_3 &= \frac{1}{4} \sin \gamma \cos \varphi \frac{\mathcal{N}^2}{N+1} \sum_{n'=0}^{N-1} \sin(4\theta_n) = \frac{1}{4} \sin \gamma \cos \varphi \frac{\mathcal{N}^2}{N+1} \sum_{n'=0}^{N-1} \sin(2 \arctan(\varepsilon\sqrt{n+1})) \simeq 0 \\
S_4 &= |a_N^+|^2 \cos^2 \theta_N + |a_N^-|^2 \sin^2 \theta_N = \frac{\mathcal{N}^2}{N} [\cos^2 \frac{\gamma}{2} \cos^4(\frac{1}{2} \arctan(\varepsilon\sqrt{n+1})) \\
&\quad + \cos^2 \frac{\gamma}{2} \sin^4(\frac{1}{2} \arctan(\varepsilon\sqrt{n+1}))] \simeq \frac{\mathcal{N}^2}{2(N+1)} \cos^2 \frac{\gamma}{2}
\end{aligned} \tag{7.184}$$

Obsérvese que el efecto de incluir muchos fotones en la distribución equivale, desde el punto de vista algebraico, tomar el límite $\varepsilon \rightarrow \infty$ ($\delta \rightarrow 0$), o sea, a estudiar el sistema bajo la condición de resonancia. Se obtiene entonces

$$\begin{aligned}
P_e &= \mathcal{N}^2 \left(\cos^2 \frac{\gamma}{2} - \frac{\cos(\gamma)}{2} + \frac{\cos^2 \frac{\gamma}{2}}{2(N+1)} \right) \\
&= \mathcal{N}^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos^2 \frac{\gamma}{2}}{2(N+1)} \right) \\
&= \left(1 - \frac{\sin^2(\gamma/2)}{N+1} \right)^{-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos^2 \frac{\gamma}{2}}{2(N+1)} \right) \\
&\simeq \left(1 + \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}{N+1} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos^2 \frac{\gamma}{2}}{2(N+1)} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2(N+1)} + \frac{\sin \gamma}{8(N+1)^2}
\end{aligned} \tag{7.185}$$

mientras que la parte oscilatoria es:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \sum_{n'=0}^{\infty} \left\{ -\sin(2\theta_{n'}) \Re[a_{n'}^+ a_{n'}^{-*} e^{-\frac{i(E_+(n')-E_-(n'))t}{\hbar}}] \right\} + \mathcal{O}(1/N) \\
&\simeq \frac{\mathcal{N}^2}{N+1} \sum_{n'=1}^{N-1} \left\{ -\sin(2\theta_{n'}) \Re \left\{ \left[\cos \frac{\gamma}{2} \cos \theta_n + e^{i\varphi} \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} \operatorname{sen} \theta_n \right] \left[-\cos \frac{\gamma}{2} \operatorname{sen} \theta_n + e^{-i\varphi} \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} \cos \theta_n \right] e^{-\frac{i\Delta E(n')t}{\hbar}} \right\} \right\} \\
&= \frac{\mathcal{N}^2}{N+1} \sum_{n'=0}^{N-1} -\sin(2\theta_{n'}) \Re \left\{ \left[\cos \theta_n \operatorname{sen} \theta_n \left(\operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2} - \cos^2 \frac{\gamma}{2} \right) + \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \left(\cos^2 \theta_n e^{-i\varphi} - \operatorname{sen}^2 \theta_n e^{i\varphi} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. e^{-\frac{i\Delta E(n')t}{\hbar}} \right\} \\
&= \frac{\mathcal{N}^2}{N+1} \sum_{n'=0}^{N-1} -\sin(2\theta_{n'}) \Re \left\{ \left[-\frac{\operatorname{sen}(2\theta_n)}{2} \cos \gamma + \frac{\operatorname{sen} \gamma}{2} \left(\cos^2 \theta_n e^{-i\varphi} - \operatorname{sen}^2 \theta_n e^{i\varphi} \right) \right] e^{-\frac{i\Delta E(n')t}{\hbar}} \right\} \\
&= \frac{\mathcal{N}^2}{N+1} \sum_{n'=0}^{N-1} -\sin(2\theta_{n'}) \Re \left\{ \left[-\frac{\operatorname{sen}(2\theta_n)}{2} \cos \gamma + \frac{\operatorname{sen} \gamma}{2} \left(\cos(2\theta_n) \cos \varphi - i \operatorname{sen} \varphi \right) \right] e^{-\frac{i\Delta E(n')t}{\hbar}} \right\} \\
&= \frac{\mathcal{N}^2}{2(N+1)} \sum_{n'=0}^{N-1} \left\{ \left[\operatorname{sen}^2(2\theta_{n'}) \cos \gamma - \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen}(2\theta_{n'}) \cos(2\theta_{n'}) \cos \varphi \right] \cos \left(\frac{\Delta E(n')t}{\hbar} \right) + \right. \\
&\quad \left. \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen}(2\theta_{n'}) \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \left(\frac{\Delta E(n')t}{\hbar} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{7.186}$$

que bajo la condición de resonancia se reduce a

$$\lambda(t) = \frac{\mathcal{N}^2}{2(N+1)} \left[\cos(\gamma) \sum_{n'=0}^{N-1} \cos(g\sqrt{n+1}t) + \operatorname{sen}(\gamma) \operatorname{sen}(\varphi) \sum_{n'=0}^{N-1} \operatorname{sen}(g\sqrt{n+1}t) \right] \tag{7.187}$$

Bibliografía

- [1] G. M. Palma, K. A. Suominen, A. K. Ekert. Quantum Computers and Dissipation. Proc. Roy. Soc. London Ser. A 452, 567, 1996.
- [2] M. Devoret. Quantum Fluctuations in Electrical Circuits. Les Houches LXIII, Elsevier, 1995.
- [3] M. Nielsen and I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, 2000
- [4] J. Loschmidt. Sitzungsber. Kais. Akad. Wiss. Wien, Math, Naturwiss. Classe 73, pp 128-142, 1876.
- [5] D. J. Searles, D. J. Evans. A fluctuation theorem for heat flow, Int. J. Thermophys. 22, 123, 2001.
- [6] G. E. Crooks. Path ensemble averages in systems driven far from equilibrium. Phys. Rev. E 61 2361, 2000.
- [7] D. Collin, F. Ritort, C. Jarzynski, S. B. Smith, I. Tinoco, C. Bustamante. Verification of the Crooks fluctuation theorem , recovery of RNA folding free energies, Nature 437, 231, 2005.
- [8] C. E. Shannon, The mathematical theory of communication, ed. by C. E. Shannon and W. Weaver, Univ of Illinois Press, 1949.
- [9] J. C. Maxwell, Letter to P. G. Tait, 11 December 1867 in Life and Scientific Work of Peter Guthrie Tait, C. G. Knott (ed.), Cambridge University Press, London, p.213, 1911.
- [10] R. Landauer. Irreversibility and heat generation in the computing process. IBM J. Res. Dev. 5, 183 ,1961.
- [11] A. Bérut et al. Experimental verification of Landauer’s principle linking information and thermodynamics. Nature 483, 187-189 , 2012.
- [12] E. Lubkin. Keeping the entropy of measurement: Szilard revisited. Int. J. Theor. Phys. 26, 523, 1987.
- [13] R. Kosloff, A. LevyQuantum. Quantum heat engines and refrigerators: Continuous devices. Annual Review of Physical Chemistry 65 pp. 365–393, 2014.
- [14] J. Roßnagel, O. Abah, F. Schmidt-Kaler, K. Singer, and E. Lutz. Nanoscale Heat Engine Beyond the Carnot Limit. Phys. Rev. Lett. 112, 030602 ,2014.
- [15] B. Travaglione, G. Milburn. Implementing the quantum random walk. Physical Review A, 65(3):032310, 2002.

- [16] A. Romanelli. Thermodynamic behavior of the quantum walk. *Phys. Rev. A*, 85, 012319 , 2012.
- [17] E.T. Jaynes and F.W. Cummings. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Procc. IEEE* **51** 89, 1963.
- [18] M. Horodecki, J. Oppenheim, R. Horodecki. Are the laws of entanglement theory thermodynamical? *Phys. Rev. Lett.* 89, 240403, 2002.
- [19] C. Gogolin and J. Eisert. Equilibration, thermalisation, and the emergence of statistical mechanics in closed quantum systems. *Reports on Progress in Physics* 79, p. 056001, 2016.
- [20] V. Yukalov. Equilibration and thermalization in finite quantum systems. *Laser Physics Letters* 8.7, 2011.
- [21] John von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Translated by R. T. Beyer, Princeton University Press, Princeton, 1955.
- [22] P. A. M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford, 1930.
- [23] R. P. Feynman. *Quantum mechanics, vol. 3, Lectures on Physics*. Addison Wesley Longman, 1970.
- [24] M. Schlosshauer, Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, Vol 76, 1267, 2004.
- [25] W. H. Zurek. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Reviews of Modern Physics*, Vol. 75, 2003.
- [26] Einstein A, Podolsky B, Rosen N. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Phys. Rev.* 47:777–780, 1935.
- [27] Bell J. On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. *Physics* 1:195–200, 1964.
- [28] Aspect A. Bell’s inequality test: more ideal than ever. *Nature* 398:189–90, 1999.
- [29] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters. Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein–Podolsky–Rosen Channels. *Phys. Rev. Lett.* 70, 1895–1899, 1993.
- [30] Bouwmeester, D.; et al.. Experimental quantum teleportation. *Nature*. 390: 575–579. Bibcode:1997Natur.390..575B. doi:10.1038/37539, 1997.
- [31] Hensen, B.; et al.. Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres. *Nature*. 526: 682–686. Bibcode:2015Natur.526..682H. doi:10.1038/nature15759. PMID 26503041, 2015.
- [32] Shor, P. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM J. Comput.* 26, 1484–1509, 1997.
- [33] G. Myhr. Measures of entanglement in quantum mechanics. Master’s thesis, NTNU, 2004.
- [34] Dahlsten, O. Renner, R. Rieper, E. , Vedral, V. Inadequacy of von Neumann entropy for characterizing extractable work. *New J. Phys.* 13, 053015, 2011.

- [35] Lanyon, B. P., C. Hempel, D. Nigg, M. Müller, R. Gerritsma, F. Zähringer, P. Schindler, J. T. Barreiro, M. Rambach, G. Kirchmair, M. Hennrich, P. Zoller, et al.. Universal digital quantum simulation with trapped ions. *Science*, 334,57-61, 2011.
- [36] Blatt, R., and C. F. Roos. Quantum simulations with trapped ions. *Nature Physics* 8, 277–284, 2012.
- [37] E. Knill, R. Laflamme, and G. J. Milburn. A scheme for efficient quantum computation with linear optics. *Nature*, 409 46, 2001.
- [38] A. Romanelli, R. Donangelo, R. Portugal, and F.L. Marquezino. Thermodynamics of N-Dimensional Quantum Walks. *Phys. Rev. A*, **90** 022329, 2014.
- [39] A. Romanelli, R. Donangelo, A. Vallejo. Relation between the usual and the entanglement temperature, in a simple quantum system. *Physica A - Statistical and Theoretical Physics*, v.: 437, p.: 471 - 478, 2015.
- [40] N. Díaz, R. Donangelo, R. Portugal, and A. Romanelli. Transient temperature and mixing times of quantum walks on cycles. *Physical Review A*, 94 (1):012305, 2016.
- [41] J. Gemmer, M. Michel, and G. Mahler, *Quantum Thermodynamics: The Emergence of Thermodynamical Behaviour within Composite Quantum Systems*. Springer Lecture Notes in Physics. Springer, 2004.
- [42] Renato Portugal. *Quantum walks and search algorithms*. Springer Science and Business Media, 2013.
- [43] L. Grover. A fast quantum mechanical algorithm for database search. *Proceedings of STOC'96*, pp. 212-219, quant-ph/9605043, 1996.
- [44] R. K. Pathria. *Statistical Mechanics* , second edition, ISBN 0 7506 2469 8, 1997.
- [45] E. T. Jaynes. Information Theory and Statistical Mechanics. *Physical Review* 106.4, 620–630, 1957.
- [46] S. Popescu, A. Short, A. Winter. Entanglement and the foundations of statistical mechanics. *Nature Physics* **2** 754 -758, 2006.
- [47] S. Goldstein, J. Lebowitz, R. Tumulka, and N. Zanghi. Canonical Typicality. *Phys.Rev.Lett.*, 96, 050403, 2006.
- [48] P. Skrzypczyk, A. J. Short, S. Popescu. Work extraction and thermodynamics for individual quantum systems. *Nat. Comm.* 5, 4185, 2014.
- [49] A. Nayak, A. Vishvanath. Quantum walk on the line. quant-ph/0010117, 2000.
- [50] G. Abal, R. Siri, A. Romanelli, and R. Donangelo. Quantum walk on the line: Entanglement and nonlocal initial conditions. *Physical Review A*, 73(4):042302, 2006.
- [51] B.W. Shore and P.L. Knight *J. Mod. Optics* **40** 1195, 1993.
- [52] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J.-M. Raimond, S. Haroche. Quantum Rabi Oscillation: A Direct Test of Field Quantization in a Cavity. *Physical Review Letters* 76 1800–1803, 1996.
- [53] M. Scully and M. Zubairy. *Quantum Optics*, Cambridge, 1997.

- [54] G. Rempe; H. Walther; N. Klein. Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser. *Phys. Rev. Lett.* 58 (4): 353–356, 1987.
- [55] Y. Takahashi, H. Umezawa. Thermo Field Dynamics. *Collective Phenomena* **2** 55, 1975.
- [56] H. Azuma, M. Ban. Thermal effects in Jaynes-Cummings model derived with low-temperature expansion. *Int. J. Mod. Phys. C* **22** 1015, 2011.
- [57] S. Goyal, B. Simon, R. Singh and S. Simon. Geometry of the generalized Bloch sphere for qutrits. [arXiv:1111.4427v1](https://arxiv.org/abs/1111.4427v1), 2011.