



Universidad de la República
Facultad de Ciencias Sociales
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

Documentos de trabajo

Modelos económicos con múltiples regímenes

J. G. Brida

Documento No. 16/00
Diciembre, 2000



Modelos económicos con múltiples regímenes

Juan Gabriel Brida
Octubre de 2000

Introducción

Atendiendo al peso decisivo de diferentes factores en la determinación de la dinámica de cada economía particular, la teoría económica explica la dinámica de manera diversa. Así por ejemplo, economías con diferentes grados de poder de mercado, pueden dar lugar a conductas dinámicas muy distintas, aún cuando cada una de ellas no sea más que un caso particular de una economía oligopolizada. Análogamente, economías que hayan desarrollado tecnologías diferentes pueden dar lugar a comportamientos dinámicos distintos aún cuando todas ellas no sean más que una expresión particular de la economía de mercado. En este trabajo nos interesa estudiar la dinámica que describe la transición de una manifestación particular a otra.

Si definimos un régimen económico como una conducta dinámica cualitativa que puede ser claramente distinguida de otras conductas (llamadas también regímenes), entonces una economía ideal debería representarse con un modelo que admita múltiples regímenes. En este tipo de modelo pueden ser distinguidas dos dinámicas, una interna de cada régimen y otra de cambio de régimen. La primera puede ser vista como un modelo local de la economía cuando esta ocupa un determinado régimen y es, en cierto sentido, una dinámica “puntual” a la que a la hora de estudiar sus propiedades pueden ser aplicados los métodos tradicionales. Por otro lado, la dinámica de cambio de régimen puede ser interpretada como un cambio estructural en la economía ya que lo que cambia es el modelo que la representa. Es claro que esta dinámica tiene como dominio un conjunto discreto (el conjunto de los regímenes que puede ocupar la economía) y en este trabajo intentaremos introducir un método para representarla. Este método está estrechamente relacionado con una rama de la teoría de los sistemas dinámicos llamada dinámica simbólica.

Ya que el concepto de régimen económico aparece reiteradamente y con varias acepciones en la literatura económica, empezaremos este artículo (sección 1) haciendo una revisión de algunos trabajos relevantes en la literatura económica en los que el concepto de régimen juega un papel importante para poder unificar criterios y obtener una definición coherente y general. Luego de esta revisión, en la sección 2 propondremos una definición formal de régimen económico que intente capturar las distintas acepciones del término. A partir de esta definición, hacemos una reformulación de los conceptos dinámicos más importantes en términos de la dinámica de cambio de regímenes y presentamos la simbolización como método de representación de dicha dinámica. Finalmente, en la sección 3 presentamos un ejemplo ilustrativo de la utilización del método para un modelo con dos regímenes donde la dinámica de cambio de regímenes es representable mediante un grafo dirigido. Este trabajo tiene como antecedentes un trabajo conjunto (Brida, Puchet y Punzo (2000)) en el que se reinterpreta una parte importante de la historia de las teorías del ciclo económico mediante modelos con múltiples regímenes¹ y varios trabajos de Punzo (Punzo (1995, 1996, 1997), Punzo y Böhm (1992, 1994, 1997, 1998), Punzo, Abraham y Hotton, (1996)) acerca del cambio económico estructural y métodos en dinámica económica.

¹ En este trabajo ya aparece la idea de usar la codificación en la representación de los regímenes económicos.

1. El concepto de régimen económico

El término *régimen* tiene una larga historia en la literatura económica. Ha sido usado implícita o explícitamente en forma extensiva en varias áreas refiriéndose no solamente a aspectos metodológicos sino también analíticos, de política económica, etc. A pesar del uso extensivo del término, este no está bien definido y no significa lo mismo para los distintos autores que lo utilizan. Desde el punto de vista intuitivo, un régimen es una conducta económica cualitativamente distinta de otras conductas económicas también llamadas regímenes. Un ejemplo cotidiano de regímenes económicos lo podemos tener en la separación de las economías de acuerdo a los niveles de inflación que presentan en régimen de inflación controlada, régimen de deflación, régimen de inflación elevada, etc. Es claro que una economía puede pasar por estos distintos regímenes de inflación y que sus mecanismos de funcionamiento cambian al cambiar la economía de régimen. Entonces, para poder establecer un modelo global de una economía (con respecto a la variable inflación en este caso), uno tiene que pensar en un modelo que pueda ser descompuesto en distintos modelos locales, cada uno de estos representando un régimen de la economía. Es claro que interesa conocer el modelo global pero nosotros nos concentraremos en la modelización de los cambios de régimen, es decir en cuáles son las reglas de cambio del modelo local.

Desde el punto de vista económico, un régimen está caracterizado por un conjunto de reglas e instituciones que representan la economía y generan su conducta dinámica cualitativa. Por lo tanto, un cambio de régimen se asocia con un cambio en ese conjunto de reglas e instituciones. Desde el punto de vista matemático, hay un cambio de régimen cuando cambia la naturaleza de una ecuación. Los cambios de régimen pueden ser continuos o discontinuos y muy frecuentemente están asociados a shocks, valores umbrales, bifurcaciones o puntos de cambio en la economía. El mecanismo que causa los cambios de régimen puede ser endógeno o exógeno, siendo la primera de estas posibilidades la perspectiva que tendremos en este trabajo. Los cambios de régimen pueden ser reversibles o irreversibles, pero sólo los cambios reversibles tienen interés a la hora de entender las relaciones entre las fluctuaciones de las variables económicas y los cambios de régimen. La idea de cambio de régimen entre sucesivos períodos de expansión y contracción en la dinámica del ciclo económico es también relevante en la prensa popular donde lo que interesa es identificar y predecir los puntos de cambio en la actividad económica.²

Los modelos económicos con múltiples regímenes seguramente recibieron su primera versión sofisticada en los trabajos de Georgescu-Roegen (1951), en el que estudió los fenómenos de oscilaciones de relajación en modelos económicos lineales. El autor atribuye a Le Corbeiller (1933) la idea de que las oscilaciones de relajación (introducidas por van der Pole en la literatura matemática) pueden ser usadas para representar los ciclos económicos en un modelo con dos regímenes. En particular, el autor afirma que la propiedad de periodicidad asimétrica que se encuentra en los fenómenos de oscilaciones de relajación es fundamental para capturar los ciclos económicos, tratados hasta ese momento como un fenómeno periódico. En los fenómenos de oscilaciones de relajación uno puede distinguir dos regímenes distintos que dan lugar a dos fases diferentes en la dinámica del modelo. Estos fenómenos son un caso particular de modelos con dos regímenes, donde el cambio de régimen es debido a

² Un ejemplo bien conocido es el chartismo.

una discontinuidad en la función que genera la dinámica.³ Estos puntos de vista de Georgescu-Roegen acerca de los ciclos económicos inspiraron a Goodwin (1951) y Leontief (1953), pero, fuera de estas contribuciones, la posibilidad del uso de las oscilaciones de relajación como modelo de los ciclos económicos fue casi abandonada en la literatura teórica moderna.

Para muchos historiadores de la economía, el crecimiento económico debería ser descrito en términos de *estadios de desarrollo*. Para estos, las economías han pasado a través de las épocas históricas con muy diferentes estructuras caracterizadas por distintas tecnologías, modos de producción y organizaciones sociales. Es entonces que en este ámbito, las ideas de régimen y cambio de régimen aparecen en modo natural relacionadas a los estadios de desarrollo. Estos estadios cambian con el tiempo dando lugar a distintas estructuras con diferencias cualitativas en sus conductas dinámicas.⁴ Esto es, el desarrollo económico involucra cambios no sólo en los niveles de las variables sino también cambios en el modo en que la economía funciona. Estos cambios pueden incluir modificaciones en las tecnologías, la emergencia de nuevas instituciones socioeconómicas, la utilización de nuevos recursos, cambios en los gustos y preferencias del consumidor, etc. Todos estos cambios introducen una modificación cualitativa en la conducta dinámica de la economía. La literatura en desarrollo económico contiene descripciones de varios aspectos del proceso de cambio de régimen asociados al cambio estructural. Conceptos como el “big push” (Rosenstein-Rodan, 1943), el “crecimiento no balanceado” (Streeten, 1959), las “trampas de pobreza” (Nurkse, 1953) o las “economías duales” (Lewis, 1954) están todos conectados con un cierto tipo de cambio de régimen en el sistema económico. Integrando la teoría económica con la historia, en su libro *The Stages of Economic Growth* (Rostow (1960)), Walt W. Rostow presenta una clasificación de los sistemas económicos en cinco categorías (o regímenes), cada una de ellas con su propia conducta dinámica, donde cada economía puede pasar por estos regímenes en forma ascendente a lo largo de su historia. Es claro que en la visión de Rostow los cambios de régimen son irreversibles y además están dados en un cierto orden y el escenario parece ser mucho más complejo de lo que sostienen los economistas del desarrollo.

Genéricamente, los modelos con múltiples regímenes se pueden caracterizar por la presencia de múltiples equilibrios, al menos uno por cada régimen y, recíprocamente, muchas veces es útil interpretar un modelo con múltiples equilibrios como un modelo que puede exhibir múltiples regímenes. Sabemos que en los modelos económicos de última generación, la presencia de múltiples equilibrios⁵ es una propiedad genérica. Por ejemplo, los modelos macroeconómicos donde hay fallas de coordinación, spillovers y complementariedades estratégicas pueden producir múltiples equilibrios.⁶ En gran parte de esta literatura, los equilibrios son Pareto-ordenables y uno de los problemas es el de encontrar mecanismos que permitan pasar de un equilibrio a otro. Generalmente los

³ “The difference between up and down swings is created by a certain discontinuity in the regime. Such a discontinuity will introduce a discontinuity of the movement (at least in size or in direction). Therefore the movements related to each phase will be described by a different function.” (Georgescu-Roegen, (1951, p.117).

⁴ Siguiendo a Schumpeter, podemos distinguir entre crecimiento, explícitamente definido como un fenómeno cuantitativo, y desarrollo, un “cambio discontinuo que viene desde el interno del proceso económico a causa de la naturaleza del proceso” (Georgescu-Roegen 1976, p. 245).

⁵ Generalmente son dos equilibrios llamados “alto” y “bajo”, “bueno” y “malo”, etc.

⁶ En Diamond (1982), Cooper and John (1988) y Howitt (1985) hay ejemplos de economías que presentan estas propiedades.

cambios de equilibrio se deben a shocks y muchas veces son modelados mediante procesos de Markov.⁷ De manera similar en los modelos de equilibrio general, dependiendo de la distribución de las dotaciones iniciales, un mismo modelo económico puede presentar diferente cantidad de equilibrios lo que implica comportamientos diferenciados en el modelo obtenidos a partir de modificaciones en los parámetros fundamentales de la economía.⁸ Es de destacar que, como sucede en los otros modelos con múltiples equilibrios, en este caso no es clara la dinámica de transición entre los diferentes estados definidos mediante la cantidad de equilibrios.

La noción de régimen económico ha sido también introducida en la nueva literatura empírica en crecimiento económico⁹ en referencia al problema de la convergencia por S.N. Durlauf, P.A. Johnson y D. Quah entre otros autores. Típicamente los modelos teóricos del crecimiento económico analizan la conducta dinámica de una única economía nacional representativa pero, si analizamos las experiencias históricas observadas en las economías nacionales durante el siglo XX, vemos que no hay evidencia para el uso de una única economía nacional representativa. Es bien conocido el resultado de que el modelo neoclásico de crecimiento implica la convergencia (bajo ciertas hipótesis standard) de todas las economías nacionales hacia un único valor de equilibrio de largo período de la tasa de crecimiento del output per cápita independientemente del nivel inicial del output. La nueva literatura en crecimiento económico ha presentado evidencia en la persistente divergencia en la tasa de crecimiento del output per cápita en las distintas economías nacionales y ha estudiado como diferentes hipótesis económicas implican diferentes conductas en las trayectorias temporales del output per cápita. Esta persistente divergencia ha sido interpretada con la posibilidad de que existan distintos “clubs” (o regímenes, para ponerlo en nuestro lenguaje) de convergencia caracterizados por distintas tasas de crecimiento de equilibrio donde el conjunto de economías nacionales puede ser dividido en los distintos regímenes de convergencia.¹⁰ Esta evidencia es particularmente compatible con modelos de crecimiento que presentan múltiples equilibrios, con modelos de crecimiento donde la no convexidad puede producir múltiples equilibrios que son localmente estables.¹¹

A partir del rol de las expectativas de los agentes de un sistema económico, Leijonhufvud (1987) introduce el concepto de régimen monetario. Al tomar decisiones,

⁷ Para un ejemplo, ver Howitt and MacAfee (1992) y Aoki (1996).

⁸ Ver, por ejemplo, Accinelli (2000).

⁹ Para una revisión de trabajos reciente de investigación empírica sobre el problema de la convergencia en el crecimiento económico ver Durlauf and Quah (1998).

¹⁰ Contrariamente al modelo lineal que se utiliza comunmente para estudiar el crecimiento económico, Durlauf y Johnson (1995) presentan un modelo de crecimiento con múltiples regímenes donde las diferentes economías son representadas con diferentes modelos lineales cuando son agrupadas de acuerdo a los valores iniciales del output per cápita. En este trabajo, los autores encuentran evidencia para la existencia de múltiples regímenes en la dinámica de crecimiento en el sentido de que subgrupos de economías identificadas por las condiciones iniciales obedecen a distintas regresiones del tipo de Solow.

¹¹ Ver Azariadis and Drazen (1990) para un modelo de este tipo. La conducta dinámica de crecimiento en este modelo es típicamente no lineal donde economías asociadas al mismo equilibrio obedecen a una regresión lineal común. Los modelos de este tipo presentan “trampa de pobreza”, donde economías con un nivel de output inicial bajo convergen a un nivel de equilibrio bajo y economías con un nivel inicial alto convergen a un equilibrio alto. Quah (1996) obtiene también evidencia de múltiples regímenes de crecimiento en el modelo de Galor y Zeira (1993). Aquí el modelo tiene una única ley dinámica no lineal que tiene dos equilibrios localmente estables y las economías convergen hacia uno de estos: las economías “ricas” convergen hacia el nivel alto y las pobres hacia el nivel bajo.

los agentes se forman expectativas acerca del futuro y estas pueden influenciar la trayectoria dinámica del sistema generando fluctuaciones, equilibrios múltiples, etc. Luego, distintos estados de expectativas dan lugar a distintos regímenes del sistema.¹² La noción de régimen está también relacionada al concepto de “corredor de estabilidad” de Leijonhufvud¹³: la estabilidad de una economía de mercado no se ve perturbada cuando el sistema es afectado por shocks suficientemente pequeños (tan pequeños de dejar la economía en el mismo régimen que ocupa actualmente) y tendremos inestabilidad cuando los shocks son suficientemente grandes para sacar la economía del régimen al que pertenece.¹⁴ Podemos entonces identificar diferentes regímenes en un sistema económico con diferentes corredores de estabilidad que corresponden a distintos estados de las expectativas de los agentes y, de acuerdo con esto, tendremos un cambio de régimen cuando los shocks sean suficientemente grandes.

No es sorprendente que el concepto de régimen aparezca naturalmente en el campo de las teorías del desequilibrio. Malinvaud (1977, 1980) considera la existencia de diferentes regímenes en la economía que están asociados a diferentes regiones del espacio de precios y salarios. El modelo macroeconómico desarrollado en estos trabajos consiste en firmas y agentes que interactúan en dos mercados: bienes y trabajo. Los precios de los bienes y de los salarios son rígidos y por lo tanto la demanda y la oferta agregadas no son necesariamente iguales. El modelo contiene múltiples regímenes e interpreta la evolución económica como un continuo cambio de regímenes. Cada régimen está basado en un análisis económico completo y representa un modelo de situación que puede ser observada por un determinado período de tiempo. En el análisis impostado por las teorías del desequilibrio uno supone que hay un cambio en las ecuaciones de precios y salarios de acuerdo a la naturaleza del desempleo: se pueden identificar los tipos de equilibrio Keynesiano, clásico y de inflación reprimida de acuerdo a las diferentes ecuaciones de precios y salarios. Entonces cada equilibrio corresponde a un régimen diferente del modelo. La figura 1 ilustra la partición en regímenes del espacio de precios y salarios. El punto de intersección de las dos curvas es el equilibrio walrasiano.

¹² Como sostiene el autor, “the concept of monetary regime figures prominently in the recent rational expectations literature. Elsewhere, I have used the following two-part definition of it: a monetary regime is a system of expectations that governs the behavior of the public and that is sustained by the consistent behavior on the policy-making authorities.” (Leijonhufvud (1987, p. 44).

¹³ Ver *Effective demand failures*, capítulo 6 en Leijonhufvud (1981).

¹⁴ En Leijonhufvud (1981, pag. 109-110), el autor presenta la noción de corredor dinámico en la construcción de una tercera “cosmología” económica entre Neoclasicismo y Keynesianismo en el modo siguiente: “The system is likely to behave differently for large than for moderate displacements from the full coordination time path. Within some range from the path (referred to as “the corridor” for brevity), the system’s homeostatic mechanisms work well, and deviation-counteracting tendencies increase in strength. Outside that range these tendencies become weaker as the system becomes increasingly subject to “effective demand failures”. If the system is displaced sufficiently “far out”, the forces tending to bring it back may, on balance, be so weak and sluggish that –for the practical purposes- the Keynesian “unemployment equilibrium model is as sensible a representation of its state as economic static’s will allow. Inside the corridor, multiplier-repercussions are weak, and dominated by neoclassical market adjustments; outside the corridor, they should be strong enough for effects of shocks to the prevailing state to be endogenously amplified. Up to a point, multiplier-coefficients are expected to increase with distance from the ideal path. Within the corridor, the presumption is in favor of “monetarist”, outside in favor of “fiscalist” policy prescriptions. Finally, although within the corridor market forces will be acting in the direction of clearing markets, institutional obstacles of the type familiar from the conventional Keynesian literature may, of course, intervene to make them ineffective at some point. Thus, a combination of monopolistic wage setting in unionized occupations and legal minimum-wage restrictions could obviously cut the automatic adjustment process short before “equilibrium employment” is reached.”

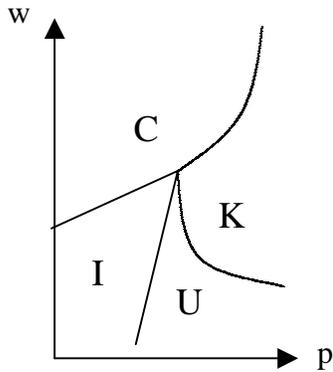


Figura 1: Regímenes en el modelo de Malinvaud.

La partición en regímenes del espacio de precios y salarios depende de las distintas constelaciones de exceso de oferta y demanda en los mercados de precios y bienes

K = Régimen Keynesiano

C = Régimen de desempleo clásico

I = Régimen de inflación reprimida

U = Régimen de bajo consumo

Cuando hay Exceso de oferta en los dos mercados, la economía está en el régimen Keynesiano. Cuando hay exceso de oferta en el mercado del trabajo y de demanda en el mercado de bienes estamos en presencia del régimen de desempleo clásico y el régimen de inflación reprimida se da cuando la demanda excede a la oferta en ambos mercados. Para completar la partición del espacio se introduce un cuarto régimen (que se da cuando hay exceso de demanda en el mercado de trabajo y de oferta en el mercado de bienes y es raramente observable) llamado de bajo consumo. El modelo de Malinvaud es estático pero trabajos posteriores (como por ejemplo Blad (1981), Blad and Zeeman (1982), Honkopolhja and Ito (1983) e Ito (1980)) introducen la dinámica en el sistema. Estos trabajos discuten la estabilidad del equilibrio walrasiano pero no presentan una descripción explícita de la dinámica de pasaje de un régimen a otro.

El término régimen se hizo notorio en la literatura económica a partir de los trabajos de Lucas. En la crítica de Lucas se argumenta que los parámetros macroeconómicos no son invariantes a cambios en los regímenes políticos y por lo tanto la estimación econométrica no es eficiente para calcular el impacto de los cambios políticos. Lucas argumenta que la inestabilidad de los parámetros puede ser explicada por un cambio en las expectativas de los agentes en respuesta a cambios en el régimen político.¹⁵ De acuerdo a esto, los parámetros de las ecuaciones estimados a nivel macro son inestables debido a los posibles cambios en el ambiente y, si hay cambios, la forma reducida de los parámetros no es más fiable. Una de las víctimas de la crítica de Lucas es la curva de Phillips, cuyos parámetros dependen del régimen monetario. Esto dió lugar no sólo al abandono de la curva de Phillips sino también a una nueva explicación exógena del ciclo económico. Pero esta no es la única alternativa; estos cambios en el ambiente pueden ser también representados con modelos del ciclo económico endógenos (o mixtos) con múltiples regímenes.¹⁶

Para finalizar esta revisión, vamos a analizar los diferentes usos y definiciones del concepto de régimen que aparecen en la literatura econométrica. Los movimientos entre las variables económicas (esto es, un gran número de variables que

¹⁵ Como puede verse en la siguiente argumentación: “given that the structure of an econometric model consists of optimal decision rules of economic agents, and that optimal decision rules vary systematically with changes in the structure of series relevant to the decision maker, it follows that any change in policy will systematically alter the structure of econometric models” (Lucas, (1976, p. 184).

¹⁶ Ver Brida (2000 c).

cambian conjuntamente) y la división en estados separados (o regímenes) son dos propiedades clave para cualquier investigador del ciclo económico empíricamente orientado, pero, gran parte de la literatura econométrica trabaja con una estructura lineal del ciclo económico y esta perspectiva le impide capturar los comovimientos y regímenes. Los trabajos de Quandt (1958) y Goldfeld y Quandt (1973) son pioneros en la introducción del concepto de régimen y cambio de régimen. En estos se presentan métodos para encontrar puntos de cambio en una regresión lineal que obedece a dos regímenes distintos, donde el proceso de cambio de régimen se representa mediante una cadena de Markov. Un trabajo reciente que presenta un modelo econométrico de cambio de régimen es Hamilton (1989). En este modelo hay dos regímenes y estos son tratados como distintos objetos probabilísticos donde nuevamente la transición entre los regímenes esta gobernada por un proceso de Markov.¹⁷ Otra clase de modelos econométricos de cambio de regimen son los “threshold autoregressive models” (TAR)¹⁸ que son una linearización a trozos de modelos no lineales en el espacio de los estados por intermedio de la introducción de un cierto conjunto de valores umbrales. En todos los modelos econométricos que hemos señalado un régimen es considerado como un objeto probabilístico representando “episodios en los cuales la conducta dinámica de la serie temporal es marcadamente diferente” (Hamilton (1989, p. 358)) y el cambio de régimen tiene una explicación exógena como un proceso de Markov.

2. Definición formal de régimen. Modelos con múltiples regímenes

En esta sección intentaremos formalizar las ideas expuestas en la sección anterior rescatando lo esencial de los distintos conceptos de régimen que aparecen en la literatura y para esto empezaremos por definir que es lo que entendemos por régimen y por modelo con múltiples regímenes. La idea central es que en estos modelos el espacio de los estados de la economía puede ser dividido en subconjuntos de acuerdo a la conducta dinámica que se presenta en cada uno de ellos. Cada uno de estos subconjuntos con su correspondiente dinámica es un régimen. Nuestra definición la daremos en el caso en que la dinámica de la economía es determinística y a tiempo discreto pero es fácilmente adaptable al caso continuo y/o con una componente estocástica.

Definición: Si M es un espacio métrico, $(M_i)_{i \in I}$ es una partición de M y $\{f_i: M_i \rightarrow M, i \in I\}$ es una familia de funciones, entonces cada par $R_i = (f_i, M_i)$ es un *régimen*. La dinámica en el interior de un región M_i está dada por la ecuación en diferencias

$$x_{t+1} = f_i(x_t), x_t \in M_i.$$

y la dinámica global del modelo con múltiples regímenes esta dada por el sistema dinámico (f, M) con dominio M y donde f es tal que $f(x) = f_i(x)$, si $x \in M_i$. Esto es, la dinámica en M está dada por la ecuación en diferencias

$$x_{t+1} = f(x) = f_i(x), x \in M_i.$$

¹⁷ Neftci (1982) presenta un modelo similar donde hay dependencia temporal de las probabilidades de transición, a diferencia del modelo de Hamilton donde las probabilidades de transición son independientes del tiempo.

¹⁸ Ver Tong (1983), Tong and Lim (1980) y Potter (1995).

Recíprocamente, si el dominio M de un sistema dinámico (f, M) se puede dividir en una familia de subconjuntos que no se solapan $(M_i)_{i \in I}$, en el interior de cada uno de los cuales la conducta dinámica puede ser considerada diferente, entonces podemos definir un régimen mediante el par $R_i := (f_i, M_i)$. Nótese que estas descomposiciones en general no son únicas y los criterios para hacer la división pueden ser económicos, matemáticos, estadísticos, etc.

La definición que hemos dado refleja el hecho de que distintos regímenes están representados con diferentes modelos locales. Para ser interesante, una partición tiene que tener por lo menos dos regímenes y estos no deben ser invariantes, permitiendo el pasaje de uno a otro régimen.¹⁹ En nuestra concepción, un régimen es entendido como una forma local de un modelo global y por lo tanto un modelo con múltiples regímenes debe ser visto como un hipermodelo o modelo de modelos. Tenemos entonces que en los modelos con múltiples regímenes, aún en el caso en que la dinámica interna de cada régimen sea lineal, deben ser siempre modelos no lineales.

En los sistemas dinámicos con múltiples regímenes podemos distinguir dos tipos de dinámica: una interior de cada régimen y una de pasaje entre regímenes. La primera (cuantitativa) representa la conducta dinámica de cada régimen y la segunda (cualitativa) formaliza el cambio de regímenes. Estamos interesados en la segunda dinámica, que llamamos *dinámica de regímenes* y representa una cierta forma de cambio estructural en la economía pues lo que cambia es el modelo local.

A este punto podemos presentar nuestro método de representación de la dinámica de regímenes mediante la codificación de los distintos regímenes del modelo. Cada trayectoria de un sistema dinámico con múltiples regímenes puede ser representado por la sucesión de regímenes por los que pasa; esto es, podemos olvidar los valores que toma y sustituirlos por el correspondiente régimen. Si definimos, por ejemplo, el índice de regímenes para un estado dado mediante la función:

$$\pi : M \rightarrow I \text{ con } \pi(x) = i \text{ si y sólo si } x \in M_i,$$

donde I es el conjunto de índices que simbolizan los regímenes, entonces la sucesión simbólica

$$(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}} = (\pi(f^n(x)))_{n \in \mathbb{N}}$$

nos da la dinámica del sistema como una sucesión de regímenes. O sea que lo que hacemos es etiquetar cada régimen con un símbolo²⁰ y, teniendo en cuenta la región en la que está el sistema para cada tick del reloj, podemos traducir la trayectoria puntual en una sucesión simbólica. Para cada órbita del sistema original obtenemos una sucesión de símbolos y es claro que dos órbitas distintas podrían estar representadas por la misma sucesión simbólica (este es el caso cuando dos trayectorias puntuales visitan exactamente los mismos regímenes contemporáneamente). Tenemos entonces un sistema dinámico simbólico que reproduce la conducta del sistema original en una versión simplificada pero que es adecuada para la representación de la dinámica de regímenes. En el sistema dinámico simbólico el espacio está formado por sucesiones de símbolos del alfabeto (que es un espacio métrico donde dos sucesiones están “cerca” si

¹⁹ Decimos que un régimen es invariante si toda trayectoria que entra en su dominio, permanece allí.

²⁰ El conjunto A de los símbolos usados para etiquetar los regímenes se llama *alfabeto*.

coinciden en un bloque inicial de símbolos “suficientemente grande”) y la dinámica esta dada por la función shift (representada con σ) que mueve cada símbolo una posición hacia la izquierda (o, dicho de otra manera, que suprime el primer símbolo). La riqueza de la dinámica de este sistema no depende de las propiedades topológicas del espacio ni de la definición de la función shift sino de las reglas que permiten decidir si una determinada sucesión simbólica es generada o no por una trayectoria particular. En algunos casos estas reglas pueden ser especificadas mediante grafos dirigidos que tienen como vértices los símbolos del alfabeto o mediante matrices (que son las matrices adyacentes a los grafos). Al grafo dirigido que especifica las posibles sucesiones simbólicas del sistema se le llama grafo de transición y en este grafo toda caminata infinita es una sucesión del sistema.

Un ejemplo sencillo de esta representación se puede dar con el shift total en n símbolos: si A es un alfabeto con n símbolos, el conjunto de todas las sucesiones simbólicas definidas en A se llama el espacio shift total y se representa por $A^{\mathbb{N}}$. El sistema dinámico $(\sigma, A^{\mathbb{N}})$ se llama shift total y podemos pensar las órbitas de este sistema como todas las caminatas infinitas en el grafo dirigido que tiene como vértices los símbolos del alfabeto A y está totalmente conectado (es decir que hay una flecha desde i hacia j para todo par de símbolos $i, j \in A$). En la figura 2 hemos representado el grafo de transición y la matriz adyacente que especifican las sucesiones simbólicas que pertenecen al shift total con dos símbolos.

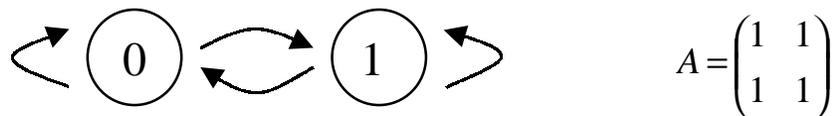


Figura 2: Grafo de transición y matriz de adyacencia que representan el shift total con alfabeto $A=\{0,1\}$.

La presencia en el grafo de una flecha desde i hacia j indica que en una sucesión del espacio el símbolo j puede seguir al i y la ausencia de esta flecha indica que en las sucesiones del espacio el símbolo j no puede seguir al i . Un cero en la entrada ij de la matriz significa que no hay una flecha desde i hacia j en el grafo y un uno significa que hay una flecha desde i hacia j .

Otra variedad importante de espacios de sucesiones simbólicas que se pueden representar mediante grafos dirigidos son los shifts de tipo finito. Para introducir este tipo particular de shifts, debemos dar algunas definiciones previas que pasamos a detallar. Dada una sucesión $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida en el alfabeto A y una sucesión finita (llamada palabra) de símbolos de A , decimos que w ocurre en s si existen índices i y j tales que $w = s_i s_{i+1} \dots s_j$. Si P es un conjunto finito de palabras de A , llamamos espacio shift de palabras prohibidas P (y lo denotamos por X_P) al conjunto de todas las sucesiones simbólicas definidas en A en las que no ocurren las palabras de P . No vamos aquí a indicar como se pueden especificar mediante grafos dirigidos las sucesiones que pertenecen a un shift de tipo en un caso general;²¹ solamente presentamos un ejemplo que ilustra el caso en que P esta formado por palabras de dos símbolos.

²¹ Esto requeriría una exposición técnica y extensa que esta fuera de los objetivos introductorios al método de representación de la dinámica de regímenes de este artículo. El lector interesado puede consultar los libros Adler (1998) y Lind y Marcus, (1995) para una exposición detallada de la teoría de los sistemas dinámicos simbólicos y la representación de shifts de tipo finito. Los libros de Devaney

Ejemplo: El shift de *Fibonacci* es el conjunto de las sucesiones binarias en que no hay dos 1 seguidos; o sea es el espacio shift de tipo finito X_P en el alfabeto $A=\{0,1\}$ con conjunto de palabras prohibidas $P = \{11\}$.²² Las sucesiones que pertenecen a X_P pueden ser especificadas mediante el grafo dirigido de la figura 3.



Figura 3: Grafo de transición y matriz adyacente que representan al shift de Fibonacci.

Para cada caminata infinita en este grafo existe una sucesión del shift de Fibonacci que satisface la sucesión de símbolos determinada por la caminata y recíprocamente. La construcción del grafo de transición para el caso de un shift de tipo finito definido en el alfabeto de n símbolos $A=\{1, 2, \dots, n\}$ con conjunto de palabras prohibidas P de dos símbolos se hace mediante la siguiente regla: si la palabra ij es permitida entonces hay una flecha del vértice i al j y si la palabra ij es prohibida entonces no hay una flecha del vértice i al j . La matriz adyacente se construye del modo siguiente: un cero en la entrada ij de la matriz significa que no hay una flecha desde i hacia j en el grafo y un uno significa que hay una flecha desde i hacia j . En los casos en que el espacio de las sucesiones simbólicas se pueden representar por grafos y matrices, las propiedades dinámicas del cambio de régimen del sistema se ven reflejadas en propiedades algebraicas del grafo o la matriz.²³ Esto simplifica mucho el estudio de las propiedades dinámicas del sistema y permite, por ejemplo, calcular la entropía topológica del sistema mediante técnicas sencillas. La entropía del sistema mide la complejidad del mismo y desde el punto de vista económico cuanto mayor es el nivel de entropía, menor es la capacidad de predicción del régimen particular en el que el hipermodelo se va a encontrar en el futuro.

Cuando tenemos un modelo cuya dinámica de regímenes esta representada simbólicamente, la evolución y las propiedades de recurrencia del sistema original son reflejadas por propiedades análogas de su trayectoria simbólica.²⁴ A partir de esta representación podemos redefinir todos los conceptos dinámicos en términos de la dinámica de regímenes: régimen de equilibrio, periodicidad en los regímenes, etc. Por ejemplo, podemos decir que el régimen A es un equilibrio si existe una trayectoria puntual cuya dinámica de regímenes es $\dots AAAAAA\dots = \dots A^\infty$, un ciclo de período dos en los regímenes A y B es una sucesión de regímenes que puede ser representada simbólicamente mediante $ABABABAB\dots = (AB)^\infty$, etc. En particular, decimos que un régimen es estable si toda trayectoria que entra en su dominio queda allí; esto es, el

(1987) y Alligood, Sauer y J.A. Yorke, (1997) contiene varios ejemplos de representación de sistemas dinámicos uni y bidimensionales mediante sistemas dinámicos simbólicos.

²² Este shift se llama de Fibonacci porque el número de trayectorias de longitud n son los números de Fibonacci

²³ En particular en Brida (2000 a) el lector puede encontrar un diccionario para traducir propiedades de sistema dinámico simbólico en propiedades algebraicas de la matriz adyacente.

²⁴ En algunos casos, podemos obtener una representación total de la dinámica del sistema mediante un sistema simbólico que es conjugado al sistema original. Este es el caso cuando tenemos una partición de Markov. Vease el ejemplo d3e la sección 3 de este trabajo.

régimen $R_i = (f_i, M_i)$ es estable si y sólo si $f_i(M_i) \subseteq M_i$. En este caso, ya que sólo hay cambio de régimen si la sucesión simbólica $(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ es tal que $s_{n+1} \neq s_n$, cuando una trayectoria entra en el régimen estable A, la representación de la dinámica de regímenes debe continuar con A^∞ . Un régimen es inestable si toda trayectoria que entra en su dominio, en un número finito de períodos escapa a otro dominio de fase; esto es, $R_i := (f_i, M_i)$ es inestable si y sólo si para todo $x \in M_i$ existe un natural k tal que $(f_i)^k(x) \notin M_i$. Los regímenes estables e inestables son casos extremos; en general un régimen tiene trayectorias que escapan y otras que quedan en el dominio de fase. Si todos los regímenes son estables no hay posibilidad de cambio de régimen y el sistema puede ser descompuesto en distintos modelos con un único régimen. Es claro que para tener dinámica de regímenes no trivial al menos dos regímenes deben ser no estables.

Un punto interesante (pues tiene que ver con lo que en la literatura se conoce como “path dependence”) es saber si un modelo (f, M) con múltiples regímenes es capaz de generar una determinada evolución finita de regímenes. Dado un sistema dinámico (f, M) con múltiples regímenes $\{R_i = (f_i, M_i), i \in I\}$ y una sucesión finita y ordenada de símbolos $i_0 i_1 \dots i_k$ con $i_j \in I$ ($j = 0, 1, \dots, k$), la condición para que exista un $x \in M$ tal que $(\pi(f^{i_j}(x))) = i_j$ para $j = 0, 1, \dots, k$ (es decir, una trayectoria que visite los regímenes R_{p_0}, R_{p_1}, \dots y R_{p_k} en ese orden) es que el punto x verifique la condición

$$x \in M_{p_0}, f(x) \in M_{p_1}, \dots, f^k(x) \in M_{p_k},$$

o en forma equivalente,

$$x \in \bigcap_{i=0}^k f^{-i}(M_{p_i}).$$

Entonces, la condición necesaria y suficiente para que exista una trayectoria que siga la evolución de regímenes definida por $i_0 i_1 i_2 \dots i_k$ es que $\bigcap_{i=0}^k f^{-i}(M_{p_i}) \neq \emptyset$.

En resumen, en esta sección vimos que el estudio de la dinámica de regímenes se reduce a estudiar las sucesiones simbólicas creadas a partir del alfabeto previamente definido y tales que existe una trayectoria puntual que sigue la secuencia de regímenes representados en la sucesión simbólica. En otras palabras, si $A = \{1, 2, \dots, S\}$ es el alfabeto y $A^{\mathbb{N}} = \{(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid s_n \in A\}$ es el espacio de todas las sucesiones simbólicas definidas en A , el dominio de la dinámica de regímenes de un modelo (f, M) con múltiples regímenes es el conjunto formado por las sucesiones simbólicas $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tales que existe un $x \in M$ con $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} = (s_n(x))_{n \in \mathbb{N}} = (\pi(f^{i_n}(x)))_{n \in \mathbb{N}}$. En la próxima sección presentaremos un ejemplo sencillo de como puede ser usado el método en un caso particular. No pretendemos desarrollar un modelo nuevo y es por esto que hemos usado la ecuación logística (o cuadrática) que aparece en muchos modelos económicos de la literatura en dinámica económica reciente.

3. Un ejemplo

En esta sección (y con el único fin de ilustrar la utilidad del método) presentamos un ejemplo de representación simbólica del modelo logístico con dos

regímenes. En realidad no vamos a describir el modelo sino que usaremos la función logística que aparece en muchos modelos de dinámica económica. En Sordi (1996) se puede encontrar una revisión muy completa de la literatura en teoría del caos y dinámica económica donde la ecuación final de los modelos se reduce a una ecuación logística.

Sea $f_\lambda : [0,1] \rightarrow [0,1]$ definida por $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ la función logística, donde λ es un número real positivo mayor que 4.²⁵ En la figura 4 presentamos el gráfico de f_λ .

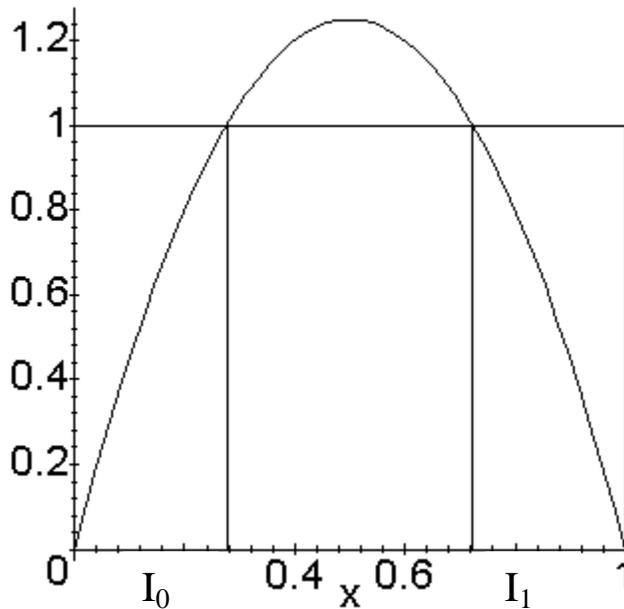


Figura 4:
El gráfico de la función logística $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ cuando $\lambda > 4$.

La función es creciente en el intervalo $I_0 = [0, 1/2]$ y decreciente en $I_1 = [1/2, 1]$, lo que nos da un criterio matemático para dividir en estos dos regímenes, que serán representados por los números 0 y 1 respectivamente. Sea x un punto del intervalo $[0,1]$; de acuerdo al criterio descrito en la sección anterior a x le asociamos la sucesión $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ eligiendo $s_n = 0$ si $(f_\lambda)^n(x) \in I_0$ y $s_n = 1$ si $(f_\lambda)^n(x) \in I_1$. Es claro que hay puntos del dominio de f_λ cuya imagen no pertenece al intervalo $[0,1]$ por lo que debemos restringir el dominio de nuestra función. Vamos a tomar como dominio del sistema dinámico el conjunto de puntos cuya órbita permanece siempre en el intervalo $[0,1]$; esto es,

$$\Lambda = \{x \in [0,1] / f_\lambda^n(x) \in [0,1] \text{ para todo } n \geq 0\}.$$

Nótese que el conjunto Λ es invariante bajo f_λ .²⁶ Sean $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \Sigma_2$ el espacio shift total de todas las sucesiones simbólicas definidas en el alfabeto $\{0,1\}$ y $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ la función shift dada por $\sigma((s_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (s_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. La siguiente proposición muestra que para los valores de λ mayores que 4, los sistemas dinámicos (f_λ, Λ) y (σ, Σ_2) son topológicamente conjugados. Que los sistemas sean topológicamente conjugados

²⁵ Trabajamos con los valores de λ mayores que 4 para no hacer tediosa la discusión del ejemplo que pretende solamente ser ilustrativo del método de representación de la dinámica de regímenes.

²⁶ El conjunto Λ de los puntos cuya órbita permanece en el intervalo $[0,1]$ es un conjunto de Cantor. Ver Brida (2000 a) para una prueba de este resultado. Este conjunto tiene medida de Lebesgue cero y por lo tanto casi todo punto del intervalo $[0,1]$ deja el intervalo luego de un número finito de iteraciones. A pesar de ser un conjunto “pequeño”, Λ contiene todas las órbitas interesantes de f .

significa que tienen la misma dinámica y por lo tanto en este caso, la representación simbólica da una copia fiel del sistema original. De esta manera cada una de las trayectorias puntuales del sistema está representada por una única sucesión simbólica y esto permite estudiar la evolución del sistema económico en cuestión mediante su representación simbólica. Para enunciar la proposición definimos la función de simbolización $\pi: \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ del modo siguiente: si $x \in \Lambda$, la sucesión $\pi(x) = s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}} = s_0.s_1s_2s_3\dots \in \Sigma_2 = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ verifica que para todo número natural n es $s_n = 0$ si $f^n(x) \in I_0$ y $s_n = 1$ si $f^n(x) \in I_1$. Podemos ahora enunciar el resultado que permite representar la dinámica de regímenes del modelo:²⁷

Proposición: *La función $\pi: \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ es una conjugación topológica entre los sistemas dinámicos (f_λ, Λ) y (Σ_2, σ) . Esto es,*

- a) π es biyectiva,
- b) π es continua,
- c) π^{-1} es continua, y
- d) $\pi(f_\lambda(x)) = \sigma(\pi(x)), \forall x \in \Lambda$.

De aquí se deduce que la dinámica de regímenes de la función logística con los dos regímenes elejidos esta representada por el shift total con dos símbolos. Por lo tanto el grafo dirigido (o la matriz de adyacencia) de la figura 5 dan una especificación de las posibles sucesiones de regímenes que se pueden dar en el modelo como caminatas infinitas en el grafo.

Observación: Esta división en dos regiones del dominio Λ es un ejemplo de una partición de Markov y en este caso cada punto de Λ se puede identificar con una sucesión simbólica de ceros y unos. El uso de la dinámica simbólica en este ejemplo manifiesta todo su poder ya que obtenemos una conjugación topológica entre la función logística y el shif total de tipo finito en dos símbolos. Por lo tanto la dinámica de regimenes del modelo es comparable a la generada por una cadena de Markov con dos estados y probabilidades de pasaje entre los estados iguales a $1/2$. Queremos destacar que la posibilidad de obtener una copia simbólica absolutamente fiel del sistema original (realidad económica) como se da en este ejemplo no es común.

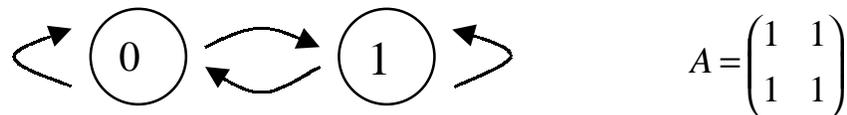


Figura 5: Grafo de transición y matriz de adyacencia que represntan la dinámica simbólica de la función logística $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ cuando $\lambda > 4$. Un cero en la entrada ij significa que no hay una flecha de i a j y un uno que hay una flecha de i a j , donde $i, j = 0,1$.

4. Conclusiones

²⁷ Ver Brida (2000 a) para una pueba de los resultados enunciados en esta sección.

Este trabajo esta escrito en la filosofía de que las observaciones y mediciones humanas de los fenómenos económicos se llevan siempre a cabo con precisión finita. Esta precisión se afina con el avance de la ciencia, pero nunca podrá alcanzar un estado de exactitud absoluta. No es posible atrapar un proceso económico en todos sus detalles y conexiones y debemos focalizarnos en un cierto nivel de observación. Por otro lado, el objetivo de nuestras observaciones y mediciones es la construcción de conclusiones rigurosas acerca de la ley y de las propiedades básicas del proceso económico en estudio. El balance entre precisión finita y conclusiones rigurosas puede ser alcanzado por intermedio de una descripción gruesa de la dinámica y la dinámica de regímenes que inetntamos representar en este trabajo no es mas que eso, una descripción gruesa de la dinámica del proceso en estudio.

El método simbólico de representación de la dinamica de regímenes que hemos introducido reproduce la evolución de una economía desde el punto de vista de los cambios de régimen como una suceción temporal de símbolos. El punto de partida del método es la division del espacio de los estados de una economía en un número finito de regiones llamadas regímenes y considerar explícitamente la dinámica de pasaje de un régimen a otro. A partir de esta división y de la codificación de los regímenes se obtiene una dinámica simbólica a la que, en principio, se le pueden aplicar los instrumentos matemáticos desarrollados en la teoría de los sistemas dinámicos simbólicos. Uno de los méritos del método es la posibilidad de representar en algunos casos la dinámica de regímenes mediante grafos dirigidos y traducir propiedades algebraicas de la matriz adyacente en propiedades de la dinámica de regimenes. Asimismo, el método puede ser aplicado para el estudio de la dinámica de regímenes de una economía real pues a partir de las series temporales de datos y un criterio prefijado para la división del espacio de los estados de la economía en regímenes, podemos codificar las series temporales transformándolas en series temporales simbólicas. Estas series simbólicas pueden luego estudiadas mediante técnicas estadísticas que permiten, entre otras cosas, hacer estudios comparativos de las dinámicas de cambio de regímenes de distintas economías y la calibración de modelos teóricos a partir de los datos de modo tal que la dinámica de cambio de regímenes observada y la del modelo sean suficientemente cercanas.²⁸

²⁸ En Brida (2000 a y b) se encuentra el desarrollo teórico y aplicaciones del análisis de series temporales simbólicas para modelos económicos con múltiples regímenes.

Bibliografía

Accinelli, E., (2000), Singular Economies, *Cuadernos del Departamento de Economía de la F.C.S.*, Montevideo.

Adler, R.L., (1998), *Symbolic Dynamics and Markov Partitions*, Bull. Am. Math. Soc., New Ser. 35, No. 1, 1-56.

Alligood, K.T., T.D. Sauer and J.A. Yorke, (1997), *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York.

Aoki, M., (1996), New Approaches to Macroeconomic Modeling: Evolutionary stochastic Dynamics, Multiple equilibria, and Externalities as Field Effects, Cambridge University Press, Cambridge.

Azariadis, C. and Drazen, A. (1990), Threshold externalities in economic development, *Quarterly Journal of Economics*, 105, pp. 501-526.

Blad, M.C. (1981), Exchange of Stability in a Disequilibrium Model, *Journal of Mathematical Economics*, 8, pp. 121-145.

Blad, M.C. and Zeeman, E., (1982), "Oscillations between repressed inflation and Keynesian equilibria", *Journal of Economic Theory*, 28, pp. 165-182.

Block, L.S. and W.A. Coppel, (1992), *Dynamics in One Dimension (Lecture Notes in Mathematics)*, vol. 1513, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.

Brida, J.G., (2000 a), "Symbolic Dynamics in Multiple Regime Economic Models", Ph D. thesis, University of Siena.

Brida, J.G., (2000 b), "Symbolic Time Series Analysis in Economics", *SSRN Electronic Paper Collection*, 256422. (disponible en <http://papers.ssrn.com>)

Brida, J.G., (2000 c), "Regime Dynamics in a Model of Inflation and Unemployment Fluctuations", *Quaderni del Dipartimento di Economia Politica*, N. 297, Siena.

Brida, J.G., M. Puchet and L. Punzo (2000), "Coding Economic Dynamics to Represent Regime Dynamics", *Quaderni del Dipartimento di Economia Politica*, N. 307, Siena.

Cooper, R. and John, A., (1988), Coordinating coordination failures in Keynesian models, *Quarterly Journal of Economics*, 103, pp. 441-463.

Day, R.H. (1994), *Complex Economic Dynamics*, The MIT Press, Cambridge, Mass.

Devaney, R., (1987), *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, Reading MA.

Diamond, P., (1982), Aggregate demand management in search equilibrium, *Journal of Political Economy*, 90, pp. 881-894.

- Durlauf, S.N. and Johnson, P.A., (1995), Multiple regimes and cross-country growth behavior, *Journal of Applied Econometrics*, 10, pp. 365-384.
- Durlauf, S.N. and Quah, D., (1998), The empirics of economic growth, Discussion paper N° 384, Centre for Economic Performance.
- Galor, O. and Zeira, J., (1993), Income distribution and macroeconomics, *Review of Economic Studies*, 60, pp. 35-52.
- Georgescu-Roegen, N., (1951), "Relaxation Phenomena in Linear Dynamic Models", in T. C. Koopmans (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, John Wiley & Sons, New York.
- Georgescu-Roegen, N., (1976), *Energy and Economic Myths*, Pergamon Press, Oxford.
- Goldfeld, S.M. and Quandt, R.E., (1973), A Markov model for switching regressions, *Journal of Econometrics*, 1, pp. 3-16.
- Goodwin, R.M., (1951), "The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles", *Econometrica*, in Goodwin, R.M., *Essays in Economic Dynamics*, MacMillan, 1982.
- Hamilton, J.D., (1989), A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle, *Econometrica*, 57, pp. 357-384.
- Howitt, P. (1985), Transactions costs in the theory of unemployment, *American Economic Review*, 75, pp. 88-101.
- Howitt, P. and MacAfee, R.P. (1992), Animal spirits, *American Economic Review*, 82, pp. 493-507.
- Ito, T., (1980), "Disequilibrium growth theory", *Journal of Economic Theory*, 23, pp. 380-409.
- Le Corbeiller, Ph., (1933), "Les systèmes autoentretenus et les oscillations de relaxation", *Econometrica*, 1, 328- 332.
- Leijonhufvud, A., (1981), *Information and Coordination: Essays in Macroeconomic Theory*, Oxford University Press.
- Leijonhufvud, A. (1987), Rational expectations and monetary institutions, in *Monetary Theory and Economic Institutions*, M. De Cecco and J.P. Fitoussi (eds.), MacMillan, London.
- Leontief, W.W. (1953), *Studies in the Structure of the American Economy*, Oxford University Press, New York.
- Lewis, W.A., (1955), Economic Development with Unlimited Supply of Labour, *Manchester School of Economic and Social Studies*, 22, pp. 139-191.

- Lind, D. and B. Marcus, (1995), *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*, Cambridge University Press.
- Lucas (1977), Understanding business cycles, in Brunner, K. and Meltzer, A.H. (eds.), *Stabilization of the Domestic and International Economy*, Carnegie-Rochester series on Public Policy 5, 7-29, North-Holland, Amsterdam and New York.
- Lucas (1976), Econometric policy evaluation: a critique, in Brunner, K. and Meltzer, A.H. (eds.), *The Phillips Curve and Labour Markets*, Carnegie-Rochester Series on Public Policy 1, pp. 19-46, North-Holland, Amsterdam.
- Malinvaud, E., (1977), *The Theory of Unemployment Reconsidered*, Basil Blackwell, Oxford.
- Malinvaud, E., (1980), *Profitability and Unemployment*, Cambridge University Press, Cambridge).
- Neftci, S. N. (1982), Optimal prediction of cyclical downturns, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 4, pp. 225-241.
- Nurkse, R., (1953), *Problems of Capital Formation in Underdeveloped Countries*, Basil Blackwell, Oxford.
- Potter, S.M., (1995), A nonlinear approach to US GNP, *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 10, pp. 109-125.
- Punzo, L. F., (1995), Some Complex Dynamics for a Multisectorial Model of the Economy, *Revue Economique*, 46: 1541-1560.
- Punzo, L. F., (1996), Industrial dynamics and structural change: a framework for the analysis of sectoral dynamics in a set of countries, ISER, Osaka University.
- Punzo, L. F., (1997), Ciclos Estructurales y Convergencia durante los procesos de integración económica, *Revista de Economía* 4(2), Banco Central del Uruguay, Montevideo, 3-57.
- Punzo, L. F., Abraham, R.H. and Hotton, S., (1996), Experimenting with a Cellular Model of Italian Economic Development, EU CompEcs WP series.
- Punzo, L. F. and Böhm, B. (1992), Detecting Structural Change: A Scheme for the Comparison of Austria and Italy in the Seventies and Eighties, in Clauser, O., P. Kalmbach, G. Pegoretti, L. Segnana (eds.): *Technological Innovation, Competitiveness, and Economic Growth*, Duncker & Humbolt, Berlin.
- Punzo, L. F. and Böhm, B. (1994), Dynamics of Industrial Sectors and Structural Change in the Austrian and Italian Economies, 1970-1989, in Böhm, B. and Punzo, L.F. (eds.), *Economic Performance. A Look at Austria and Italy*, Physica Verlag, Heidelberg.
- Punzo, L. F. and Böhm, B. (1997), Dynamical structural changes in selected European countries, with a comparison with Japan and the US, in Fabel, O., Farina, F. and Punzo,

- L.F. (eds.), *European Economies in Transition. Structural changes in search of a new growth path*, MacMillan, (forthcoming, 2000).
- Punzo, L. F. and Böhm, B., (1998), Productivity-investment oscillations, and structural change, in Day, R.H. and Punzo, L.F. (eds.) *Cycle, growth and structural change*, Siena, Routledge (forthcoming, 2000).
- Quah, D., (1996), Convergence empirics across economies with (some) capital mobility, *Journal of Economic Growth*, 1, pp. 95-124.
- Quandt, R.E., (1958), The estimation of parameters of linear regression systems obeying two separate regimes, *Journal of the American Statistical Association*, 53, pp. 873-880.
- Rosenstein-Rodan, P., (1943), Problems of industrialization in Eastern and South-Eastern Europe, *Economic Journal*, 53, pp. 202-211.
- Rostow, W.W., (1960), *The Stages of Economic Growth*, Cambridge University Press.
- Sordi, S., (1996), "Chaos in macrodynamics: an excursion through the literature", *Quaderni del Dipartimento di Economia Politica*, N. 195, Siena.
- Streeten, P., (1959), Unbalanced growth, *Oxford Economic Papers*, 11, pp. 167-190.
- Tong, H., (1983), *Threshold Models in a Non linear Time-Series Analysis*, Springer-Verlag, New York.
- Tong, H. and Lim, K.S., (1980), Threshold autoregression, limit cycles and cyclical data, *Journal of The Royal Statistical Society*, B, 42, pp. 245-292.