Trabajo Monográfico

Flujo de Ricci en superficies cerradas

Por: Ignacio Bustamante

Orientador: Martín Reiris

Co-orientador: Miguel Paternain

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Licenciatura en Matemática

Facultad de Ciencias

Universidad de la República

Uruguay

Resumen

Esta monografía está basada en el artículo "The Ricci Flow on Surfaces", escrito por Richard Hamilton. Nuestro objetivo será comprender los resultados expuestos en el mismo, así como brindar una introducción autocontenida al flujo de Ricci en general. Probaremos la existencia y unicidad de las soluciones para tiempos cortos en variedades cerradas y luego mostraremos algunos resultados sobre convergencia asintótica a métricas de curvatura constante en superficies cerradas.

Abstract

This monograph is based on the paper "The Ricci Flow on Surfaces", written by Richard Hamilton. The aim of this work is to understand the results shown on the paper and to serve as an introduction to the study of the Ricci flow. We will prove short time existence and uniqueness of the solutions for closed manifolds, and then proceed to show some results concerning asymptotic convergence to constant curvature metrics for closed surfaces.

Índice

1 Introducción

Los flujos geométricos son una clase importante de ecuaciones en derivadas parciales que aparecen naturalmente en muchas áreas teóricas y aplicadas. Ejemplos de estos se remontan al menos a la década del 50 donde Mullin introduce el flujo acorta curvas. Otro ejemplo de esto es el flujo del mapa armónico introducido por Ells y Sampson, el cual fue usado para probar existencia de mapas armónicos a variedades de curvatura seccional no positiva.

Motivado por el trabajo de Ells y Sampson, en 1982 Hamilton pubilca un artículo donde introduce el flujo de Ricci, que es una ecuación diferencial dada por

$$\frac{d}{dt}g(x,t) = -2\,\mathrm{Rc}_{g(t)}(x),$$

y es a menudo llamada la "ecuación del calor para la métrica".

En [Ham82], Hamilton usa este flujo para probar que toda variedad de dimensión 3 cerrada con curvatura de Ricci positiva admite una métrica de curvatura constante positiva.

El flujo de Ricci ha ganado popularidad por ser una pieza fundamental en la prueba de la conjetura de Geometrización de Thurston, que fue terminada por Perelman en una serie de tres artículos, [Per02a], [Per02b] y [Per03] durante los años 2002 y 2003. Otro resultado notable que puede ser probado a partir del flujo de Ricci es el teorema de la esfera diferenciable, demostrado por Brendle y Schoen en [BS09].

En este trabajo intentaremos dar un breve panorama sobre el flujo de Ricci.En la sección 2 introduciremos la ecuación del flujo de Ricci y el flujo normalizado, que es una modificación al flujo para que éste preserve volumen. Además daremos algunos ejemplos clásicos y veremos la relación entre el flujo de Ricci y el flujo normalizado.

La existencia y unicidad de las soluciones será estudiada en la sección 3, donde usaremos el truco de DeTurck y el flujo de mapa armónico para probar el resultado.

La sección 4 estará dedicada a encontrar una condición suficiente para la existencia a tiempos largos de las soluciones al flujo de Ricci. Además veremos cómo se comportan las derivadas de la curvatura a través del mismo.

El resto de la monografía será dedicada a estudiar el flujo de Ricci normalizado en superficies cerradas. En este caso, Hamilton prueba los siguientes teoremas.

Teorema 1.1. *Sea M una superficie compacta. Entonces la solución al flujo de Ricci normalizado existe para todo tiempo.*

Teorema 1.2. *Si $\chi(M) \leq 0$, la métrica converge en C^∞ a una de curvatura constante.*

Teorema 1.3. *Si $\chi(M) > 0$ y $R(x,0) > 0$ para todo $x \in M$, donde R es la curvatura escalar,la métrica converge en C^∞ a una de curvatura constante.*

Finalmente, mencionaremos la prueba dada por Chow en [B.C91] para el caso donde la curvatura de la esfera cambia de signo, donde prueba el siguiente.

Teorema 1.4. *Si g es una métrica en $\mathbb{S}^2$, entonces bajo el flujo de Ricci normalizado, la curvatura escalar se hace positiva en tiempo finito.*

Uniendo los resultados previos, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.5. *Si M es una superficie cerrada con métrica inicial g_0, bajo el flujo de Ricci normalizado la métrica converge en C^∞ a una de curvatura constante.*

Finalmente, como corolario obtenemos una prueba independiente del teorema de uniformización en superficies cerradas.

2 El flujo de Ricci

En esta sección definiremos el flujo de Ricci y el flujo de Ricci normalizado, daremos una idea general de su significado geométrico y veremos algunos casos particulares. Estas definiciones y resultados generales pueden encontrarse por ejemplo en [MT07] y [Bre10].

2.1 Definición y algunas ideas geométricas

Definición 2.1. Sea M una variedad diferenciable con $\dim(M)=n$ y sea $g(t)$, con $t \in [0, T)$ una familia suave de métricas Riemannianas en M . Decimos que $g(t)$ es una solución para el *Flujo de Ricci* (FR) con condición inicial $g_0(t)$ si satisface

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} g(x,t) = -2\,\mathrm{Rc}_{g(t)}(x) & \forall x \in M, t \in [0,T). \\ g(x,0) = g_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

Donde $\mathrm{Rc}_{g(t)}$ es la curvatura de Ricci de la métrica $g(t)$.

Comenzamos viendo algunos ejemplos sencillos en variedades con curvatura constante.

Definición 2.2. Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Decimos que g es una *métrica de Einstein* si

$$\mathrm{Rc}(g) = \lambda g$$

para alguna constante $\lambda \in \mathbb{R}$. En caso de que (M, g) sea una variedad Riemanniana con una métrica de Einstein, decimos que M es una *variedad de Einstein.*

Observación 2.1. $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{H}^n$ y $\mathbb{R}^n$ son variedades de Einstein.

Sea entonces (M, g_0) una variedad de Einstein. Tenemos que $\mathrm{Rc}(g_0) = \lambda g_0$. Cosideremos una familia de métricas $g(t) = u(t)g_0$. Si esta familia es solución al flujo de Ricci, se cumple

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} &= u'(t)g_0 = -2\,\mathrm{Rc}(u(t)g_0) \\ &= -2\,\mathrm{Rc}(g_0) = -2\lambda g_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Entonces tenemos que $u'(t) = -2\lambda$, y por lo tanto $u(t) = 1 - 2\lambda t$. Luego $g(t) = (1 - 2\lambda t)g_0$ es una solución al flujo de Ricci. En el caso $\lambda > 0$ (como en la esfera), se dice que la solución es *contractiva*, en el caso $\lambda = 0$ (como en $\mathbb{R}^n$) decimos que la solución es *estacionaria* y en el caso $\lambda < 0$ se dice *expansiva.* Cabe notar que en el caso $\lambda > 0$ la solución está definida hasta $t = \frac{1}{2\lambda}$.

Lo anterior muestra que si empezamos con una variedad lo suficientemente homogénea, el flujo preservará esta propiedad. Sin embargo, observamos que no podemos decir nada acerca del volumen de la misma.

Motivados por el ejemplo anterior, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.3. Sea (M, g_0) una variedad Riemanniana y $g(t)$ una solución al Flujo de Ricci. Decimos que la solución es *ancestral* si $g(t)$ existe para todo $t < 0$, *inmortal* si $g(t)$ existe para todo $t > 0$ y en caso de que sea ancestral e inmortal, decimos que la solución es *eterna.*

Observación 2.2. Como vimos en el ejemplo, la solución al flujo en $\mathbb{S}^n$ es ancestral, en $\mathbb{H}^n$ es inmortal, y en $\mathbb{R}^n$ la solución es eterna.

El flujo de Ricci puede ser visto como una ecuación del calor sobre la métrica. Para ver esto, estudiemos primero el tensor de Ricci en coordenadas armónicas.

Proposición 2.3. *Sean M una variedad Riemanniana, y x^i un sistema de coordenadas locales armónicas (es decir, $\Delta x^i = 0\ \forall i$). Entonces, el tensor de Ricci puede expresarse como*

$$R_{jk} = -\frac{1}{2} g^{il} \partial_i \partial_l g_{jk} + Q_{jk}(g^{-1}, \partial g)$$

donde Q es cuadrática en la primera derivada de la métrica.

Demostración. Como puede verse en (A.8), en coordenadas el tensor de Riemann tiene la forma

$$R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l + \Gamma_{jk}^p \Gamma_{ip}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jp}^l.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} -2R_{jk} &= -2(\partial_i \Gamma_{jk}^i - \partial_j \Gamma_{ik}^i) + \partial g * \partial g \\ &= g^{il}(\partial_i \partial_l g_{jk} + \partial_j \partial_k g_{il} - \partial_j \partial_l g_{ik} - \partial_i \partial_k g_{jl}) + \partial g * \partial g \\ &= g^{il} \partial_i \partial_l g_{jk} - \partial_k (g^{il} \Gamma_{il}^m g_{mj}) - \partial_j (g^{il} \Gamma_{il}^m g_{mk}) + \partial g * \partial g. \end{aligned} \tag{3}$$

Como estamos en coordenadas armónicas, el segundo y el tercer término son nulos, probando el resultado. □

Por lo anterior, fijando un tiempo t y tomando coordenadas armónicas, el flujo de Ricci queda dado por

$$\frac{d}{dt} g = \Delta g + Q(g^{-1}, \partial g),$$

que a orden 1 es efectivamente una ecuación del calor para la métrica. Es importante observar que esta ecuación no es tensorial. Además, en general las coordenadas armónicas en $t = 0$ no lo serán en $t > 0$. Veremos una forma de sobrepasar esta dificultad cuando estudiemos el truco de DeTurck.

2.2 El flujo de Ricci normalizado

Definición 2.4. Decimos que una familia suave de métricas Riemannianas $g(t)$ con $t \in [0, T)$ es una solución del *flujo de Ricci normalizado* (FRN) con $g(0) = g_0$ si cumple

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} g(x,t) = \dfrac{2}{n} r(t) g(x,t) - 2\,\mathrm{Rc}_{g(t)}(x) & \forall x \in M, \in [0, T). \\ g(x, 0) = g_0(x) \end{cases} \tag{4}$$

donde $r(t)$ es la curvatura escalar promedio en el tiempo t,

$$r(t) = \frac{1}{Vol(M)} \int_M R(x,t) dx.$$

Observación 2.4. En el caso de la esfera $\mathbb{S}^n$, si buscamos soluciones de la forma $g(t) = s(t)g_{\mathbb{S}^n}$ con $g_{\mathbb{S}^n}$ la métrica redonda en la esfera y $s(0) = 1$, resolviendo para $s(t)$ obtenemos

$$r(t) = \frac{n(n-1)}{s(t)},$$

donde usamos las propiedades de escala de la curvatura escalar. Por lo tanto, la ecuación del flujo normalizado para la esfera es

$$\frac{d}{dt}g = \frac{2}{n}\frac{n(n-1)}{s(t)}s(t)g_{\mathbb{S}^n} - 2(n-1)g_{\mathbb{S}^n} = 0.$$

Por lo que si empezamos con una esfera equipada con su métrica redonda, el flujo no modifica su forma y tampoco su volumen.

Más en general, tenemos

Proposición 2.5. *El flujo de Ricci normalizado preserva volumen.*

Demostración. Sea $g(t), t \in [0, T)$ solución para el FRN. Para ver que se preserva el volumen, basta ver que $\partial_t \int_M d\mu(t) = 0$, donde $d\mu(t)$ es la forma de volumen de M. Observamos que en coordenadas locales, se cumple que $d\mu = \sqrt{\det(g)}dx$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\det(g)) &= \sum_{i,j} \frac{\partial \det(g)}{\partial g_{ij}} \frac{\partial}{\partial_t} g_{ij} = \sum_{i,j} (\mathrm{Adj}(g))_{ij} \frac{\partial}{\partial_t} g_{ij} \\ &= \det(g)\, g^{ij} \frac{d}{dt} g_{ij} = 2\det(g)\, g^{ij}\left(\frac{r(t)}{n}g_{ij} - R_{ij}\right) \\ &= 2\det(g)\left(\frac{r(t)}{n}g^{ij}g_{ij} - g^{ij}R_{ij}\right) = 2\det(g)\,(r - R). \end{aligned} \tag{5}$$

Por lo tanto, $d\mu$ satisface

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}d\mu &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\det(g)}}\Big(2\det(g)\,(r-R)\Big)dx \\ &= \sqrt{\det(g)}(r-R)dx = (r-R)d\mu. \end{aligned} \tag{6}$$

Finalmente, $\frac{d}{dt}\int_M d\mu = \int_M (r-R)d\mu = 0.$

□

2.3 Relación entre los flujos

Es importante notar que no tenemos ningún tipo de relación a priori entre las soluciones del flujo de Ricci y las soluciones del flujo normalizado. Veamos entonces que una tal relación existe.

Teorema 2.6. *El flujo de Ricci difiere del flujo de Ricci normalizado por una reparametrización temporal y un escalado espacial.*

Demostración. Sea $g(t)$ solución para el FR con tensor de Ricci R_{ij}, curvatura escalar R y curvatura promedio r.

Definimos $h(t) := \psi(t)g(t)$, con $\psi(t)$ elegida de forma tal que $Vol_{h(t)}(M)$ sea constante en t, con tensor de Ricci $\tilde{R}_{ij}$, curvatura escalar $\tilde{R}$ y curvatura promedio $\tilde{r}$. Sea $d\mu$ el elemento de volumen para la métrica g y $d\nu$ el elemento de volumen para la métrica h.

Se puede ver que $d\nu = \psi^{\frac{n}{2}} d\mu$. Además, por una cuenta similar a la de la proposición anterior, tenemos que $\partial_t d\mu = -Rd\mu$; por lo que decir que el volumen se mantiene constante para la métrica h es equivalente a

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_t \int_M d\nu = \int_M \partial_t \left(\psi^{\frac{n}{2}} d\mu\right) \\
&= \int_M \frac{n}{2} \psi^{\frac{n-2}{2}} d\mu + \int_M \psi^{\frac{n}{2}} \partial_t d\mu \\
&= \psi^{\frac{n}{2}} \int_M \left(\frac{n}{2\psi} - R\right) d\mu = \psi^{\frac{n}{2}} \int_M \left(\frac{n}{2}\partial_t log(\psi) - R\right) d\mu.
\end{aligned} \tag{7}$$

Luego $\left(\frac{n}{2}\partial_t log(\psi) - r\right) Vol(M) = 0$, y por lo tanto, $\partial_t log(\psi) = \frac{2}{n} r$.

Calculemos ahora la derivada temporal de la métrica h.

$$\begin{aligned}
\partial_t h(t) &= \partial_t \psi g(t) + \psi \partial_t g(t) = \partial_t \psi g(t) + \psi \left(-2R_{ij}\right) \\
&= \psi \partial_t \psi \frac{g(t)}{\psi} + \psi(t) \left(-2R_{ij}\right) = \psi \partial_t \log(\psi) g(t) - 2\psi(t) R_{ij} \\
&= \psi \left(\frac{2}{n} r \frac{h(t)}{\psi} - 2R_{ij}\right) = \psi \left(\frac{2}{n} \tilde{r} h(t) - 2\tilde{R}_{ij}\right).
\end{aligned} \tag{8}$$

Donde en las últimas dos líneas usamos que $R_{ij} = \tilde{R}_{ij}$ y que $\frac{r}{\psi} = \tilde{r}$.

Finalmente, tomando como nueva variable temporal $\tilde{t} = \int_M \psi(t)dt$, recuperamos el FRN. $\square$

Apoyándonos en este resultado, podemos probar existencia y unicidad del flujo normalizado a partir de la existencia y unicidad del flujo de Ricci, por lo que probaremos estas propiedades para el flujo de Ricci usual.

3 Existencia a tiempos cortos en variedades cerradas

Procederemos ahora a mostrar que dada una variedad M y una métrica inicial g_0, la solución existe para un intervalo $[0, T)$. Seguiremos argumentos de [CK04] y [CCCY].

3.1 Ecuaciones parabólicas

Empecemos por comprender qué significa que una ecuación de evolución en un fibrado vectorial sea parabólica.

Como en nuestro caso el fibrado es S_2T^*M (el fibrado de los (0,2)-tensores simétricos sobre nuestra variedad M), nos centraremos en qué es una EDP parabólica en este último.

Supongamos entonces que consideramos la siguiente EDP en el fibrado vectorial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} h_{ij} = P(h_{ij}) \\ h_{ij}(0) = a_{ij} \end{cases} \tag{9}$$

De forma tal que $P : C^\infty(S_2T^*M) \to C^\infty(S_2T^*M)$ es un operador diferencial de orden k-ésimo.

Como el flujo de Ricci es una EDP no lineal, para aprovechar la maquinaria de las EDP nos puede ser útil tener un concepto de linealización.

En analogía a la definición de derivadas de funciones $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, donde el mapa $Df : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ es el que "mejor aproxima" la función en cada punto, consideraremos que la linealización de $DP(h)$ en la dirección de un tensor b_{ij} es tomar una solución h al sistema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} h_{ij} = P(h_{ij}) \\ h_{ij}(0) = b_{ij} \end{cases}$$

y luego definir $DP(h)[b]_{ij}$ como el cambio infinitesimal en el tiempo 0 sobre $h(t)$. Más formalmente tenemos la siguiente

Definición 3.1. La *linealización* de P en una sección h_{ij} es el homomorfismo de fibrados lineales $DP : C^\infty(S_2T^*M) \to C^\infty(S_2T^*M)$ dado por

$$\begin{aligned} DP(h)[b]_{ij} &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} [P(h + sb)]_{ij} \\ &= P_{ij}^{p,lm}(h) \partial_p b_{lm}. \end{aligned} \tag{10}$$

Donde p se suma sobre todos los multiíndices con $|p| \leq k$.

Definición 3.2. El *símbolo principal* de P sobre h en la dirección de una 1-forma ξ es un mapa lineal $\sigma[DP(h)](\xi) : C^\infty(S_2T * M) \to C^\infty(S_2T * M)$, que se define por tomar los términos de orden más alto de la linealización ($|p| = k$) y reemplazar las derivadas ∂_p por sus 1-formas duales ξ_p, que son coordenadas en la fibra,

$$\sigma[DP(h)](\xi)[b]_{ij} = P_{ij}^{p,lm}(h) \xi_p b_{lm}. \tag{11}$$

El objetivo de esta definición es tener una expresión algebraica que capture las propiedades analíticas que sólo dependen de las derivadas de orden más alto del operador P.

Definición 3.3. Sea P definido como antes. Si el símbolo principal de P es un isomorfismo para cada 1-forma ξ y alguna sección h, decimos que P es *elíptico* en h. La ecuación (9) se dice *parabólica* si el operador del lado derecho es elíptico.

La teoría estándar de EDP nos garantiza la existencia de una solución para la ecuación a tiempos cortos en variedades compactas cuando la misma es parabólica (ver por ejemplo [ON67]). Por lo tanto, para probar existencia a tiempos cortos para el flujo de Ricci, bastaría mostrar que Rc (que es un operador diferencial no lineal de segundo orden sobre el tensor métrico) es elíptico sobre cualquier métrica inicial g_0.

Como puede verse en el lema (B.4), la linealización del tensor de Ricci está dada por

$$D\,\mathrm{Rc}_g[h]_{jk} = \frac{1}{2}g^{ab}[\nabla_a\nabla_k h_{jb} - \nabla_j\nabla_k h_{ab} + \nabla_j\nabla_b h_{ak} - \nabla_a\nabla_b h_{jk}].$$

Ahora notamos que la expresión anterior es combinación lineal de derivadas de h, símbolos de Christoffel y sus derivadas, pero los términos de orden más alto en las derivadas de h son derivadas parciales, por lo que el símbolo principal para el tensor de Ricci es

$$\sigma[DRic_g](h)[\xi]_{jk} = \frac{1}{2}g^{ab}[\xi_a\xi_k h_{jb} - \xi_j\xi_k h_{ab} + \xi_j\xi_b h_{ak} - \xi_a\xi_b h_{jk}].$$

Esto nos muestra inmediatamente que el operador no es elíptico, dado que si tomamos $h_{ij} = \xi_i\xi_j$, el símbolo en h es cero, y por lo tanto no es un isomorfismo.

Se puede ver que este hecho se debe a que el tensor de Ricci es invariante por difeomorfismos, es decir, $\mathrm{Rc}(\phi^* g) = \phi^*(\mathrm{Rc}(g))$. Los detalles de estos cálculos y de esta discusión se encuentran en el capítulo 3 de [CK04].

3.2 El truco de DeTurck

Si bien mostramos que la ecuación no es parabólica, se puede modificar la solución mediante un conjunto de difeomorfismos dependientes del tiempo de forma tal que la ecuación nos quede estrictamente parabólica. Luego, volviendo a transformar la solución de esta EDP parabólica por otro conjunto de difeomorfismos, podríamos ser capaces de obtener una solución a tiempos cortos del FR, lo que, como ya vimos antes, implicaría una solución para el FRN también.

Al procedimiento anterior se lo conoce como *truco de DeTurck*.

Comenzamos fijando una métrica $\tilde{g}$ en M. Los símbolos de Christoffel de esta métrica serán denotados por $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$.

Definimos ahora una cantidad W, en función de g y $\tilde{g}$ como,

$$W^i = g^{jk}(\Gamma^i_{jk} - \tilde{\Gamma}^i_{jk}).$$

Si bien la expresión para W depende de los símbolos de Christoffel Γ y $\tilde{\Gamma}$, la diferencia de dos conexiones sí es un tensor, por lo que W es un campo en M. Las componentes de la 1-forma dual a W son $W_i = -g^{pq}g_{ij}(\Gamma^j_{pq} - \tilde{\Gamma}^j_{pq})$.

Definición 3.4. Se define el *flujo de Ricci-DeTurck* como

$$\frac{d}{dt}g_{ij} = -2R_{ij} + \nabla_i W_j + \nabla_j W_i.$$

Podemos además reescribir esta definición como

$$\frac{d}{dt}g_{ij} = -2R_{ij} + \mathcal{L}_W g_{ij},$$

donde $\mathcal{L}_W$ indica la derivada de Lie con respecto al campo W. Tenemos entonces el siguiente.

Lema 3.1. *El flujo de Ricci-DeTurck es estrictamente parabólico.*

Demostración. Comenzamos calculando la linealización del nuevo término

$$S(g)_{ij} = \nabla_i W_j + \nabla_j W_i = \nabla_i \bigg(g_{jm} g^{ab} (\Gamma^m_{ab} - \tilde{\Gamma}^m_{ab}) \bigg) + \nabla_j \bigg(g_{im} g^{ab} (\Gamma^m_{ab} - \tilde{\Gamma}^m_{ab}) \bigg).$$

Introduciendo coordenadas geodésicas notamos que podemos considerar las derivadas covariantes como derivadas parciales al linealizar, y usando las ecuaciones de evolución para los símbolos de Christoffel, la métrica y el tensor de Ricci obtenemos

$$\begin{aligned} DS(g)(h)_{ij} &= \frac{1}{2} g_{jm} g^{ab} \nabla_i [g^{ml} (\nabla_a h_{lb} + \nabla_b h_{al} - \nabla_l h_{ab})] \\ &\quad + \frac{1}{2} g_{lm} g^{ab} \nabla_j [g^{ml} (\nabla_a h_{lb} + \nabla_b h_{al} - \nabla_l h_{ab})] \\ &\quad + (\text{terminos de menor orden en las derivadas de h}) \\ &= g^{ab} (\nabla_i \nabla_a h_{jb} + \nabla_j \nabla_a h_{ib} - \nabla_i \nabla_j h_{ab}) + (\text{terminos de orden menor}). \end{aligned} \tag{12}$$

Definimos $P := -2\,\mathrm{Rc} + S$, y usando lo anterior y la linealización de Rc calculada previamente,

$$\begin{aligned} D[P](g)(h)_{ij} &= g^{ab} \nabla_a \nabla_b h_{ij} + (\text{terminos de orden menor}) \\ &= \Delta h_{ij} + (\text{terminos de orden menor}). \end{aligned} \tag{13}$$

Por lo tanto P es un operador elíptico. □

Entonces podemos aplicar el resultado de existencia de soluciones de EDP parabólicas ya mencionado a este flujo y dada cualquier métrica inicial g_0, el flujo de Ricci-DeTurck tiene solución a tiempo corto.

Sean (M, g) y (N, h) dos variedades Riemannianas de dimensión n y m respectivamente, y sea $f : M \to N$ un mapa suave. La derivada de f está dada por,

$$df \equiv f_* \in C^\infty(T^*M \otimes f^*TN),$$

donde f^*TN es el fibrado pullback sobre M.

Usando coordenadas locales x^i en M e y^α en N, denotamos por $\Gamma(g)^k_{ij}$ la conexión de Levi-Civita de g y $\Gamma(h)^k_{ij}$ la conexión de Levi-Civita de h. Entonces,

$$df \equiv (df)^\alpha_j \left(dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right) \equiv \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} \left(dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right)$$

Definición 3.5. El *mapa armónico Laplaciano* con respecto a la métrica g en el dominio y h en el codominio es la traza

$$\Delta_{g,h} f := \mathrm{tr}_g(\nabla(df)) \in C^\infty(f^*TN).$$

El siguiente lema nos será de utilidad.

Lema 3.2. *Sea $f : (M, g) \to (N, h)$ un difeomorfismo entre variedades Riemannianas. Entonces*

$$(\Delta_{g,h} f)^\gamma(x) = \Big[(f^{-1})^* g\Big]^{\alpha\beta} \Big(-\Gamma\big((f^{-1})^* g\big)^\gamma_{\alpha\beta} + \Gamma(h)^\gamma_{\alpha\beta}\Big)(f(x)).$$

Demostración. Ver Capítulo 3, lema 3.18 en [CK04]. □

Definición 3.6. Dada $f_0 : M \to N$, definimos el *flujo de mapa armónico* como

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} f = \Delta_{g,h} f \\ f(0) = f_0 \end{cases} \tag{14}$$

Notamos que este flujo es estrictamente parabólico, por lo que tenemos existencia y unicidad de soluciones a tiempos cortos. Veamos ahora cómo usar esto y el flujo de Ricci-DeTurck para encontrar una solución al flujo de Ricci.

Si hay una solución al flujo de Ricci, la denotamos por $\bar{g}(t)$ con $t \in [0, \tau)$. En este caso, sea $\phi_t : M \to M$ una familia de difeomorfismos que cumple el flujo de mapa armónico

$$\begin{cases} \partial_t \phi_t = \Delta_{\bar{g}(t),\tilde{g}} \phi_t \\ \phi_0(x) = x \end{cases} \tag{15}$$

con respecto a $\bar{g}(t)$ y $\tilde{g}$. Como la ecuación es parabólica sabemos que, si existe $\bar{g}(t)$, los mapas ϕ_t existen y son difeomorfismos en $[0, T)$ para algún $T < \tau$.

Lema 3.3. *En las condiciones anteriores,*

$$g(t) := (\phi_t)_* \bar{g}(t)$$

es una solución al flujo de Ricci-De Turck.

Demostración. La ecuación de evolución de $g(t)$ está dada por

$$\begin{aligned} \partial_t g(t) &= \partial_t \Big((\phi_t^{-1})^* \bar{g}(t) \Big) \\ &= (\phi_t^{-1})^* (\partial_t \bar{g}(t)) + \mathcal{L}_{(\phi_t)_*(\partial_t \phi_t)} \big[(\phi_t^{-1})^* \bar{g}(t)\big] \\ &= (\phi_t^{-1})^* (-2\,\mathrm{Rc}[\bar{g}(t)]) + \mathcal{L}_{(\phi_t)_*(\phi_t^*[W(t)])} \big[g(t)\big] \\ &= -2\,\mathrm{Rc}[g(t)] + \mathcal{L}_{W(t)}[g(t)]. \end{aligned} \tag{16}$$

□

Ahora, como el flujo de Ricci-De Turck es estrictamente parabólico, sabemos que $g(t)$ existe independientemente de la existencia de $\bar{g}(t)$ y es única si $g(0) = g_0$. Veamos que podemos usar esto para obtener nuestra solución.

Notamos que $W^i = g^{jk}(\Gamma^i_{jk} - \tilde{\Gamma}^i_{jk})$ está definido mientras $g(t)$ esté definido y por lo tanto tiene sentido considerar el sistema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \psi_t(x) = -W(\psi_t(x), t) \\ \psi_0(x) = x \end{cases} \tag{17}$$

y un argumento de compacidad (que puede encontrarse en [CK04], Sección 3.1) nos muestra que tales ψ_t existen mientras g exista. Construimos ahora la solución.

Teorema 3.4. *la familia de métricas dada por*

$$\bar{g}(t) = \psi_t^*(g(t)),$$

es una solución al flujo de Ricci.

Demostración. Basta realizar el cálculo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=T} \bar{g}(t) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi_t^*(\psi_T^*(g(t+T))) \\ &= -\mathcal{L}_{W(T)}\big(\psi_T^* g(T)\big) + \psi_T^*\big(-2\operatorname{Rc}_{g(T)} \big) + \mathcal{L}_{W(T)}\big(g(T)\big) \\ &= -2\operatorname{Rc}_{\psi_T^*(g(T))} . \end{aligned} \tag{18}$$

Donde en la última igualdad usamos la invariancia del tensor de Ricci bajo difeomorfismos junto con el hecho de que ψ_t^* conmuta con $\mathcal{L}_{W(T)}$, pues $-W$ genera la familia ψ_t^*. □

Por lo tanto, $\bar{g}(t) = \psi_t^* g(t)$ efectivamente existe y es una solución al flujo de Ricci. Mas aún, notamos lo siguiente,

Observación 3.5. Si $\tilde{\Gamma}$ es la conexión de Levi-Civita de $\tilde{g}$ y Γ es la conexión de Levi-Civita de g,

$$\Delta_{\bar{g}(t),\tilde{g}}\psi_t = \Big((\psi_t^{-1})^*\bar{g}\Big)^{pq}\Big(-\Gamma_{pq}^k + \tilde{\Gamma}_{pq}^k\Big) = g^{pq}\Big(-\Gamma_{pq}^k + \tilde{\Gamma}_{pq}^k\Big),$$

por el lema (3.3). Entonces podemos expresar el flujo de mapa armónico mediante la EDO

$$\partial_t\psi_t = \Delta_{\bar{g}(t),\tilde{g}}\psi_t = -W(\phi_t(x), t).$$

Finalmente, haciendo uso de la observación probamos la unicidad.

Teorema 3.6. *La solución al flujo de Ricci en M con condición inicial g_0 es única.*

Demostración. Supongamos que $\bar{g}_1(t)$ y $\bar{g}_2(t)$ son soluciones al flujo de Ricci en M con condición inicial g_0 en un mismo intervalo de tiempo. Sea $(\psi_1)_t$ la solución al flujo de mapa armónico con respecto a $\bar{g}_1(t)$ y $\tilde{g}$, y $(\psi_2)_t$ la solución al flujo de mapa armónico con respecto a $\bar{g}_2(t)$ y $\tilde{g}$. Entonces,

$$g_1(t) := ((\psi_1)_t)_*\bar{g}_1(t)$$

$$g_2(t) := ((\psi_2)_t)_*\bar{g}_2(t)$$

son soluciones al flujo de Ricci-DeTurck. Como $g_1(0) = g_2(0)$, por unicidad de soluciones tenemos $g_1(t) = g_2(t)$ mientras ambas existan.

Entonces, $(\psi_1)_t$ y $(\psi_2)_t$ deben ser soluciones de la EDO

$$\partial_t(\psi_i)_t(p) = -W((\psi_i)_t(p), t),$$

con $i \in \{1, 2\}$ generadas por el mismo campo $W^k = g^{pq}\Big(\Gamma_{pq}^k - \tilde{\Gamma}_{pq}^k\Big)$.

Por lo tanto, debe ser $(\psi_1)_t = (\psi_2)_t$ mientras ambas existan, lo que implica

$$\bar{g}_1(t) = (\psi_1)_t^* g_1(t) = (\psi_2)_t^* g_2(t) = \bar{g}_2(t).$$

□

4 Existencia a tiempos largos

A partir de ahora haremos uso constante del tensor de Riemann y la notación $*$. El lector que no esté familiarizado con las definiciones anteriores puede referirse al Apéndice A, donde encontrará las herramientas necesarias para continuar con la lectura.

El objetivo de esta sección es probar el *Lema de Continuación*: si la solución maximal al flujo de Ricci está definida en un intervalo acotado $[0, T)$, entonces la curvatura de Riemann explota cuando nos acercamos al tiempo límite $t = T$.

Notamos que en dimensión tres, la cota requerida para el teorema es equivalente a tener acotado el tensor de Ricci, y en dimensión dos basta con acotar la curvatura escalar R. Este resultado es el que nos permitirá estudiar el comportamiento del flujo en superficies, pues acotar el tensor de Riemann en dimensión dos es equivalente a acotar la curvatura escalar, que como veremos más adelante satisface una ecuación de evolución relativamente sencilla.

Vamos a necesitar algunos resultados previos.

Lema 4.1. *Si A es un tensor que bajo el flujo de Ricci satisface la ecuación de evolución*

$$\frac{d}{dt}A = \Delta A + F,$$

donde F es un tensor del mismo tipo que A, entonces el cuadrado de su norma satisface

$$\frac{d}{dt}|A|^2 = \Delta|A|^2 - 2|\nabla A|^2 + F * A + \mathrm{Rc} * A * A.$$

Demostración. Sea g_t la métrica en tiempo t. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g_t(A, A) &= 2g_t\left(\frac{\partial}{\partial t}A, A\right) + \frac{\partial g_t}{\partial t}(A, A) \\ &= 2g_t(\Delta A + F, A) + \mathrm{Rc} * A * A \\ &= \Delta|A|^2 - 2|\nabla A|^2 + F * A + \mathrm{Rc} * A * A, \end{aligned} \tag{19}$$

donde el último término de la segunda línea se debe a que A evoluciona bajo el flujo de Ricci, y en la última línea usamos la identidad $\Delta|A|^2 = 2\langle \Delta A, A\rangle + 2|\nabla A|^2$. $\square$

Lema 4.2. *Si A es un tensor que bajo el flujo de Ricci satisface la ecuación de evolución*

$$\frac{\partial}{\partial t}A = \Delta A + F,$$

donde F es un tensor del mismo tipo que A, entonces su derivada covariante satisface

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla A = \Delta(\nabla A) + \nabla F + \mathrm{Rm} * \nabla A + \nabla \mathrm{Rc} * A.$$

Demostración. Como puede verse en (A.3),

$$\nabla A = \partial A + f(\Gamma, A),$$

donde $f(\Gamma, A)$ es una expresión de la forma $\Gamma * A$, que depende del tipo de A. Además, usando (B.2), tenemos

$$\partial_t \Gamma = (g^{-1}) * \nabla \mathrm{Rc}\,.$$

Se sigue que

$$
\begin{aligned}
\partial_t \nabla A &= \partial_t \partial A + \partial_t f(\Gamma, A) \\
&= \partial \partial_t A + f(\Gamma, \partial_t A) + f(\partial_t \Gamma, A) \text{ (por la regla del producto)} \\
&= \nabla(\partial_t A) + f(g^{-1} * \nabla \operatorname{Rc}, A) \text{ (pues } \partial_t A \text{ es un tensor del mismo tipo que } A) \\
&= \nabla(\Delta A + F) + \nabla \operatorname{Rc} * A \\
&= (\Delta \nabla A + \operatorname{Rm} * \nabla A + \nabla \operatorname{Rc} * A) + \nabla F + \nabla \operatorname{Rc} * A \\
&= \Delta \nabla A + \nabla F + \operatorname{Rm} * \nabla A + \nabla \operatorname{Rc} * A.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Donde en la quinta igualdad usamos la fórmula

$$[\nabla, \Delta] A := \nabla \Delta A - \Delta \nabla A = \operatorname{Rm} * \nabla A + \nabla \operatorname{Rc} * A,$$

que se obtiene de manipular la expresión (83) para la derivada de un tensor junto con la segunda identidad de Bianchi (ver por ejemplo [CK04], p.227). □

Notamos que por el lema (B.4) podemos escribir la evolución del tensor de Riemann como

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Rm} = \Delta \operatorname{Rm} + \operatorname{Rm} * \operatorname{Rm}. \tag{21}$$

Esto nos permite usar los lemas anteriores para obtener ecuaciones de evolución para las derivadas covariantes de la métrica.

Lema 4.3. *La ecuación de evolución para la k-ésima derivada covariante del tensor de Riemann bajo el flujo de Ricci es*

$$\frac{d}{dt} \nabla^k \operatorname{Rm} = \Delta \nabla^k \operatorname{Rm} + \sum_{j=0}^{k} \nabla^j \operatorname{Rm} * \nabla^{k-j} \operatorname{Rm}.$$

Demostración. Probamos la igualdad por inducción. La ecuación de evolución (21) es el caso base $k = 0$. Asumimos que se comple hasta $k > 0$ y aplicamos el lema (4.2) con $A = \nabla^k \operatorname{Rm}$ y

$$F = \sum_{j=0}^{k} \nabla^j \operatorname{Rm} * \nabla^{k-j} \operatorname{Rm}.$$

Esto muestra que

$$\frac{d}{dt} \nabla \nabla^k \operatorname{Rm} = \Delta(\nabla \nabla^k \operatorname{Rm}) + \nabla F + \operatorname{Rm} * \nabla(\nabla^k \operatorname{Rm}) + \nabla \operatorname{Rc} * \nabla^k \operatorname{Rm}.$$

Ahora notamos que todos los términos de reacción del lado derecho son de la forma $\nabla^i \operatorname{Rm} * \nabla^j \operatorname{Rm}$, donde $i + j = k + 1$. Entonces

$$\frac{d}{dt} \nabla^{k+1} \operatorname{Rm} = \Delta \nabla^{k+1} \operatorname{Rm} + \sum_{j=0}^{k+1} \nabla^j \operatorname{Rm} * \nabla^{k+1-j} \operatorname{Rm},$$

completando el paso inductivo. □

Corolario 4.4. *Bajo el flujo de Ricci, el cuadrado de la norma de la k-ésima derivada covariante del tensor de curvatura de Riemann satisface la ecuación de evolución*

$$\frac{d}{dt}|\nabla^k \operatorname{Rm}|^2 = \Delta|\nabla^k \operatorname{Rm}|^2 - 2|\nabla^{k+1} \operatorname{Rm}|^2 + \sum_{j=0}^{k} \nabla^j \operatorname{Rm} * \nabla^{k-j} \operatorname{Rm} * \nabla^k \operatorname{Rm}. \tag{22}$$

Demostración. Aplicamos el lema (4.1) con $A = \nabla^k \operatorname{Rm}$ y

$$F = \sum_{j=0}^{k} \nabla^j \operatorname{Rm} * \nabla^{k-j} \operatorname{Rm},$$

obteniendo

$$\frac{d}{dt}|\nabla^k \operatorname{Rm}|^2 = \Delta|\nabla^k \operatorname{Rm}|^2 - 2|\nabla^{k+1} \operatorname{Rm}|^2 + F * \nabla^k \operatorname{Rm} + \operatorname{Rc} * (\nabla^k \operatorname{Rm}) * (\nabla^k \operatorname{Rm}).$$

Notamos que el tercer y cuarto término del lado derecho son de la forma $\nabla^i \operatorname{Rm} * \nabla^j \operatorname{Rm} * \nabla^k \operatorname{Rm}$, con $i + j = k$, y entonces

$$\frac{d}{dt}|\nabla^k \operatorname{Rm}|^2 = \Delta|\nabla^k \operatorname{Rm}|^2 - 2|\nabla^{k+1} \operatorname{Rm}|^2 + \sum_{j=0}^{k} \nabla^j \operatorname{Rm} * \nabla^{k-j} \operatorname{Rm} * \nabla^k \operatorname{Rm}.$$

□

4.1 Estimativos Bernstein-Bando-Shi

Aplicaremos ahora el principio del máximo a las ecuaciones de evolución recién obtenidas para poder acotar las derivadas de la curvatura. Queremos conseguir estas cotas asumiendo que la curvatura está acotada por una constante, es decir $|\operatorname{Rm}| < K$ para alguna constante K. Hay dos problemas al querer aplicar el principio del máximo a la ecuación de evolución obtenida para las derivadas de la curvatura: primero, no podemos garantizar ninguna condición inicial sobre las derivadas de la misma si sólo tenemos una cota en la curvatura, y segundo, la ecuación de evolución tiene términos que no sabemos cómo controlar (los que aparecen bajo la sumatoria en (22)).

El primer problema será solucionado probando cotas dependientes del tiempo sobre las derivadas (que divergen en $t = 0$). Veremos durante la prueba cómo sobrepasar el segundo problema.

Teorema 4.5 (Estimativos Bernstein-Bando-Shi). *Sea $(M, g(t))$ una solución al flujo de Ricci en una variedad cerrada de dimensión n. Entonces para cada $\alpha > 0$ y $m \in \mathbb{N}$, existe una constante $C_m(m, n, \text{máx}\{\alpha, 1\})$ tal que si*

$$|\operatorname{Rm}(x,t)|_{g(t)} \leq K \textit{ para todo } t \in (0, \frac{\alpha}{K}],$$

se cumple

$$|\nabla^m \operatorname{Rm}(x,t)|_{g(t)} \leq \frac{C_m K}{t^{m/2}} \textit{ para todo } t \in (0, \frac{\alpha}{K}].$$

Demostración. Probaremos el resultado por inducción en m. Para $m = 0$ el resultado es cierto por hipótesis, con $C_0 = 1$. Asumimos que se cumple para todo $p \leq m-1$. El corolario anterior nos muestra que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|\nabla^m \operatorname{Rm}| &= \Delta|\nabla^m \operatorname{Rm}|^2 - 2|\nabla^{m+1} \operatorname{Rm}|^2 + \sum_{j=0}^{m} \nabla^j \operatorname{Rm} * \nabla^{m-j} \operatorname{Rm} * \nabla^m \operatorname{Rm} \\
&\leq \Delta|\nabla^m \operatorname{Rm}|^2 - 2|\nabla^{m+1} \operatorname{Rm}|^2 + \sum_{j=0}^{m} c_{mj} |\nabla^j \operatorname{Rm}||\nabla^{m-j} \operatorname{Rm}||\nabla^m \operatorname{Rm}| \\
&\leq \Delta|\nabla^m \operatorname{Rm}|^2 - 2|\nabla^{m+1} \operatorname{Rm}|^2 + \left(\sum_{j=1}^{m-1} c_{mj} \frac{C_j}{t^{j/2}} \frac{C_{m-j}}{t^{(m-j)/2}} \right) K^2 |\nabla^m \operatorname{Rm}| \\
&+ (c_{m0} + c_{mm}) K |\nabla^m \operatorname{Rm}|^2 \\
&\leq \Delta|\nabla^m \operatorname{Rm}|^2 - 2|\nabla^{m+1} \operatorname{Rm}|^2 + C'_m K |\nabla^m \operatorname{Rm}|^2 + \frac{C''_m}{t^{m/2}} K^2 |\nabla^m \operatorname{Rm}|^2, \qquad (23)
\end{aligned}$$

para $t \in (0, \frac{\alpha}{K}]$, donde C'_m, C''_m son constantes que dependen únicamente de m y n, y usamos la hipótesis inductiva para ir de la segunda a la tercer línea. Podemos completar el cuadrado en la variable$|\nabla^m \operatorname{Rm}|^2$ del lado derecho y usar $(a+b)^2/2 \leq a^2 + b^2$ para obtener

$$\frac{d}{dt}|\nabla^m \operatorname{Rm}|^2 \leq \Delta|\nabla^m \operatorname{Rm}|^2 - 2|\nabla^{m+1} \operatorname{Rm}|^2 + \bar{C}_m K \left(|\nabla^m \operatorname{Rm}|^2 + \frac{K^2}{t^m} \right),$$

para alguna constante $\bar{C}_m$.

Debemos encontrar ahora una cota superior para $t^m |\nabla^m \operatorname{Rm}|^2$. Observamos que esta cantidad es nula en $t = 0$ y entonces para aplicar el principio del máximo basta mostrar que los términos de reacción en la ecuación de evolución hacen que esta cantidad decrezca. El problema es que esta cantidad satisface

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(t^m |\nabla^m \operatorname{Rm}|^2) \leq &\Delta(t^m |\nabla^m \operatorname{Rm}|^2) - 2t^m |\nabla^{m+1} \operatorname{Rm}|^2 + \\
&(\bar{C}_m K t + m) t^{m-1} |\nabla^m \operatorname{Rm}|^2 + \bar{C}_m K^3,
\end{aligned} \qquad (24)$$

cuyos términos de reacción son no negativos.

Para solucionar esto, usamos el término $-2|\nabla^{k+1} \operatorname{Rm}|^2$ en la ecuación de evolución del corolario previo. Si agregamos un término de la forma $t^{m-1}|\nabla^{m-1} \operatorname{Rm}|^2$ (que está acotado por una constante por hipótesis) podemos cancelar los términos de la forma $t^m |\nabla^m \operatorname{Rm}|^2$. Al hacer esto, introduciremos términos nuevos en $t^{m-1}|\nabla^{m-1} \operatorname{Rm}|^2$, por lo que tenemos que agregar una nueva derivada para anularlo y volvemos a repetir esto con el nuevo término. Definimos

$$G = t^m |\nabla^m \operatorname{Rm}|^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{mj} t^j |\nabla^j \operatorname{Rm}|^2,$$

donde α_{mj} son constantes a determinar para cancelar los términos de la forma deseada. Por la ecuación (24),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}G \leq& \Delta G + (\bar{C}_m Kt + m)t^{m-1}|\nabla^m \operatorname{Rm}|^2 + \bar{C}_m K^3 \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{mj} - 2t^j|\nabla^{j+1} \operatorname{Rm}|^2 + (\bar{C}_j Kt + j)t^{j-1}|\nabla^j \operatorname{Rm}|^2 + \bar{C}_j K^3].\end{aligned} \tag{25}$$

Por hipótesis inductiva existen D_j que dependen de j, n para $1 \leq j \leq m-1$ tal que

$$\bar{C}_j Kt^j|\nabla^j \operatorname{Rm}|^2 + \bar{C}_j K^3 \leq D_j K^3,$$

para todo $t \in [0, \frac{\alpha}{K}]$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}G &\leq \Delta G + (\bar{C}_m Kt + m)t^{m-1}|\nabla^m \operatorname{Rm}|^2 + \bar{C}_m K^3 \\ &\quad + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{mj}\big[-2t^j|\nabla^{j+1} \operatorname{Rm}|^2 + jt^{j-1}|\nabla^j \operatorname{Rm}|^2 + D_j K^3\big] \\ &= \Delta G + (\bar{C}_m Kt + m - 2\alpha_{m,m-1})t^{m-1}|\nabla^m \operatorname{Rm}|^2 \\ &\quad + \sum_{j=0}^{m-1}(j\alpha_{mj} - 2\alpha_{m,j-1})t^{j-1}|\nabla^j \operatorname{Rm}|^2 + \bar{C}_m K^3 + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{mj} D_j K^3.\end{aligned} \tag{26}$$

Ahora elegimos los α_{mj} tal que los términos en esta ecuación se cancelen: tomamos $\alpha_{m,m-1}$ tal que

$$0 = \bar{C}_m \alpha + m - 2\alpha_{m,m-1} \geq \bar{C}_m Kt + m - 2\alpha_{m,m-1},$$

donde el segundo paso se sigue porque $t \in (0, \frac{\alpha}{K}]$. Ahora definimos $\alpha_{m,m-2}, \alpha_{m,m-3} \ldots \alpha_{m0}$ en ese orden, con cada paso tal que

$$j\alpha_{mj} - 2\alpha_{m,j-1} = 0.$$

Si definimos

$$B_m := \bar{C}_m + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{mj} D_j,$$

la ecuación de evolución puede escribirse

$$\frac{d}{dt}G \leq \Delta G + B_m K^3.$$

Como el término de reacción es una constante, a lo sumo crece linealmente. Como $G = \alpha_{m0}|\operatorname{Rm}|^2 \leq \alpha_{m0} K^2$ en $t = 0$, el principio escalar del máximo nos asegura que

$$G < \alpha_{m0} K^2 + B_m K^3 t < (\alpha_{m0} + B_m \alpha)K^2 := C_m^2 K^2,$$

para $t \in (0, \frac{\alpha}{K}]$, con $C_m = C_m(m, n, \text{máx}\{\alpha, 1\})$. Por lo tanto,

$$|\nabla^m \operatorname{Rm}| \leq \sqrt{\frac{G}{t^m}} \leq \frac{C_m K}{t^{m/2}} \text{ para } t \in (0, \frac{\alpha}{K}],$$

como queríamos probar.

□

4.2 Equivalencia uniforme con curvatura acotada

Pidiendo que la curvatura esté acotada en un intervalo, podemos ver que las métricas son uniformemente equivalentes para todo tiempo. Esto se debe a que si $|\operatorname{Rc}| \leq K$, con $t \in [0, T)$, entonces se tiene la cota

$$e^{-KT} g(0) \leq g(t) \leq e^{KT} g(0).$$

Para ver esto comenzamos probando el siguiente.

Lema 4.6. *Si M es una variedad cerrada, $g(t)$ es una familia de métricas en M y existe $C > 0$ tal que para todo $x \in M$ se cumple*

$$\int_0^T \left| \frac{d}{dt} g(x,t) \right|_{g(t)} dt < C,$$

entonces se cumple

$$e^{-C} g(0) \leq g(t) \leq e^C g(0).$$

Además las métricas $g(t)$ convergen uniformemente a una métrica límite $g(T)$ que es continua.

Demostración. Sea $x \in M$, $v \in T_x M$ y $\tau \in [0, T)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left| \log \frac{|v|^2_{g(\tau)}}{|v|^2_{g(0)}} \right| &= \left| \int_0^\tau \frac{d}{dt} \log[|v|^2_{g(t)}] dt \right| = \left| \int_0^\tau \frac{\frac{d}{dt} g(t)(v,v)}{g(t)(v,v)} dt \right| \\
&\leq \int_0^\tau \left| \frac{d}{dt} g(t) \left(\frac{v}{|v|_{g(t)}}, \frac{v}{|v|_{g(t)}} \right) \right| dt \qquad (27) \\
&\leq \int_0^\tau \left| \frac{d}{dt} g(t) \right|_{g(t)} dt \leq C.
\end{aligned}$$

Donde el penúltimo paso se sigue de $|T(U,U)| \leq |T|_g$ para todo 2-tensor T y U vector unitario.

Exponenciando, obtenemos

$$e^{-C} g(0)(v,v) \leq g(\tau)(v,v) \leq e^C g(0)(v,v). \qquad (28)$$

Para todo vector unitario v. Luego la igualdad vale para todo $v \in T_x M$.

De este hecho, se deduce que

$$\int_0^T \left| \frac{d}{dt} g(x,t) \right|_{g(0)} dt \leq C'$$

para alguna constante C'. Observamos que ahora estamos tomando normas respecto a $g(0)$ en todo tiempo y no respecto a $g(t)$. Si definimos

$$g(x,T) = g(x,0) + \int_0^T \frac{d}{dt} g(x,t) dt$$

la integral existe pues las métricas son suaves y el integrando es absolutamente integrable respecto a la norma inducida por $g(0)$. Luego

$$\left| g(x,t) - g(x,T) \right|_{g(0)} \leq \int_t^T \left| \frac{d}{dt} g(x,t) \right|_{g(0)} dt \to 0$$

cuando $t \to T$ para cada $x \in M$.

Como M es compacta, la convergencia es uniforme en M; luego $g(t) \to g(T)$ uniformemente, por lo que $g(T)$ es continua.

Tomando límite en (28), tenemos que

$$e^{-C}g(0)(v,v) \leq g(T)(v,v) \leq e^{C}g(0)(v,v),$$

y por lo tanto $g(T)$ es definida positiva.

Entonces, $g(t)$ converge a una métrica Riemanniana $g(T)$ que es continua y uniformemente equivalente a $g(0)$. □

Corolario 4.7. *Sea $(M, g(t))$ una solución del flujo de Ricci en una variedad cerrada. Si $|Rm|_g$ es acotado en $[0,T)$ con $T < \infty$, entonces $g(t)$ converge uniformemente cuando $t \to T$ a una métrica continua $g(T)$ que es uniformemente equivalente a $g(0)$.*

Demostración. Toda cota en $|Rm|_g$ implica una cota en $|Rc|_g$ y por lo tanto una en $|\frac{d}{dt}g|_g$ por definición del flujo de Ricci. Entonces existe $C > 0$ tal que

$$\int_0^T \left|\frac{d}{dt}g(x,t)\right|_{g(t)} dt < C,$$

y el lema anterior se aplica. □

4.3 Control de las derivadas a través del flujo

Hasta ahora mostramos que en todo intervalo finito donde la curvatura está acotada tenemos una métrica límite $g(T)$, y es continua. Queremos mostrar que esta métrica es suave, porque de esta manera podríamos usar los resultados de existencia a tiempos cortos para métricas suaves en tiempo cero, extendiendo nuestra solución a un tiempo $T + \epsilon$.

Para hacer esto, es necesario asegurarse de que las derivadas espaciales de $g(t)$ no explotan cerca de T, y es en este punto donde las estimativas de Bernstein-Bando-Shi entran en juego. Utilizando el teorema, conseguiremos cotas sobre las derivadas de la curvatura asumiendo solamente que la curvatura está acotada.

Es importante recalcar que estos estimativos no nos dicen nada en $t = 0$. Es decir, para un tensor de curvatura genérico, acotar la curvatura no nos dice nada sobre cómo se comportan sus derivadas: es sólo cuando el flujo de Ricci comienza actuar sobre la métrica que podemos empezar a controlar las derivadas. Esto no será un problema, pues necesitamos obtener una cota para el tiempo límite T, sin cuidado de lo que ocurre en $t = 0$. Podemos considerar entonces que el flujo de Ricci comienza en $T - \epsilon$ en vez de en 0. Esta observación nos permite probar el siguiente.

Corolario 4.8. *Sea $(M, g(t))$ una solución del flujo de Ricci en una variedad compacta de dimensión n. Si existen $\beta, K > 0$ tal que*

$$|Rm(x,t)|_{g(t)} \leq K \text{ para todo } t \in [0,T],$$

con $T > \beta/K$, entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ existe una constante B_m que depende sólo de m,n y $min\{\beta, 1\}$ tal que

$$|\nabla^m Rm(x,t)|_{g(t)} \leq B_m K^{1+\frac{m}{2}} \text{ para todo } t \in \left[\frac{min\{\beta,1\}}{K}, T\right].$$

Demostración. Sea $\beta_1 = min\{\beta, 1\}$ y $t_0 \in [\beta_1/K, T]$. Consideramos el flujo comenzando en $T_0 = t_0 - \beta_1/K$, y aplicando los estimativos de BBS a este flujo de Ricci con $\alpha = \beta_1$, obtenemos que

$$|\nabla^m Rm| \leq \frac{C_m K}{(t - T_0)^{m/2}},$$

donde C_m depende solo de m, n y $min\{\alpha, 1\}$. Por lo tanto en $t = t_0$ tenemos

$$|\nabla^m Rm| \leq \frac{C_m K}{(\frac{\beta_1}{K})^{m/2}} = \frac{C_m}{\beta_1^m} K^{1+m/2},$$

de donde se sigue la tesis. □

Teniendo las derivadas de la curvatura acotadas, podemos acotar las derivadas espaciales de la métrica.

Proposición 4.9. *Si $g(t)$ es una solución del flujo de Ricci en una variedad cerrada M, y sea (x^i) un sistema de coordenadas locales en $U \subset M$. Si existe un $K > 0$ tal que*

$$|\operatorname{Rm}(x, t)|_{g(t)} \leq K \text{ para todo } t \in [0, T),$$

entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ existen constantes C_m, C'_m dependiendo únicamente de la carta tal que

$$|\partial^m g(x, t)| \leq C_m,$$

y también

$$|\partial^m \operatorname{Rc}(x, t)| \leq C'_m,$$

para todo $(x, t) \in U \times [0, T)$, donde la norma se toma con respecto a la métrica Euclídea en el sistema de coordenadas (x^i).

Recordamos que por $\partial^m g$ nos referimos al (m+2,0)-campo tensorial definido únicamente en la carta U, que tiene coordenadas $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_m} g_{pq}$ con respecto al sistema (x^i) elegido. La métrica Euclídea definida en el sistema de coordenadas U es la métrica cuyas coordenadas son δ_{ij} con respecto al sistema (x^i).

Demostración. En esta prueba, nos referiremos a los símbolos de Christoffel Γ^k_{ij} como las coordenadas respecto a (x^i) de un tensor Γ definido únicamente en U.

Observamos que por el corolario anterior para cada $m \in \mathbb{N}$ hay una cota superior uniforme en $|\nabla^m \operatorname{Rc}|$ en el intervalo $(\beta/K, T)$. También tenemos una cota superior de la misma cantidad en el intervalo $[0, \beta/K]$ porque el intervalo es compacto, por lo que para todo $x \in M$ y todo $t \in [0, T)$, existe una constante D_m tal que

$$|\nabla^m \operatorname{Rc}(x, t)| \leq D_m. \tag{29}$$

Probaremos por inducción que existen constantes P_m, Q_m y R_m para cada $m \in \mathbb{N}$ tal que

1. $|\partial^{m-1}\Gamma| \leq P_m$ si $m \geq 1$,
2. $|\partial^m \operatorname{Rc}| \leq Q_m$,
3. $|\partial^m g| \leq R_m$,

para todo $t \in [0, T)$.

Para el caso $m = 0$, (2) se sigue de la cota $|\operatorname{Rm}| \leq K$, y (3) sigue del corolario 4.7.

Supongamos entonces que se cumplen las tres con $m \leq p-1$. Probaremos que entonces es cierto para $p = m$. Comenzamos viendo(1): es claro que existe una constante C tal que $|\partial^{p-1}\Gamma| \leq C$ en $t = 0$ por ser M compacta.

Si tenemos una cota para $|\partial^m g|$, entonces tenemos una para $|\partial^m(g^{-1})|$ diferenciando la fórmula $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$ m veces. Usando la ecuación de evolución para los símbolos de Christoffel (B.2), obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_t \partial^{p-1}\Gamma &= \partial^{p-1}(\partial_t \Gamma) \\ &= \partial^{p-1}(g^{-1} * \nabla \operatorname{Rc}) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \partial^{p-i-1}(g^{-1}) * \partial^i \nabla \operatorname{Rc}. \end{aligned} \tag{30}$$

Como ya tenemos cotas para las derivadas de g^{-1}, basta acotar los términos $\partial^i \nabla \operatorname{Rc}$. Para $i \leq p-1$ tenemos por el lema A.3,

$$\partial^i \nabla \operatorname{Rc} = \nabla^{i+1} \operatorname{Rc} + \mathop{\ast}_{\substack{0 \leq j \leq i-1 \\ k \leq i}} \big(\partial^j \Gamma, \partial^k \operatorname{Rc}\big).$$

Por la desigualdad (29), tenemos una cota en $\nabla^{i+1}\operatorname{Rc}$, y una cota superior inductiva en todos los otros términos del lado derecho pues $j \leq i-1 \leq p-2$ y $k \leq i \leq p-1$. Por lo tanto, $|\partial^i \nabla \operatorname{Rc}| \leq C$ para $i \leq p-1$, lo que implica que existe una constante D tal que

$$|\partial_t \partial^{p-1}\Gamma| \leq D.$$

Entonces $|\partial^{p-1}\Gamma|$ está acotada en $t = 0$, y no crece más que lineal en el intervalo $[0, T)$. Por lo tanto,

$$|\partial^{p-1}\Gamma| \leq P_p,$$

en el intervalo $[0, T)$ para alguna constante P_p, lo que completa (1).

Nuevamente, por el lema A.3, podemos calcular

$$\partial^p \operatorname{Rc} = \nabla^p \operatorname{Rc} + \mathop{\ast}_{\substack{j \leq p-1 \\ k \leq p-1}} \big(\partial^j \Gamma, \partial^k \operatorname{Rc}\big).$$

Y todos los términos del lado derecho están acotados inductivamente, con la excepción de $\partial^{p-1}\Gamma$, el cual acabamos de mostrar que estaba acotado como parte del paso inductivo; por lo que tenemos

$$|\partial^p \operatorname{Rc}| \leq Q_p,$$

en el intervalo $[0, T)$ para alguna constante Q_p, completando la prueba de (2).

Finalmente,

$$|\partial_t \partial^p g| = |-2\partial^p \operatorname{Rc}| \leq A$$

para alguna constante $A > 0$ por la segunda parte del paso inductivo, y como estamos en un intervalo finito, $|\partial^p g| \leq R_p$ para alguna constante R_p, concluyendo la prueba de (3), y por lo tanto, probando el resultado. $\square$

Corolario 4.10. *La métrica $g(T)$ del corolario 4.7 es suave y las métricas $g(t)$ convergen uniformemente en toda norma C^k a $g(T)$ cuando $t \to T$.*

Demostración. Sea $x \in M$, y fijemos un sistema de coordenadas (X^i) en un entorno U de x. Por definición del flujo de Ricci, se tiene

$$g_{ij}(x,T) = g_{ij}(x,t) - 2\int_t^T R_{ij}(x,s)ds$$

para todo $t \in [0,T)$. Por la proposición anterior, $\left|\frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{ij}\right|$ y $\left|\frac{\partial}{\partial x^\alpha} R_{ij}\right|$ están acotados unformemente en $U \times [0,T)$ para todo multiíndice α y por lo tanto podemos derivar dentro de la integral

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{ij}\right)(x,T) = \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{ij}\right)(x,t) - 2\int_t^T \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} R_{ij}\right)(x,s)ds \tag{31}$$

para todo $x \in U$. Por lo tanto, $\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{ij}\right)(x,T)$ existe para todo α, luego $g(T)$ es suave.

Resta ver que la convergencia es uniforme en toda norma C^k, en el sentido de que podemos elegir un cubrimiento de M por cartas tal que para todo multiíndice α y todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{ij}(x,T) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{ij}(x,t)\right|_{g(x,T)} < \epsilon$$

en toda carta del cubrimiento elegido, para todo $t \in [T-\delta, T)$ y $x \in M$.

Dado que M es compacta podemos elegir una cantidad finita de cartas ϕ de forma tal que M sea cubierta la imagen de la bola unitaria cerrada a través de las ϕ. Como las bolas son compactas, la métrica euclídea en cada una es equivalente a $g(T)$. Como son finitas, las métricas euclideas son uniformemente equivalentes a $g(T)$. Luego basta mostrar que la ecuación vale si se toma la norma respecto a una sola de las métricas euclídeas en cada punto x en vez de mostrarlo con respecto a $g(x,t)$.

Por la proposición anterior, para cada carta ϕ elegida existe D_α^ϕ con $\left|\frac{\partial}{\partial x^\alpha} R_{ij}\right| \leq D_\alpha^\phi$ con respecto a la norma euclídea.

Usando que son finitas, fijado α, podemos tomar el máximo de las D_α^ϕ sobre las ϕ que cubren M. Sea D este máximo.

Uniendo esto con la ecuación (31), obtenemos

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{ij}(x,T) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{ij}(x,t)\right| &= 2\left|\int_t^T \frac{\partial}{\partial x^\alpha} R_{ij}(x,s)ds\right| \\ &\leq 2\int_t^T \left|\frac{\partial}{\partial x^\alpha} R_{ij}(x,s)\right| ds \\ &\leq 2D(T-t).\end{aligned} \tag{32}$$

Por lo que $g(t) \to g(T)$ uniformemente en toda norma C^k cuando $t \to T$. □

4.4 El lema de continuación

Probamos ahora el objetivo principal de esta sección.

Teorema 4.11. *Sea $g(t)$ una solución maximal para el flujo de Ricci (normalizado o sin normalizar) en una variedad cerrada, definida en el intervalo $[0,T)$. Si existe algún $K<\infty$ tal que para todo $t\in[0,T)$*

$$|\operatorname{Rm}(t)|_{g(t)} \leq K.$$

Entonces $T=+\infty$.

Demostración. Supongamos que $|\operatorname{Rm}|_{g(t)} \leq K$ para todo $t\in[0,T)$. Luego, por los corolarios 4.7 y 4.10 tenemos que $g(t)$ converge uniformemente en toda norma C^k a una métrica suave h.

Como $g(T)$ es suave, podemos encontrar una solución al flujo de Ricci con $g(0)=h$. Por la existencia a tiempos cortos, tenemos entonces que existe un $\epsilon>0$ tal que la solución la ecuación con $g(0)=h$ existe en $[0,\epsilon)$.

Por la unicidad de la solución, como $g(T)=h$, podemos extender la solución de nuestro problema inicial a $[0,T+\epsilon)$. Esta extensión es suave pues todas las derivadas espaciales son continuas en $t=T$ debido a la convergencia en C^k.

De lo anterior se sigue que entonces también son continuas todas las derivadas espacio-temporales de $g(t)$ en $t=T$, pues el flujo de Ricci permite escribir las derivadas temporales de toda cantidad relacionada a la métrica en función de las derivadas espaciales de esas cantidades, las que sabemos que son continuas.

Por lo tanto, la solución definida en $[0,T)$ no era maximal, por lo que llegamos a una contradicción. Se sigue entonces que debe ser $T=+\infty$.

$\square$

Entonces, si el flujo de Ricci no está definido para todo tiempo, debe ser porque la curvatura de Riemann no está acotada. Es por esta observación que para probar la existencia a tiempos largos basta ver que bajo el flujo la curvatura de Riemann permanece acotada.

5 Flujo de Ricci en dimensión 2

De ahora en más nos enfocaremos únicamente en el flujo de Ricci normalizado en dimensión 2, por lo que cualquier referencia al flujo de Ricci será en realidad una referencia al flujo de Ricci normalizado.

En este caso, como $\mathrm{Rc} = \frac{1}{2}Rg$, la ecuación de evolución es

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}g = -(R-r)g, \\ g(0) = g_0. \end{cases} \tag{33}$$

Por la simplicidad de esta ecuación, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 5.1. *El flujo de Ricci en dimensión 2 preserva la clase conforme.*

Demostración. Sea $g(t)$ solución al flujo de Ricci. Entonces

$$g(x,t) := e^{-\int_0^t (R-r)_{g(s)}(x)ds} g(x,0),$$

lo que concluye la prueba. □

Por lo tanto, si mostramos que el flujo de Ricci converge siempre a una métrica de curvatura constante, estamos mostrando que dada una métrica en M, existe un camino suave a una métrica de curvatura constante dentro de la misma clase conforme.

Además, como puede verse en B.7, $r = 4\pi\chi(M)/A$, donde A es el área inicial de M. Por lo tanto la condición $\chi(M) < 0$ es equivalente a $r < 0$, $\chi(M) > 0$ es equivalente a $r > 0$ y $\chi(M) = 0$ es equivalente a $r = 0$.

Nuestro objetivo será probar los siguientes teoremas.

Teorema 5.2. *Sea M una superficie compacta. Entonces la solución existe para todo tiempo.*

Teorema 5.3. *Si $\chi(M) \leq 0$, la métrica converge en C^∞ a una de curvatura constante.*

Teorema 5.4. *Si $\chi(M) > 0$ y $R(x,0) > 0$ para todo $x \in M$, la métrica converge en C^∞ a una de curvatura constante.*

Repasemos un poco lo visto hasta ahora; por la existencia y unicidad a tiempos cortos, sabemos que para toda métrica tenemos una única solución definida en $[0,T)$ para algún $T > 0$. Además, ya vimos en (4.11) que para probar que las soluciones se pueden extender para todo tiempo basta probar que la curvatura de Riemann no explota, y en dimensión 2 esto es equivalente a ver que la curvatura escalar no explota. Por esto último, nos restringiremos únicamente al estudio de la ecuación de evolución de la curvatura escalar en dimensión dos, tratando de encontrar cotas superiores e inferiores para la misma cuando evoluciona a través del flujo.

Finalmente, para 5.3 y 5.4 debemos probar que la misma está acotada para todo tiempo, que converge a una constante y que la convergencia se da en la topología C^k para todo k.

Como puede verse en (B.7), la ecuación de evolución para la curvatura escalar es

$$\frac{d}{dt}R = \Delta R + R(R-r) \tag{34}$$

por lo que a partir de ahora nos restringiremos al estudio de esta ecuación.

5.1 Existencia de la solución para todo tiempo

Empecemos por aplicarle el principio del máximo a la ecuación anterior. Sea $R_{min} := \text{mín}\{R_{g_0}(x) : x \in M\}$, es decir, el mínimo de la curvatura escalar de la métrica inicial, que sabemos además que se alcanza porque M es compacta. Considerando la EDO asociada

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}f = -(f-r)f \\ f(0) = R_{min} \end{cases} \tag{35}$$

tenemos que $f(t) \leq R(t)$ mientras que f y R existan.

Estudiemos las soluciones de la EDO anterior. Si $r \neq 0$ y $R_{min} \neq 0$, se tiene

$$f(t) = \frac{r}{1 - (1 - r/R_{min})\, e^{rt}}.$$

Si $r = 0$, la solución es

$$f(t) = \frac{R_{min}}{1 - R_{min}t}$$

y si $R_{min} = 0$, la solución es

$$f(t) = 0.$$

Uniendo estos resultados, se tiene

Proposición 5.5. *Sea $g(t)$ una solución al flujo normalizado en una superficie compacta. Entonces mientras la solución exista, R estará acotada por abajo de acuerdo a los siguientes casos.*

$$\begin{cases} R - r \geq \dfrac{r}{1-(1-r/R_{min})\, e^{rt}} - r \geq (R_{min} - r)e^{rt} & \textit{Si } r < 0 \\ R \geq \dfrac{R_{min}}{1 - R_{min}t} \geq -\dfrac{1}{t} & \textit{Si } r = 0 \\ R \geq \dfrac{r}{1-(1-r/R_{min})\, e^{rt}} \geq R_{min}e^{-rt} & \textit{Si } r > 0 \textit{ y } R_{min} < 0 \end{cases} \tag{36}$$

Notamos que en los tres casos, el término de la derecha tiende a cero cuando $t \to \infty$.

Analicemos estos resultados. Si iniciamos con curvatura promedio negativa, entonces R_{min} tiende a r exponencialmente rápido. Para el caso con curvatura promedio cero, R_{min} tiende a cero. Como la solución para $R_{min} = 0$ es $f(t) = 0$, si la curvatura escalar promedio es positiva y a partir de algún momento R_{min} se hace no negativo, permanece no negativo para todo tiempo. Finalmente, si la curvatura escalar promedio es positiva y R_{min} es negativo inicialmente, la cota inferior tiende a cero exponencialmente rápido.

Ya tenemos entonces las cotas inferiores para la evolución de la curvatura en todos los casos posibles, por lo que la mitad del trabajo necesario para aplicar el teorema (4.11) está hecho gracias al principio del máximo.

Si aplicamos de nuevo el principio del máximo pero esta vez para obtener cotas superiores utilizando R_{max} en vez de R_{min}, notamos que las cotas explotan en tiempo finito siempre que $R_{max} > max\{0, r\}$, por lo que las cotas superiores requieren un poco más de trabajo.

Para solucionar este problema, necesitamos una nueva herramienta.

Definición 5.1. Una solución $g(t)$ del flujo de Ricci normalizado es *auto-similar* si existe una familia a un parámetro de difeomorfismos $\{\phi(t)\}$ tal que

$$g(t) = \phi(t)^* g(0).$$

Observamos que si $\{X(t)\}$ es la familia de campos vectoriales generados por la familia $\{\phi(t)\}$ (es decir, $X(t) = \dot{\phi}(t)$), diferenciando la definición anterior con respecto al tiempo obtenemos

$$\frac{d}{dt} g = \mathcal{L}_X g.$$

Utilizando la ecuación del flujo, podemos reescribir esta igualdad como

$$(R - r)g_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i, \tag{37}$$

y si además existe una función $f(x,t)$ tal que $X = -\nabla f$ obtenemos

$$(R - r)g_{ij} = 2\nabla_i \nabla_j f. \tag{38}$$

Tenemos entonces dos nuevas definiciones

Definición 5.2. Decimos que $g(t)$ es un *solitón de Ricci* si satisface (37), y decimos que $g(t)$ es un *solitón de Ricci de gradientes* si satisface (38).

Observamos que tomando la traza en la definición de solitón de Ricci, obtenemos

$$\Delta f = R - r \tag{39}$$

En caso de obtener una función que cumpla lo anterior, decimos que f es un *potencial de la curvatura.*

Es importante observar que como $\int_M (R - r) d\mu = 0$, el teorema de descomposición de Hodge nos garantiza la existencia de un potencial f suave para toda métrica inicial en una superficie compacta y el mismo es único módulo adición de una función $c(t)$ que depende únicamente del tiempo, pues las funciones armónicas en M son constantes. Veamos qué podemos decir de la ecuación de evolución de f. Para esto necesitamos un lema técnico sobre conmutadores.

Lema 5.6. *Sea M una variedad de dimensión n y supongamos que $\frac{d}{dt} g = fg$. Entonces*

$$\left[\frac{d}{dt}, \Delta\right] \phi = -f\Delta\phi - \left(1 - \frac{n}{2}\right) \langle \nabla f, \nabla \phi \rangle.$$

Demostración. Sea ψ una función test. Entonces

$$\int_M (\Delta\phi)\psi d\mu = -\int_M g^{ij} \partial_i \phi \partial_j \psi d\mu.$$

Recordamos que $\frac{d}{dt} g^{ij} = -f g^{ij}$ y $\frac{d}{dt} d\mu = \frac{n}{2} f d\mu$. Diferenciando obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{d}{dt}\Delta\phi\right) \psi d\mu + \int \frac{n}{2} f(\Delta\phi)\psi d\mu = \\
&= -\int g^{ij} \partial_i \left(\frac{d}{dt}\phi\right) \partial_j \psi d\mu - \int \left(1 - \frac{n}{2}\right) f g^{ij} \partial_i \phi \partial_j \psi d\mu \\
&= \int \Delta \left(\frac{d}{dt}\phi\right) \psi d\mu - \int \left(1 - \frac{n}{2}\right) f(\Delta\phi)\psi d\mu \\
&\quad - \int \left(1 - \frac{n}{2}\right) g^{ij} \partial_i f \partial_j \phi \psi d\mu.
\end{aligned}$$

Finalmente, reordenando la igualdad anterior se obtiene

$$\int \left(\left[\frac{d}{dt}, \Delta \right] \psi \right) \phi d\mu = \int \left(-f \Delta \psi - \left(1 - \frac{n}{2} \right) \langle \nabla f, \nabla \phi \rangle \right) \psi d\mu.$$

Como esto vale para toda función test ϕ, queda probada la igualdad. □

Observación 5.7. Cuando $n = 2$, el término que involucra el gradiente de f desaparece. Luego para el flujo de Ricci en superficies se tiene que $f = r - R$ por la ecuación (33) y se cumple

$$\frac{d}{dt} \Delta \phi = \Delta \left(\frac{d}{dt} \phi \right) + (R - r) \Delta \phi. \tag{40}$$

Lema 5.8. *Dado f_0 un potencial de la curvatura para una solución al flujo de Ricci normalizado, podemos elegir $c(t)$ de forma tal que $f := f_0 + c$ satisface la ecuación de evolución*

$$\frac{d}{dt} f = \Delta f + rf. \tag{41}$$

Demostración. Diferenciando (39) y usando el lema anterior, obtenemos

$$(R - r)^2 + \Delta \left(\frac{d}{dt} f_0 \right) = \frac{d}{dt} R = \Delta \Delta f_0 + R(R - r),$$

lo que implica

$$\Delta \left(\frac{d}{dt} f_0 \right) = \Delta(\Delta f_0 + rf_0).$$

Como las funciones armónicas en una variedad cerrada son constantes, existe $\gamma(t)$ tal que

$$\frac{d}{dt} f_0 = \Delta f_0 + rf_0 + \gamma,$$

y eligiendo

$$c(t) := -e^{rt} \int_0^t e^{-r\tau} \gamma(\tau) d\tau,$$

obtenemos la ecuación de evolución buscada. □

A partir de ahora, todas las funciones potenciales que consideremos serán tales que cumplan la ecuación de evolución dada por el lema anterior.

Definimos ahora

$$H := R - r + |\nabla f|^2.$$

Estudiemos la evolución de esta función por el flujo de Ricci.

Proposición 5.9. *H satisface la ecuación*

$$\frac{d}{dt} H = \Delta H - 2 |\nabla \nabla f - \frac{1}{2} \Delta f . g|^2 + rH.$$

Demostración. Podemos reescribir la ecuación (34) como

$$\frac{d}{dt}(R - r) = \Delta R + R(R - r),$$

y usando la definición del potencial,

$$\Delta R + R(R-r) = \Delta(R-r) + (\Delta f)^2 + r(R-r).$$

Ahora, usando (41) y recordando que $\frac{d}{dt}g^{ij} = -g^{ik}g^{jl}\left(-(R-r)\right)g_{kl}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|\nabla f|^2 &= \frac{d}{dt}(g^{ij}\nabla_i f\nabla_j f) = \left(\frac{d}{dt}g^{ij}\right)\nabla_i f\nabla_j f + 2g^{ij}\left(\frac{d}{dt}\nabla_i f\right)\nabla_j f \\ &= 2\nabla_i(\Delta f + rf)\nabla^i f + (R-r)g^{ij}\nabla_i f\nabla_j f \\ &= 2(\Delta\nabla_i f - R_{ik}\nabla_k f)\nabla^i f + (R+r)|\nabla f|^2. \end{aligned} \tag{42}$$

Como en dimensión 2 tenemos que $R_{jk} = \frac{1}{2}Rg_{jk}$, obtenemos

$$\frac{d}{dt}|\nabla f|^2 = \Delta|\nabla f|^2 - 2|\nabla\nabla f|^2 + r|\nabla f|^2. \tag{43}$$

Uniendo los resultados anteriores, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H &= \frac{d}{dt}(R-r) + \frac{d}{dt}|\nabla f|^2 \\ &= \Delta(R-r) + (\Delta f)^2 + r(R-r) + \Delta|\nabla f|^2 - 2|\nabla\nabla f|^2 + r|\nabla f|^2 \\ &= \Delta H - 2|\nabla\nabla f - \frac{1}{2}\Delta f.g|^2 + rH. \end{aligned} \tag{44}$$

□

La ventaja de tener definida la H anterior, es que se comporta bien cuando evoluciona por el flujo y por lo tanto podemos aplicarle el principio del máximo, obteniendo

$$R - r \leq H \leq H(0)e^{rt}$$

Esta cota superior sí existe para todo tiempo, y está definida para todo r y todo $R(0)$.

Uniendo esto con la proposición 5.5, tenemos

Teorema 5.10. *Para el flujo de Ricci normalizado en superficies, valen las siguientes cotas en la curvatura escalar,*

$$\begin{cases} r - Ce^{rt} \leq R \leq r + Ce^{rt} & \textit{Si } r < 0 \\ -\dfrac{C}{1+Ct} \leq R \leq C & \textit{Si } r = 0 \\ -Ce^{rt} \leq R \leq r + Ce^{rt} & \textit{Si } r > 0 \end{cases} \tag{45}$$

donde $C > 0$ es una constante que depende únicamente de la métrica inicial en la superficie.

Entonces tenemos que la curvatura está acotada para todo tiempo $t \in [0, +\infty)$ y para cualquier caso inicial. Como ya probamos en la sección anterior, esto es suficiente para asegurar la existencia de la solución para todo tiempo; lo que termina la prueba del teorema 5.2.

5.2 Convergencia de la solución en el caso $r < 0$

Para probar la convergencia debemos ver primero que la curvatura escalar converge a una constante, y tenemos la siguiente.

Observación 5.11. Sea $g(t)$ solución al flujo de Ricci en (M, g_0). Entonces

$$g(t) = g_0 + \int_0^t (r - R) g ds,$$

lo que implica

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(t) = \frac{\partial g_0}{\partial x_i} + \int_0^t -\frac{\partial R}{\partial x_i} g(s) ds + \int_0^t (r - R) \frac{\partial g(s)}{\partial x_i} ds,$$

por lo que si

$$\int_0^\infty |\nabla R| ds \leq C < \infty,$$

la convergencia será en C^1. Análogamente, si

$$\int_0^\infty |\nabla^k R| ds \leq C < \infty,$$

la convergencia será en C^k. Entonces basta ver que las derivadas de la curvatura decrecen suficientemente rápido.

Empezamos con el caso $\chi(M) < 0$.

Por el teorema 5.2, la solución existe para $[0, +\infty)$. Además por lo visto en el corolario (4.7), sabemos que todas las métricas $g(t)$ son uniformemente equivalentes.

Como vimos en la prueba del teorema anterior, tenemos la desigualdad

$$r - Ce^{rt} \leq R \leq r + Ce^{rt},$$

para el caso con curvatura promedio negativa, y como $r < 0$ la convergencia en C^0 a una métrica de curvatura constante es exponencial; por lo que si converge a una métrica en C^k para todo k, debe tener curvatura constante.

Veamos ahora qué ocurre para las derivadas de R.

Proposición 5.12. *Si $\chi(M) < 0$, entonces para cada $m \geq 1$ existe una constante C_m tal que para todo $(x, T) \in M \times [0, +\infty)$ se cumple*

$$|\nabla^m R(x, t)|^2 \leq C_m e^{rt/2}.$$

Probaremos el caso $m = 1$ de donde por inducción se seguirán los casos $m \geq 2$ pero que por cuestiones de brevedad omitiremos algunos de los cálculos. Comenzamos con un lema.

Lema 5.13. *Bajo el flujo normalizado, $|\nabla R|^2$ evoluciona mediante la siguiente ecuación*

$$\frac{d}{dt}|\nabla R|^2 = \Delta |\nabla R|^2 - 2|\nabla \nabla R|^2 + (4R - 3r)|\nabla R|^2.$$

Demostración. Recordamos que sobre una superficie, tenemos la siguiente identidad,

$$\nabla\Delta = \Delta\nabla - \frac{1}{2}R\nabla.$$

Luego obtenemos

$$\frac{d}{dt}(\nabla R) = \nabla(\Delta R + R(R-r)) = \Delta\nabla R + \frac{3}{2}R\nabla R - r\nabla R.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|\nabla R|^2 &= \frac{d}{dt}(g^{ij}\nabla_i R\nabla_j R) \\
&= (R-r)|\nabla R|^2 + 2\langle \Delta\nabla R + \frac{3}{2}R\nabla R - r\nabla R, \nabla R\rangle \\
&= R|\nabla R|^2 - r|\nabla R|^2 + 2\langle\Delta\nabla R, \nabla R\rangle - 2|\nabla\nabla R|^2 \\
&\quad + 2|\nabla\nabla R|^2 + 3R|\nabla R|^2 - 2r|\nabla R|^2 \\
&= \Delta|\nabla R|^2 - 2|\nabla\nabla R|^2 + (4R-3r)|\nabla R|^2.
\end{aligned} \tag{46}$$

Donde en la última igualdad usamos que $\Delta|\nabla R|^2 = 2\langle\Delta\nabla R, \nabla R\rangle + 2|\nabla\nabla R|^2$. □

Probemos ahora la proposición.

Demostración de la proposición 5.12. Comenzamos con el caso $m = 1$.

Por lo visto en la sección anterior, con curvatura negativa tenemos la convergencia exponencial $|R-r| \leq Ce^{rt}$. Además, usando el lema anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|\nabla R|^2 &= \Delta|\nabla R|^2 - 2|\nabla\nabla R|^2 + (4R-3r)|\nabla R|^2. \\
&\leq \Delta|\nabla R|^2 + (4Ce^{rt} + r)|\nabla R|^2 \\
&\leq \Delta|\nabla R|^2 + \frac{r}{2}|\nabla R|^2 \text{ con t suficientemente grande.}
\end{aligned} \tag{47}$$

Aplicando al resultado anterior el principio del máximo, se obtiene

$$|\nabla R|^2 \leq Ce^{rt/2}.$$

Para los casos con $m > 1$, se obtiene una ecuación de evolución similar que es satisfecha por la función

$$\Phi = |\nabla^m R|^2 - (m+1)r|\nabla^{m-1}R|^2$$

Y aplicando la hipótesis inductiva se llega a la siguiente desigualdad,

$$\frac{d}{dt}\Phi \leq \Delta\Phi + \frac{rk}{2}\Phi + C'e^{rt}$$

A la cual nuevamente puede aplicarse el principio del máximo. □

Por lo tanto, tenemos que la solución converge a una métrica g_∞, y como las derivadas de la curvatura decaen exponencialmente, obtenemos que

$$g(t) \to g_\infty \text{ con } t \to \infty$$

en la topología C^k para todo k y además $R_\infty \equiv r$, lo que termina el caso $\chi(M) < 0$.

5.3 Convergencia de la solución en el caso $r = 0$

Comenzamos recordando las cotas obtenidas en el caso $\chi(M) = 0$,

$$-\frac{D}{1 + Dt} \leq R \leq D,$$

de donde es inmediato notar que si bien $R_{min} \to 0$, no tenemos la misma suerte para R_{max}, por lo que debemos considerar alguna cantidad auxiliar.

Como mencionamos previamente, siempre tenemos un potencial de curvatura f tal que

$$\begin{cases} \Delta f = R - r = R \\ \frac{d}{dt} f = \Delta f + rf = \Delta f \end{cases} \tag{48}$$

Para controlar la curvatura escalar por arriba debemos mejorar la cota obtenida previamente. Nos dirigimos entonces a probar el siguiente

Teorema 5.14. *Existe una constante $C < \infty$ tal que para todo $(x, t) \in M \times [0, +\infty)$,*

$$|R| + |\nabla f|^2 \leq \frac{C}{1 + t}.$$

Nuevamente, necesitaremos un lema sobre el crecimiento de la derivada de f.

Lema 5.15. *Si $\chi(M) = 0$, existe una constante $C < \infty$ que depende únicamente de $g(0)$ tal que para todo $(x, t) \in M \times [0, +\infty)$,*

$$|\nabla f(x, t)|^2 \leq \frac{C}{1 + t}$$

Demostración. Reciclando el resultado para la evolución del potencial dado en (43) y recordando que $r = 0$, vemos que

$$\frac{d}{dt} |\nabla f|^2 = \Delta |\nabla f|^2 - 2|\nabla \nabla f|^2$$

Luego, aplicamos el principio del máximo para acotar $|\nabla f|^2$, obteniendo que existe C_0 dependiendo únicamente de $g(0)$ tal que $|\nabla f|^2 \leq C_0$ para todo tiempo. Observamos que

$$\frac{d}{dt} \left(t|\nabla f|^2 \right) \leq \Delta \left(t|\nabla f|^2 \right) + |\nabla f|^2.$$

Además,

$$\frac{d}{dt} f^2 = 2f \frac{d}{dt} f = 2f \Delta f.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \Delta f^2 &= g^{ij} \nabla_i \nabla_j f^2 = 2g^{ij} \nabla_i \left(f \nabla_j f \right) \\ &= 2g^{ij} \nabla_i f \nabla_j f + 2g^{ij} f \nabla_i \nabla_j f \\ &= 2|\nabla f|^2 + 2f \Delta f, \end{aligned} \tag{49}$$

por lo que

$$\frac{d}{dt} f^2 = \Delta f^2 - 2|\nabla f|^2$$

Y juntando lo anterior se obtiene

$$\frac{d}{dt}\left(t|\nabla f|^2 + f^2\right) \leq \Delta\left(t|\nabla f|^2 + f^2\right)$$

lo que implica que existe C_1 tal que $t|\nabla f|^2 + f^2 \leq C_1$ y en particular, $|\nabla f|^2 \leq C_1/t$.

Uniendo ambas cotas obtenemos el lema. $\square$

Prueba del teorema 5.14. Recordamos que $R^2 = (\Delta f)^2 \leq 2|\nabla\nabla f|^2$, y vemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(R + 2|\nabla f|^2\Big) &= \Delta\Big(R + 2|\nabla f|^2\Big) + R^2 - 4|\nabla\nabla f|^2 \\ &\leq \Delta\Big(R + 2|\nabla f|^2\Big) - R^2.\end{aligned} \tag{50}$$

Aplicando el principio del máximo, obtenemos

$$R + 2\nabla|f|^2 \leq C_0,$$

para alguna constante C_0 dependiendo únicamente de g_0. Por otro lado, usando los estimativos BBS

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big[t\Big(R + 2|\nabla f|^2\Big)\Big] &\leq \Delta\Big[t\Big(R + 2|\nabla f|^2\Big)\Big] - tR^2 + R + 2|\nabla f|^2 \\ &\leq \Delta\Big[t\Big(R + 2|\nabla f|^2\Big)\Big] - \frac{t}{2}R^2 + R + 2|\nabla f|^2 \\ &- \frac{t}{2}\Big(R + 2|\nabla f|^2\Big)^2 + 2t|\nabla f|^2\Big(R + |\nabla f|^2\Big).\end{aligned} \tag{51}$$

El lema anterior nos asegura que existe una constante C_1 tal que $t|\nabla f|^2 \leq C_1$ y entonces podemos encontrar $C' < \infty$ suficientemente grande para que en todo punto donde se tenga

$$t\Big(R + 2|\nabla f|^2\Big) \geq C',$$

tenemos $R \geq 0$ y por lo tanto existe una constante C_2 tal que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big[t\Big(R + 2|\nabla f|^2\Big)\Big] &\leq \Delta\Big[t\Big(R + 2|\nabla f|^2\Big)\Big] - \frac{t}{2}R^2 - \frac{t}{2}\Big(R + 2|\nabla f|^2\Big)^2 \\ &+ (1 + 2C_1)R + 2(1 + C_1)|\nabla f|^2 \\ &\leq \Delta\Big[t\Big(R + 2|\nabla f|^2\Big)\Big] - \frac{1}{2t}\Big[t\Big(R + 2|\nabla f|^2\Big)\Big]^2 \\ &- \left[\sqrt{\frac{t}{2}}R - \sqrt{\frac{1}{2t}}(1 + 2C_1)\right]^2 + \frac{C_2}{t}.\end{aligned} \tag{52}$$

Luego existe una constante $C > C'$ tal que $t\Big(R + 2|\nabla f|^2\Big) \geq C$ implica

$$\frac{d}{dt}\Big[t\Big(R + 2|\nabla f|^2\Big)\Big] \leq \Delta\Big[t\Big(R + 2|\nabla f|^2\Big)\Big].$$

Finalmente, aplicando el principio del máximo, se sigue que $R+2|\nabla f|^2 \leq C/t$ para todo tiempo. Usando además las cotas obtenidas para R y $|\nabla f|^2$, se sigue el resultado. $\square$

Por lo tanto, uniendo esto con (5.10),

$$-\frac{D}{1+Dt} \leq R \leq \frac{D}{1+Dt},$$

por lo que sabemos que $R(t) \to R_\infty \equiv 0$ cuando $t \to \infty$. Falta ahora ver que las derivadas de la curvatura convergen a cero para tener el resultado buscado.

Proposición 5.16. *Sea $(M, g(t))$ una solución al flujo de Ricci en una superficie con $r = 0$. Entonces para cada entero positivo k existe una constante $C_k < \infty$ dependiendo únicamente de $g(0)$ tal que para todo $(x,t) \in M \times [0,\infty)$,*

$$|\nabla^k R|^2 \leq \frac{C_k}{(1+t)^{k+2}}.$$

Demostración. La prueba se hará por inducción. Comenzamos con el caso $k = 1$.

Usando el resultado visto en el lema (5.13) y recordando que $r = 0$, vemos que

$$\frac{d}{dt}|\nabla R|^2 = \Delta|\nabla R|^2 \ -2|\nabla\nabla R|^2 + 4R|\nabla R|^2 \leq \Delta|\nabla R|^2 + 4R|\nabla R|^2.$$

Sea ahora una constante α, y definamos

$$\phi := t^4|\nabla R|^2 + \alpha t^3 R^2.$$

Como

$$\frac{d}{dt}\left(t^4|\nabla R|^2\right) \leq \Delta\left(t^4|\nabla R|^2\right) + 4t^3(tR+1)|\nabla R|^2,$$

y además

$$\frac{d}{dt}(t^3R^2) = \Delta(t^3R^2) - 2t^3|\nabla R|^2 + 2t^3R^3 + 3t^2R^2,$$

podemos calcular

$$\frac{d}{dt}\phi \leq \Delta\phi + 4t^3(tR+1-\alpha/2)|\nabla R|^2 + \alpha(2t^2R^3 + 3t^2R^2).$$

Usando las cotas previamente obtenidas para R, podemos tomar $\alpha < \infty$ tal que $tR + 1 \leq \alpha/2$.

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}\phi \leq \Delta\phi + C,$$

donde $C = \alpha(\frac{1}{4}\alpha^3 + \frac{3}{4}\alpha^2)$. Finalmente por el principio del máximo,

$$t^4|\nabla R|^2 + \alpha t^3R^2 = \phi \leq Ct.$$

Hacemos el paso inductivo. La idea será la misma que en el paso base; definiremos una función auxiliar que generalizará la ϕ utilizada en la parte anterior y veremos que podemos aplicarle el principio del máximo para encontrar una cota a la misma, a partir de la cual luego se despeja la cota para la k-ésima derivada de R. Supongamos que es cierto para $0 \leq j \leq k-1$. Entonces podemos verificar que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|\nabla^k R|^2 &= \frac{d}{dt}(g^{ip}...g^{jq}\nabla_i...\nabla_p R\nabla_j...\nabla_q R) \\
&= \Delta|\nabla^k R|^2 - 2|\nabla^{k+1}R|^2 + \big(\nabla^k R\big) \otimes_g \left[\sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (\nabla^j R) \otimes_g (\nabla^{k-j} R)\right]
\end{aligned} \tag{53}
$$

El cálculo anterior se encuentra detallado en la Sección 5, proposición 5.27 de [CK04].

Definiendo entonces

$$\phi := t^{k+3}|\nabla^k R|^2 + Nt^{k+2}|\nabla^{k-1}R|^2$$

con N una constante a determinar, podemos acotar la derivada temporal de ϕ para algunas constantes a, b_j y c_j que se pueden estimar,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\phi &\leq \Delta\phi + t^{k+2}|\nabla^k R|^2\big[atR + (k+3-2N)\big] \\
&+ \sqrt{t^{k+2}|\nabla^k R|^2}\sum_{j=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} b_j \sqrt{t^{j+2}|\nabla^j R|^2 t^{k-j+2}|\nabla^{k-j}R|^2} \\
&+ N\sum_{j=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} c_j \sqrt{t^{k+1}|\nabla^{k-1}R|^2 t^{j+2}|\nabla^j R|^2 t^{k-j+1}|\nabla^{k-j-1}R|^2} \\
&+ N(k+2)t^{k+1}|\nabla^{k-1}R|^2.
\end{aligned} \tag{54}
$$

Finalmente, por hipótesis inductiva, existe una constante N que depende sólo de $g(0)$ y constantes positivas A, B, C, D que dependen de $g(0)$ y N tal que

$$\frac{d}{dt}\phi \leq \Delta\phi - At^{k+2}|\nabla^k R|^2 + B\sqrt{t^{k+2}|\nabla^k R|^2} + C \leq \Delta\phi + D.$$

Una vez más aplicamos el principio del máximo y obtenemos el resultado. □

Usando estas cotas con el resultado previo y aplicando la observación 5.11, obtenemos que si $r = 0$,

$$g(t) \to g_\infty \text{ cuando } t \to \infty$$

en la topología C^k para todo k. Además, $R_\infty \equiv 0$, concluyendo la prueba del teorema (5.3).

6 Convergencia de la solución en el caso positivo

Para esta sección, nos basamos en [Ham88], y seguimos los argumentos dados en éste.

Nos queda por probar el caso de curvatura positiva. Recordando que la ecuación de evolución para la curvatura es,

$$\frac{d}{dt}R = \Delta R + R(R - r),$$

si miramos la EDO asociada $\frac{d}{dt}R = R^2 - Rr$, como $r > 0$ se tiene que $R \equiv r$ es un punto fijo repulsor de la anterior, por lo que el laplaciano compite con el término de reacción y el principio del máximo no nos permitirá acotar la curvatura de forma tan sencilla.

Si bien el principio del máximo nos será útil nuevamente, no será nuestra principal herramienta en este caso; el truco estará en estudiar nuevamente los solitones de Ricci.

Recordamos que, como definimos en (37), g es un solitón de Ricci si cumple

$$(R - r)g_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i,$$

siendo $\{X(t)\}$ una familia de campos vectoriales generados por una familia de flujos $\{\phi(t)\}$. Además, en el caso de cumplirse que existe una función escalar f con $X(t) = -\nabla f(t)$ para todo t, vimos que podemos reescribir la ecuación anterior como

$$(R - r)g_{ij} = 2\nabla_i \nabla_j f.$$

Supongamos ahora, que como antes tomamos $f : M \to \mathbb{R}$ siendo un potencial de la curvatura (es decir, $\Delta f = R - r$), y consideremos $g(t)$ la solución al flujo de Ricci normalizado en la esfera, que sabemos que existe para todo tiempo. Entonces definiendo una familia a un parámetro de difeomorfismos ϕ_t generada por el campo $\xi = \nabla f$, podemos estudiar la familia de métricas $\tilde{g} = \psi_t^* g$, para la cual obtenemos la siguiente ecuación de evolución

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\tilde{g}(X,Y) &= (\mathcal{L}_\xi \tilde{g})(X,Y) + (r - R)\tilde{g}(X,Y)\\ &= \xi(\tilde{g}(X,Y)) - \tilde{g}(\mathcal{L}_\xi X, Y) - \tilde{g}(X, \mathcal{L}_\xi Y) - \Delta f \tilde{g}(X,Y)\\ &= \tilde{g}(\nabla_\xi X - [\xi, X], Y) + \tilde{g}(X, \nabla_\xi Y - [\xi, Y]) - \Delta f \tilde{g}(X,Y)\\ &= XY(f) - \nabla_X Y(f) + YX(f) - \nabla_Y X(f) - \Delta f \tilde{g}(X,Y)\\ &= 2\nabla^2 f(X,Y) - \Delta f \tilde{g}(X,Y).\end{aligned} \tag{55}$$

Es decir, la derivada de la solución modificada es dos veces la parte libre de traza del Hessiano de nuestra función potencial sobre la métrica $\tilde{g}$. Para simplificar notación, definamos el siguiente tensor,

$$M := \nabla^2 f - \frac{1}{2}\Delta f \tilde{g}$$

Supongamos ahora que

$$|M|^2 \leq Ce^{-ct},$$

y que además existen constantes positivas c_k, C_k para cada k natural tal que

$$|\nabla^k M| \leq C_k e^{-c_k t}.$$

Entonces $|M|$ tiende a cero exponencialmente rápido por el flujo, y como $|M|$ es invariante por difeomorfismos, debe ser $2|\nabla^2 f - \frac{1}{2}\Delta f \tilde{g}|^2 \to 0$, y lo mismo para sus derivadas. Apoyándonos nuevamente en la observación 5.11, esto implicaría que $\tilde{g}(t)$ converge en la topología C^∞ a una métrica límite $\tilde{g}_\infty$ con $M \equiv 0$, que es por definición un solitón de Ricci de gradientes.

Si logramos ver que los únicos solitones de Ricci de gradientes en la esfera son redondos, se seguiría que $\tilde{g}$ converge a una métrica redonda. Finalmente recordando que $\tilde{g}$ se construye a partir de la solución inicial g modificándola únicamente por una familia de difeomorfismos, g debe converger en la topología C^∞ a la métrica límite g_∞ que también debe ser redonda, concluyendo la prueba.

Nuestro primer objetivo será mejorar las cotas obtenidas anteriormente para R. Luego, usando las cotas para R obtenemos cotas para $|M|$ y sus derivadas. El problema es que aún no tenemos cotas uniformes para la curvatura escalar y por lo tanto gran parte de la dificultad de este plan se esconde en generar las mismas. Teniendo esto, un cálculo similar a los realizados en las secciones anteriores nos acotará $|M|$ y sus derivadas exponencialmente. Finalmente probaremos que los solitones de Ricci de gradientes son redondos, concluyendo la prueba del caso positivo.

6.1 Desigualdad de Harnack

La desigualdad de Harnack es una herramienta que nos permitirá comparar valores cercanos para una función real en el espacio-tiempo. En otras palabras, dado un punto $x \in M$ y fijando $t = T$, esta desigualdad nos permitirá comparar el valor de $R(x,T)$ con valores de la forma $R(\xi, \tau)$ con $\xi \in M$ y $\tau < T$.

Teorema 6.1. *Sea M una variedad Riemannianana compacta de dimensión n con curvatura de Ricci positiva, y sea f una función real en M que satisface $\frac{d}{dt} f = \Delta f$. Entonces*

$$f(\xi,\tau) \leq \left(\frac{T}{\tau}\right)^{n/2} e^{\frac{d(X,\xi)^2}{4(T-\tau)}} f(X,T)$$

para todo tiempo $\tau < T$ y puntos $\xi, X \in M$.

Demostración. Para probarlo, obtendremos una cota inferior de $\frac{d}{dt}\log f$ con el principio del máximo, y luego intregraremos sobre una geodésica minimizante que conecte a X y ξ que existe por el teorema de Hopf-Rinow (ver por ejemplo [Mil63] para más detalles).

Sea entonces $L = \log f$. Tenemos que $\partial_t L = \frac{\Delta f}{f}$ y $\Delta L = \frac{\Delta f}{f} - \frac{|\nabla f|^2}{f^2}$. Combinando ambas se obtiene la ecuación de evolución para L,

$$\partial_t L = \Delta L + |\Delta L|^2.$$

Definimos ahora $Q = \Delta L$ y derivamos una ecuación de evolución para acotar Q por debajo. Notamos que $\frac{d}{dt} Q = \Delta(\Delta L + |\nabla L|^2) = \Delta Q + \Delta|\nabla L|^2$, y calculamos $\Delta|\nabla L|^2$,

$$\begin{aligned} \Delta|\nabla L|^2 &= g^{pq} g^{ij} \nabla_p \nabla_q (\nabla_i L \nabla_j L) \\ &= 2 g^{pq} g^{ij} \nabla_p (\nabla_p \nabla_q L \nabla_j L) \\ &= 2|\nabla\nabla L|^2 + 2 g^{pq} g^{ij} (\nabla_p \nabla_q \nabla_i L \nabla_j L). \end{aligned} \tag{56}$$

Conmutando i y q en el último término mediante la identidad $[\nabla_p, \nabla_i]\nabla_q L = g^{lm} R_{piql} \nabla_m L$ y aplicando una contracción obtenemos

$$2g^{ij} g^{lm} R_{il} \nabla_j L \nabla_m L + 2\langle \nabla Q, \nabla L\rangle \geq 2\langle \nabla Q, \nabla L\rangle,$$

pues la curvatura de Ricci se asume positiva. Además, usando la fórmula $|\nabla\nabla L|^2 \geq \frac{1}{n}(\Delta L)^2$ se tiene que $\frac{1}{n}Q^2 = \frac{1}{n}(\Delta L)^2 \leq |\nabla\nabla L|^2$. Juntando lo anterior nos queda la desigualdad

$$\frac{d}{dt}Q \geq \Delta Q + 2\langle \nabla Q, \nabla L\rangle + \frac{2}{n}Q^2.$$

La solución general a la EDO asociada $\frac{d}{dt}h = \frac{2}{n}h^2$ es

$$h(t) = \frac{-n}{2t+k},$$

donde k es una constante. Ahora, si elegimos $k = 0$, h tiende a $-\infty$ en 0, asegurando que Q es mayor que h para tiempos pequeños. Aplicando el principio del máximo obtenemos el estimativo

$$Q \geq -\frac{n}{2t},$$

y por lo tanto obtenemos la cota inferior para $\partial_t L$,

$$\partial_t L \geq |\Delta L|^2 - \frac{n}{2t}.$$

Ahora parametrizamos una geodésica s uniendo X y ξ por el tiempo con $t \in [\tau, T]$, con parámetro proporcional a la longitud de arco tal que $d(X, \xi) = \frac{ds}{dt}(T - \tau)$, y usando las desigualdades anteriores para $L(s(t), t)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L &= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial s}\frac{ds}{dt} \\ &\geq -\frac{n}{2t} + \left(\frac{\partial L}{\partial s}\right)^2 + \frac{\partial L}{\partial s}\frac{ds}{dt} \\ &\geq -\frac{n}{2t} - \frac{1}{4}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \\ &= -\frac{n}{2t} - \frac{d(X,\xi)^2}{4(T-\tau)^2}. \end{aligned} \tag{57}$$

Donde para el tercer paso usamos que $(\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{ds}{dt})^2 \geq 0$.

Finalmente, integramos para obtener

$$L(X, T) - L(\xi, \tau) \geq \log\left(\frac{\tau}{T}\right)^{n/2} - \frac{d(X,\xi)^2}{4(T-\tau)},$$

y exponenciando el resultado anterior se obtiene la tesis. □

Usando esta misma técnica, podemos probar una desigualdad de Harnack para la curvatura escalar en una superficie compacta evolucionando por el flujo de Ricci. La diferencia es que, como la métrica está cambiando, debemos considerar otra definición de distancia. Con esto en mente, definimos

$$\rho(\xi, \tau, X, T) := \inf_{\gamma} \int_{\tau}^{T} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las curvas γ patrametrizadas por el tiempo que conectan a ξ y X, y $\frac{ds}{dt}$ es la velocidad en el espacio con respecto a la métrica $g(t)$ en tiempo t.

Con esto en mente, procedemos a probar el siguiente

Teorema 6.2. *La curvatura escalar R en una superficie compacta evolucionando a través del flujo de Ricci normalizado satisface*

$$R(\xi,\tau) \leq \left(\frac{e^{rT}-1}{e^{r\tau}-1}\right) e^{\rho/4} R(X,T)$$

para todo tiempo $\tau < T$ y puntos $\xi, X \in M$.

Demostración. Definamos entonces $L = \log R$. Usando la ecuación de evolución para R y recordando el lema 5.6, se obtiene $\frac{d}{dt}L = \frac{\Delta R}{R} + R - r$ y $\Delta L = \frac{\Delta R}{R} - |\nabla L|^2$. Entonces

$$\frac{d}{dt}L = \Delta L + |\nabla L|^2 + R - r.$$

Tomando ahora $Q := \Delta L + R - r$ y usando el lema se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Q &= \frac{d}{dt}(\Delta L) + \frac{d}{dt}R \\ &= (R-r)\Delta L + \Delta(\Delta L + |\nabla L|^2 + R - r) + \Delta R + R(R-r). \end{aligned} \tag{58}$$

Observando que $\Delta Q = \Delta(\Delta L) + \Delta R$, la derivada de Q nos queda

$$\frac{d}{dt}Q = \Delta Q + \Delta|\nabla L|^2 + (R-r)\Delta L + \Delta R + R(R-r).$$

Reutilizando el cálculo previamente realizado en la desigualdad de Harnack, tenemos

$$\Delta|\nabla L|^2 = 2|\nabla\nabla L|^2 + g^{ij}g^{lm}R_{il}\nabla_j L \nabla_m L + 2\langle\nabla(\Delta L), \nabla L\rangle.$$

Usando la fórmula $|\nabla\nabla L|^2 \geq \frac{1}{n}(\Delta L)^2$ y notando que $n = 2$, se tiene que $2|\nabla\nabla L|^2 \geq (\Delta L)^2$. Ahora,

$$g^{ij}g^{lm}R_{il}\nabla_j L \nabla_m L = R|\nabla L|^2.$$

Por otro lado, podemos reescribir el tercer término del lado derecho como

$$2\langle\nabla(\Delta L), \nabla L\rangle = 2\langle\nabla Q, \nabla L\rangle - 2R|\nabla L|^2$$

Y uniendo lo anterior se obtiene

$$\Delta|\nabla L|^2 \geq (\Delta L)^2 - R|\nabla L|^2 + 2\langle\nabla Q, \nabla L\rangle.$$

Observamos ahora que podemos transformar derivadas de R en derivadas de L mediante la identidad $\Delta R = R\Delta L + R|\nabla L|^2$, y usando estas cotas para $\frac{d}{dt}Q$, obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &\geq \Delta Q + (\Delta L)^2 - R|\nabla L|^2 + 2\langle\nabla Q, \nabla L\rangle \\ &\quad + (R-r)\Delta L + R\Delta L + R|\nabla L|^2 + R(R-r) \\ &\geq \Delta Q + (\Delta L)^2 + 2\langle\nabla Q, \nabla L\rangle + 2(R-r)\Delta L + (R-r)^2 + r(\Delta L + R - r). \end{aligned} \tag{59}$$

Por otro lado es inmediato ver que

$$Q^2 + rQ = (\Delta L)^2 + 2(R-r)\Delta L + (R-r)^2 + r(\Delta L + R - r)$$

Por lo que finalmente

$$\frac{dQ}{dt} \geq \Delta Q + 2\langle \nabla Q, \nabla L\rangle + Q(Q+r). \tag{60}$$

Y la solución general a la EDO asociada $\frac{d}{dt}h = h(h+r)$ es

$$h(t) = \frac{-re^{rt}}{e^{rt}+k},$$

y si tomamos $k=-1$, obtenemos que la solución tiende a $-\infty$ en cero, asegurando que Q es mayor que h para tiempos pequeños. Entonces

$$Q \geq \frac{-re^{rt}}{e^{rt}-1}.$$

Finalmente, usando la cota

$$\partial_t L \geq |\Delta L|^2 - \frac{-re^{rt}}{e^{rt}-1},$$

y procediendo como en el caso anterior, tomamos una curva s conectando (ξ, τ) con (X, T) y para $L(s(t), t)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial s}\frac{ds}{dt} \\ &\geq \frac{-re^{rt}}{e^{rt}-1} + \left(\frac{\partial L}{\partial s}\right)^2 + \frac{\partial L}{\partial s}\frac{ds}{dt} \\ &\geq \frac{-re^{rt}}{e^{rt}-1} - \frac{1}{4}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \end{aligned} \tag{61}$$

Nuevamente, integrando de τ a T,

$$L(X,T) - L(\xi,\tau) \geq \log\left(\frac{e^{r\tau}-1}{e^{rT}-1}\right) - \frac{1}{4}\int_\tau^T \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 dt.$$

Y como esto vale para todo camino, podemos reemplazar el segundo término del lado derecho por $\frac{\rho}{4}$. Ahora exponenciamos y obtenemos el resultado. □

6.2 Monotonía de la entropía

Definición 6.1. Sea M una superficie cerrada de curvatura positiva. Definimos la *entropía de M* como

$$\mathcal{S}(M) := \int_M R \log R d\mu$$

Y observamos además que $R \log R$ está acotado por abajo por $-\frac{1}{e}$.

Veamos cómo afecta nuestro flujo a la entropía.

Teorema 6.3. *Bajo el flujo de Ricci normalizado en una superficie compacta, la entropía es decreciente.*

Demostración. Recordamos que por lo visto en 2.5, $\frac{d}{dt}d\mu = (r - R)d\mu$. Comenzamos observando que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_M R\log R d\mu &= \int_M \Big((\Delta R + R(R-r))(\log R + 1) + R\log R(r-R)\Big)d\mu \\ &= \int_M \Big((\Delta R)\log R + \Delta R + R(R-r)\Big)d\mu \\ &= \int_M \left(R(R-r) - \frac{|\nabla R|^2}{R}\right)d\mu,\end{aligned} \tag{62}$$

donde usamos que

$$\begin{aligned}\Delta(R\log R) &= g^{ij}\nabla_i\nabla_j(R\log R) \\ &= g^{ij}\nabla_i((\nabla_j R)\log R + \nabla_j R) \\ &= g^{ij}((\nabla_i\nabla_j R)\log R) + g^{ij}\nabla_j R\nabla_i \log R + \Delta R \\ &= (\Delta R)\log R + g^{ij}\nabla_j R\frac{\nabla_i R}{R} + \Delta R \\ &= (\Delta R)\log R + \frac{|\nabla R|^2}{R} + \Delta R.\end{aligned} \tag{63}$$

Por lo tanto, basta probar que $\int_M \left(R(R-r) - \frac{|\nabla R|^2}{R}\right)d\mu$ es negativo.

Notamos que como estamos en una superficie cerrada, por el teorema de Stokes se tiene

$$\int_M \Delta(f)d\mu = \int_M \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))\,dV_g = \int_{\partial M}\langle \operatorname{grad}(f), N\rangle\,dV_{\bar g} = 0,$$

para toda función $f : M \to \mathbb{R}$, donde g es la métrica, $\bar g$ es la métrica inducida en el borde y N es un campo vectorial normal a ∂M.

Teniendo en cuenta la observación anterior y tomando $Q = \Delta\log R + R - r$ como antes, tenemos que $QR = \Delta R + R(R-r) - \frac{|\nabla R|^2}{R}$, pues

$$\begin{aligned}\Delta\log R &= g^{ij}\nabla_i\nabla_j\log R = g^{ij}\nabla_i\left(\frac{\nabla_j R}{R}\right) \\ &= g^{ij}\left(-\frac{\nabla_i R}{R^2}\nabla_j R + \frac{\nabla_i\nabla_j R}{R}\right) = \frac{\Delta R}{R} - \frac{|\nabla R|^2}{R^2}.\end{aligned} \tag{64}$$

Entonces, $\int_M QRd\mu = \frac{d}{dt}\int_M R\log Rd\mu$.

A partir de este momento, estudiaremos en vez de QR la cantidad Z definida por

$$Z := \frac{\int_M QRd\mu}{\int_M Rd\mu}.$$

Esto se debe a que para Z podemos derivar la desigualdad

$$\frac{d}{dt}Z \geq Z^2 + rZ.$$

Ahora, si Z fuese positivo en algún momento, tendríamos que Z explota en tiempo finito, contradiciendo la existencia en tiempos largos. Por lo tanto, debe ser que $\frac{d}{dt}\int_M QRd\mu = \int_M R\log Rd\mu \leq 0$, terminando la prueba.

Veamos ahora que Z efectivamente cumple la desigualdad anterior. Como el flujo normalizado preserva el volumen, por el teorema de Gauss-Bonnet $\int_M Rd\mu$ es constante. Entonces

$$\frac{d}{dt}Z\int_M Rd\mu = \frac{d}{dt}\int_M QRd\mu = \int_M \left(+\frac{\partial Q}{\partial t}RQ\frac{\partial R}{\partial_t} + QR(r-R)\right)d\mu \tag{65}$$

Como $R > 0$, y usando la cota obtenida en (60), obtenemos

$$R\frac{\partial Q}{\partial t} \geq R\Delta Q + 2\langle \nabla Q, \nabla R\rangle + RQ^2 + RQr,$$

y también

$$Q\frac{\partial R}{\partial t} = Q\Delta R + QR^2 - RQr.$$

Uniendo ambas, nos queda

$$R\frac{\partial Q}{\partial t} + Q\frac{\partial R}{\partial t} \geq \Delta(RQ) + RQ^2 + QR^2.$$

Por lo tanto, si usamos esto en (65),

$$\frac{d}{dt}Z\int_M Rd\mu \geq \int_M \Delta(RQ)d\mu + \int_M RQ^2 d\mu + rZ\int_M Rd\mu.$$

Por otro lado, la desigualdad de Cauchy- Schwarz nos permite calcular

$$\begin{aligned}\sqrt{\int_M Rd\mu \int_M RQ^2 d\mu} &= \left\|R^{1/2}\right\| \left\|R^{1/2}Q\right\| \\ &\geq \int_M (R^{1/2})(R^{1/2}Q)d\mu \\ &= \int_M RQd\mu,\end{aligned} \tag{66}$$

lo que implica que $\int_M RQ^2 d\mu \geq \left(\int RQd\mu\right)^2 / \int_M Rd\mu$.

Finalmente, aplicamos nuevamente el teorema fundamental del álgebra exterior, obteniendo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Z\int_M Rd\mu &\geq \int_M RQ^2 d\mu + rZ\int_M Rd\mu \\ &\geq \frac{\left(\int RQd\mu\right)^2}{\int_M Rd\mu} + rZ\int_M Rd\mu \\ &= (Z^2 + rZ)\int_M Rd\mu,\end{aligned} \tag{67}$$

lo que concluye la prueba. $\square$

6.3 La curvatura escalar está acotada

Con estos últimos resultados, podemos mejorar las cotas obtenidas para el caso $R > 0$.

Teorema 6.4. *Si $R > 0$ en $\mathbb{S}^2$, entonces R está uniformemente acotada entre dos constantes positivas c y C.*

Demostración. Comenzamos encontrando una cota superior para R. Como tenemos la desigualdad de Harnack, podemos usarla para comparar R a R_{max} en un entorno suficientemente grande de donde se alcanza el máximo, y aplicar la monotonía de la entropía para mostrar que entonces R_{max} no puede ser arbitrariamente grande. Como en un máximo local el Laplaciano es no positivo, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{max} \leq R_{max}^2,$$

donde la igualdad se toma en sentido de los cocientes de diferencias a futuro (ver A.6 para más detalles).

Sea $1 < \tau$, y elegimos T con $\tau < T$ para que $T - \tau = \frac{1}{2R_{max}(\tau)}$. Integrando la desigualdad anterior es sencillo verificar que

$$\frac{1}{2} R_{max}(T) \leq R_{max}(\tau).$$

Fijamos ξ el punto donde el máximo de R se alcanza en tiempo τ, es decir, donde $R_{max}(\tau) = R(\xi, \tau)$. Entonces por la desigualdad de Harnack, podemos controlar los valores de R cerca de ξ en tiempo T de la siguiente forma; si fijamos un vector $V \in T_X M$ y $t_0 \in (\tau, T)$, por nuestra ecuación de evolución tenemos que

$$\|V\|_{g(T)} = e^{\int_{t_0}^{T} (r-R)dt} \|V\|_{g(t_0)}.$$

De la misma manera, para $t \in (t_0, T)$ se tiene que $R_{max}(t) \leq 2R_{max}(\tau)$ y además $T - t_0 \leq \frac{1}{2R_{max}(\tau)}$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{T} (r - R)dt &\geq - \int_{t_0}^{T} R_{max}(t)dt \\ &\geq -2(T - t_0)R_{max}(\tau) \\ &\geq -1. \end{aligned} \tag{68}$$

y por lo tanto, tenemos que $\|V\|_{g(T)} \geq \frac{1}{e} \|V\|_{g(t_0)}$. Entonces, tomando una geodésica minimizante que conecte X con ξ con velocidad $d(X, \xi)_{g(T)}/(T - \tau)$ en $t = T$,

$$\begin{aligned} \rho(\xi, \tau, X, T) &\leq \int_{\tau}^{T} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \Bigg|_{g(t)} dt \\ &\leq e^2 \int_{\tau}^{T} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \Bigg|_{g(T)} dt \\ &= \frac{e^2 d(X, \xi)_{g(T)}^2}{T - \tau}. \end{aligned} \tag{69}$$

En particular, obtenemos que $\rho(\xi, \tau, X, T)$ está acotada para todo $X \in B_\delta(\xi)$ con $\delta = \frac{\pi}{\sqrt{R_{max}(T)/2}}$.

Ahora, como $\tau > 1$ y $T - \tau$ está acotado, podemos aplicar la desigualdad de Harnack y obtenemos que existe una constante $C > 0$ independiente de τ tal que para todo $X \in B_\delta(\xi)$ con $t = T$ se cumple

$$R(\xi, \tau) \leq CR(X, T). \tag{70}$$

Si juntamos esto con el hecho de que $R_{max}(T) \leq 2R_{max}(\tau)$ y recordando que en ξ se alcanza el máximo para $t = \tau$, obtenemos que existe una constante $C' > 0$ con

$$C' R_{max}(T) \leq R(X, T),$$

para todo $X \in B_\delta(\xi)$ con $t = T$.

Usando ahora el el teorema de Klingenberg (que puede verse en A.7) , como $0 < R(\cdot, T) < r + De^{rT}$, se tiene que

$$\text{inj}(M, g(T)) \geq \frac{\pi}{\sqrt{R_{max}(T)/2}},$$

por lo que el área de $B_\delta(\xi)$ está acotada por debajo por alguna constante $\frac{C_1}{R_{max}(T)}$ para alguna constante $C_1 > 0$.

Entonces, por la monotonía de la entropía obtenemos una constante $K > 0$ y $C_2 > 0$ que cumplen,

$$\begin{aligned}
K &\geq \int_{B_\delta(\xi)} R \log R d\mu \\
&\geq C' R_{max}(T) \log(C' R_{max}(T)) \frac{C_1}{R_{max}(T)} \\
&= C' C_1 (\log(C_1) + \log(R_{max}(T))) \\
&\geq C_2 \log(R_{max}(T)).
\end{aligned} \tag{71}$$

Entonces la estimación de la entropía nos muestra que $R_{max}(T)$ está acotado, y por lo tanto $R_{max}(\tau)$ también cuando $\tau > 1$ por (70), lo que termina la prueba de la cota superior.

Como ya tenemos la cota superior uniforme, el estimativo de Klingenberg nos da una cota inferior uniforme para el radio de inyectividad. Por lo tanto, si el diámetro de nuestra esfera se hiciera arbitrariamente grande, podríamos tomar un ϵ menor que el radio de inyectividad y geodésicas arbitrariamente largas, para luego construir una cantidad arbitraria de bolas disjuntas de radio ϵ centradas en estas geodésicas. Si alguna de estas geodésicas fuese suficientemente larga, tendríamos que la suma de las áreas de nuestras bolas es mayor al área total, que como vimos se mantiene constante, y por lo tanto tendríamos una contradicción. Entonces tenemos una cota superior en el díametro de nuestra esfera.

Finalmente, sea $t \geq 1$. Haciendo uso de nuestra cota sobre el diámetro, la distancia en el espacio-tiempo entre dos puntos (x, t) e $(y, t + 1)$ está acotada por una constante uniforme positiva. Luego, por la desigualdad de Harnack, obtenemos

$$R(x, t) \leq CR(y, t + 1).$$

Si R se acercase arbitrariamente a 0, existiría un tiempo t_0 tal que $R_{min}(t_0) < r/C$, pero entonces tendríamos que $R_{max}(t_0 - 1) < r$, lo cual es una contradicción y completa la prueba. $\square$

Siguiendo lo anticipado en el inicio de esta sección, nos enfocaremos ahora en obtener cotas para $|M|^2$ y sus derivadas. Esto no será difícil, pues tenemos el siguiente

Lema 6.5. *En una solución al flujo de Ricci normalizado, el cuadrado de la norma del tensor M satisface la ecuación de evolución*

$$\frac{d}{dt}|M|^2 = \Delta|M|^2 - 2|\nabla M|^2 - 2R|M|^2.$$

Demostración. Recordamos la ecuación de evolución para los símbolos de Christoffel en superficies.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2}g^{kl}\left(\nabla_i\frac{\partial}{\partial t}g_{jl} + \nabla_j\frac{\partial}{\partial t}g_{il} - \nabla_l\frac{\partial}{\partial t}g_{ij}\right)\\ &= \frac{1}{2}(-\nabla_i R\cdot\delta^k_j - \nabla_j R\cdot\delta^k_i + \nabla^k R\cdot g_{ij}).\end{aligned} \tag{72}$$

Usando esto, vemos que M satisface la siguiente ecuación de evolución

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}M_{ij} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla_i\nabla_j f - \frac{1}{2}(R-r)g_{ij}\right)\\ &= \nabla_i\nabla_j\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^k_{ij}\right)\nabla_k f - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}R\right)g_{ij} - \frac{1}{2}(R-r)\frac{\partial}{\partial t}g_{ij}\\ &= \nabla_i\nabla_j(\Delta f + rf) + \frac{1}{2}\left(\nabla_i R\cdot\delta^k_j + \nabla_j R\cdot\delta^k_i - \nabla^k R\cdot g_{ij}\right)\nabla_k f\\ &- \frac{1}{2}(\Delta R + R(R-r))g_{ij} + \frac{1}{2}(R-r)^2 g_{ij}\\ &= \nabla_i\nabla_j\Delta f + \frac{1}{2}(\nabla_i R\nabla_j f + \nabla_i f\nabla_j R - \langle\nabla R,\nabla f\rangle g_{ij}) - \frac{1}{2}(\Delta R)g_{ij} + rM_{ij}\end{aligned} \tag{73}$$

Ahora, usando que $R_{ijkl} = \frac{1}{2}R(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl})$, podemos calcular el conmutador $[\nabla\nabla,\Delta]$ de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}\nabla_i\nabla_j\Delta f &= \nabla_i\nabla_j\nabla_k\nabla^k f\\ &= \nabla_i\nabla_k\nabla_j\nabla^k f - \nabla_i(R_{jl}\nabla^l f)\\ &= \nabla_k\nabla_i\nabla_j\nabla^k f - R^l_{ij}\nabla_l\nabla^l f - R_{il}\nabla_j\nabla^l f - R_{jl}\nabla_i\nabla^l f - \nabla_i R_{jl}\nabla^l f\\ &= \Delta\nabla_i\nabla_j f - \nabla^k(R^l_{ijk}\nabla_l f) - R^l_{ijk}\nabla_l\nabla^k f - R_{il}\nabla_j\nabla^l f\\ &- R_{jl}\nabla_i\nabla^l f - \nabla_i R_{jl}\nabla^l f\\ &= \Delta\nabla_i\nabla_j f - \frac{1}{2}(\nabla_i R\nabla_j f + \nabla_i f\nabla_j R - \langle\nabla R,\nabla f\rangle g_{ij})\\ &- 2R\left(\nabla_i\nabla_j f - \frac{1}{2}(\Delta f)g_{ij}\right).\end{aligned} \tag{74}$$

Juntando lo anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}M_{ij} &= \Delta\nabla_i\nabla_j f - \frac{1}{2}(\Delta R)g_{ij} + (r-2R)M_{ij}\\ &= \Delta\left(\nabla_i\nabla_j f - \frac{1}{2}(R-r)g_{ij}\right) + (r-2R)M_{ij}\end{aligned} \tag{75}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|M|^2 &= \frac{\partial}{\partial t}\left(g^{ik}g^{jl}M_{ij}M_{kl}\right)\\ &= 2\langle M, \Delta M + (r-2R)M\rangle + 2(R-r)|M|^2 \\ &= \Delta|M|^2 - 2|\Delta M|^2 - 2R|M|^2.\end{aligned} \tag{76}$$

□

Por lo tanto,

$$\frac{\partial}{\partial t}|M|^2 \leq \Delta|M|^2 - 2R|M|^2,$$

Y como $c < R < C$,

$$\frac{\partial}{\partial t}|M|^2 \leq \Delta|M|^2 - 2c|M|^2,$$

por lo que tomando la EDO asociada $\frac{\partial}{\partial t}f = -2cf$, obtenemos que existen constantes C_1, c_2 tal que

$$|M|^2 \leq C_1 e^{c_1 t}$$

probando que $|M|$ decrece exponencialmente rápido. Usando esto y las cotas uniformes para R, un argumento igual al realizado para el caso $r < 0$ nos muestra que para todo natural k existen constantes C_k, c_k de forma que

$$|\nabla^k M|^2 \leq C_k e^{-c_k t},$$

probando que efectivamente $\tilde{g}$ converge a un solitón de Ricci de gradientes g_∞ en la topología C^∞ por los argumentos que adelantamos en el inicio de la sección.

6.4 Solitones de Ricci de gradientes son redondos

Para concluir la prueba, resta ver que las únicas métricas con $M \equiv 0$ en la esfera son redondas. Para ver esto, daremos dos argumentos similares; el primero debido a Brendle, el cual es una modificación de una prueba dada por Chen, Lu y Tian en [CT06], y el segundo será el argumento original del artículo previamente citado.

Recordamos que una métrica g_0 es un solitón de Ricci si existe una función f tal que

$$2\nabla^2 f = (R-r)g_0.$$

Si consideramos el campo $\xi = -\nabla f$, y tomamos ψ_t la familia a un parámetro de difeomorfismos generados por ξ, obtenemos una solución autosimilar al flujo de Ricci definiendo $g(t) = \psi_t^* g_0$. La prueba es sencilla,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\psi_t^* g_0)(X,Y) &= (\mathcal{L}_\xi g)(X,Y)\\ &= g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi)\\ &= -2\nabla^2 f(X,Y)\\ &= (r-R)g(X,Y).\end{aligned} \tag{77}$$

Pobaremos el siguiente

Teorema 6.6. *Supongamos que* $(\mathbb{S}^2, g)$ *es un solitón de Ricci de gradientes. Entonces* $R \equiv r$.

Para probarlo, necesitaremos equipar a $\mathbb{S}^2$ con una estructura casi-compleja J obtenida al definir Jv como el vector de la misma longitud que v que cumple $g(v, Jv) = 0$ y (v, Jv) es positivamente orientado. Se puede ver fácilmente que entonces $J^2 = -Id$, $g(v, w) = g(Jv, Jw)$ y que J es paralelo.

Si tomamos J como antes, podemos ver que $J\xi$ genera una familia a un parámetro de isometrías ϕ_t tal que $\frac{d}{dt}\phi_t(x) = J\xi(\phi_t(x))$ y $\phi_0(x) = x$,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{J\xi} g)(X, Y) &= g(J\nabla_X \xi, Y) + g(X, J\nabla_Y \xi) \\
&= -g(\nabla_X \xi, JY) - g(JX, \nabla_Y \xi) \\
&= \nabla^2 f(X, JY) + \nabla^2 f(JX, Y) \\
&= \frac{1}{2}(R - r)(g(X, JY) + g(JX, Y)) \\
&= \frac{1}{2}(R - r)(g(X, JY) - g(X, JY)) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{78}$$

Por lo que $J\xi = -J\nabla f$ es un campo de Killing y en particular, ϕ_t debe ser una isometría para todo t.

Si vemos que ϕ_τ es la identidad para todo τ, se sigue que f es constante y por lo tanto $R \equiv r$.

Sean entonces p y q dos puntos críticos de f. Se tiene que $J\xi|_p \equiv J\xi|_q \equiv 0$. Luego el flujo ϕ_t generado por $J\xi$ debe fijar p y q.

Observación 6.7. Si $\phi : M \to M$ es una isometría tal que $\phi(p) = p$ y $d_p\phi = Id_{T_pM}$, entonces $\phi = Id$.

Siguiendo la observación, nos interesa saber en qué tiempos τ se cumple que $(d\phi_\tau)_p$ es la identidad. Sean α y β definidos como

$$\alpha := \frac{1}{2}(r - R)(p),$$

$$\beta := \frac{1}{2}(r - R)(q).$$

Por la definición de solitón de Ricci de gradientes, tenemos que $-(\nabla^2 f)_p(v, v) = \alpha g(v, v)$ para todo $v \in T_pM$ y $-(\nabla^2 f)_q(w, w) = \beta g(w, w)$ para todo $w \in T_qM$. Entonces, se sigue que

$$(d\phi_\tau)_p(v) = \cos(\alpha\tau)v + \sin(\alpha\tau)Jv,$$

y también

$$(d\phi_\tau)_q(w) = \cos(\beta\tau)w + \sin(\beta\tau)Jw.$$

Si $\frac{\alpha\tau}{2\pi}$ es entero, $(d\phi_\tau)_p$ es la identidad en T_pM y por lo tanto ϕ_τ es la identidad. Lo mismo vale si $\frac{\beta\tau}{2\pi}$ es entero. Recíprocamente, si ϕ_τ es la identidad, deben ser $\frac{\alpha\tau}{2\pi}$ y $\frac{\beta\tau}{2\pi}$ enteros. Por lo tanto, podemos reescribir los resultados anteriores de la siguiente manera,

$$\frac{\alpha\tau}{2\pi} \in \mathbb{Z} \iff \phi_\tau = id \iff \frac{\beta\tau}{2\pi} \in \mathbb{Z}.$$

Corolario 6.8. *Si α y β están definidos como antes, se tiene $\alpha^2 = \beta^2$. Además, si $\alpha = \beta = 0$, ϕ_τ es la identidad para todo τ.*

Demostración. Supongamos primero que $\alpha = 0$. Entonces, por la observación anterior ϕ_τ es una isometría para todo τ y se sigue que $\frac{\beta\tau}{2\pi} \in \mathbb{Z}$ para todo τ. Por lo tanto, tomando $\tau = 2\pi$ se tiene que $\beta \in \mathbb{Z}$. Además, si tomamos $\tau = 4\pi$, también obtenemos que $2\pi\beta \in \mathbb{Z}$, de donde se sigue que $\beta = 0$. Si $\beta = 0$, se obtiene de forma análoga que debe ser $\alpha = 0$.

Resta ver el caso $\alpha, \beta \neq 0$. En este caso, tenemos que $\alpha\tau/2\pi \in \mathbb{Z} \iff \beta\tau/2\pi \in \mathbb{Z}$. Eligiendo $\tau = \frac{2\pi}{\alpha}$, se tiene que $1 = \alpha\tau/2\pi \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto $\beta\tau/2\pi \in \mathbb{Z}$.

Entonces debe ser $\beta/\alpha \in \mathbb{Z}$, y razonando análogamente, $\alpha/\beta \in \mathbb{Z}$. Entonces $\alpha/\beta \in \{-1, 1\}$, lo que implica $\alpha^2 = \beta^2$.

La otra afirmación es consecuencia inmediata de la observación previa. □

Apoyándonos en estos resultados, probemos 6.6.

Prueba del teorema (6.6). Sea $\sigma = d(p, q)$, y sea $\gamma : [0, \sigma] \to \mathbb{S}^2$ una geodésica minimizante uniendo p con q. Como ϕ_τ es una isometría, las curvas $\phi_\tau(\gamma(s))$ son geodésicas. Por lo tanto, la familia genera un campo de Jacobi $V(s)$ definido por

$$V(s) := \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\phi_\tau(\gamma(s))\right)\bigg|_{\tau=0} = J\xi|_{\gamma(s)}.$$

Observamos que $V(0) = V(\sigma) = 0$, por lo que p y q son puntos conjugados. Además, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}g(V(s), \gamma'(s)) &= g(\nabla_{\gamma'(s)}V(s), \gamma'(s)) \\ &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{J\xi}g)(\gamma'(s), \gamma'(s)) \\ &= 0,\end{aligned} \tag{79}$$

lo que muestra que $V(s)$ es perpendicular a $\gamma'(s)$. Entonces debe existir una función $u(s)$ tal que

$$V(s) = u(s)J\gamma'(s).$$

Aplicando la ecuación de Jacobi, obtenemos

$$u''(s) + \frac{1}{2}R(\gamma(s))u(s) = 0.$$

Ahora, notamos que se cumple

$$\begin{aligned}u(s) &= g(V(s), J\gamma'(s)) \\ &= g(J\xi|_{\gamma(s)}, J\gamma'(s)) \\ &= g(\xi|_{\gamma(s)}, \gamma'(s)).\end{aligned} \tag{80}$$

Diferenciando el resultado anterior,

$$\begin{aligned}u'(s) &= g(\nabla_{\gamma'(s)}\xi, \gamma'(s)) \\ &= -(\nabla^2 f)(\gamma'(s), \gamma'(s)) \\ &= \frac{1}{2}(r - R)(\gamma(s)).\end{aligned} \tag{81}$$

Por lo que podemos reemplazar la curvatura escalar por la derivada de u en la ecuación de Jacobi

$$u''(s) + \frac{1}{2} r u(s) = u(s)u'(s).$$

Por (81) se obtiene además que $u'(0) = \alpha$ y $u'(\sigma) = \beta$. Luego por el corolario anterior, $u'(0)^2 = u'(\sigma)^2$.

Usando la modificación a la ecuación de Jacobi, se tiene

$$\begin{aligned}
0 &= u'(0)^2 - u'(\sigma)^2 \\
&= \int_0^\sigma \frac{d}{ds}\left(u'(s)^2\right) ds \\
&= 2\int_0^\sigma u'(s)u''(s) ds \\
&= 2\int_0^\sigma u'(s)^2 u(s) ds - \frac{r}{2}\int_0^\sigma \frac{d}{ds}(u(s)^2) ds \\
&= 2\int_0^\sigma u'(s)^2 u(s) ds,
\end{aligned} \tag{82}$$

donde el segundo término se anula pues $u(0) = u(\sigma) = 0$. Luego debe existir un $s_0 \in (0, \sigma)$ tal que $u(s_0) = 0$. Como γ es minimizante, es libre de puntos conjugados y por lo tanto debe ser $u \equiv 0$. Entonces $\alpha = u'(0) = u'(\sigma) = 0$, por lo que ϕ_τ es la identidad para todo τ, completando la prueba. □

El argumento anterior es una modificación del artículo original publicado por Chen, Lu y Tian. Por completitud, incluimos también la prueba original usando este método.

Comenzamos con un lema.

Lema 6.9. *Sea (M, g) una superficie completa con un campo de Killing no trivial X. Supongamos que X se anula en $p \in M$. Entonces (M, g) es rotacionalmente simétrica.*

Demostración. Tomamos $\phi_t : M \to M$ con $t \in (-\infty, \infty)$, el grupo de isometrías generado por X, $\frac{d}{dt}\phi_t(x) = X(\phi_t(x))$ y $\phi_0(x) = x$. Por hipótesis, $\phi_t(p) = p$ para todo t. Por lo tanto ϕ_t induce una isometría lineal orientada

$$(\phi_t)_* : (T_pM, g(p)) \to (T_pM, g(p)).$$

Como el grupo de isometrías lineales orientadas de $(T_pM, g(p))$ es $\mathbb{S}^1$ y el mapa $t \to (\phi_t)_*$ es un homomorfismo no trivial, existe un $t_0 > 0$ tal que $(\phi_0)_* = (\phi_{t_0})_*$. Por la observación 6.7, ϕ_t queda determinada por $(\phi_t)_*$ y entonces tenemos que $\phi_{t_0} = \phi_0$. Luego hay una acción isométrica no trivial de $\mathbb{S}^1$ en (M, g). □

Probamos ahora el teorema.

Teorema 6.10. *Si g es un solitón de Ricci de gradientes en una superficie cerrada (M, g), g tiene curvatura constante positiva.*

Demostración. Como M es cerrada, existe $p \in M$ tal que $\nabla f(p) = 0$. Tomamos nuevamente J la estructura casi compleja en TM definida por la rotación de

$90°$ orientada positivamente. Como vimos previamente, obtenemos que $J\nabla f$ es un campo de Killing. Por lo tanto g es rotacionalmente simétrico y entonces

$$g = d\rho^2 + h(\rho)^2 d\theta^2,$$

con $0 \leq \rho \leq A < \infty$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Por el lema anterior, podemos asumir $f = f(\rho)$. Notando ahora que $R = -2\frac{h''}{h}$, la ecuación del solitón de Ricci de gradientes es

$$2\frac{h''}{h} + r = 2f''$$
$$2\frac{h''}{h} + r = 2\frac{h'f'}{h}$$

Integrando $f'' = \frac{h'f'}{h}$, obtenemos $f' = ch$ para alguna constante c. Luego la ecuación para h es

$$h'' = -\frac{r}{2}h + chh'.$$

Multiplicando por h' e integrando en $[0, A]$,

$$-\frac{(h')^2}{2}\bigg|_0^A = -\frac{rh^2}{4}\bigg|_0^A + c\int_0^A h(h')^2 d\rho.$$

Como la métrica $d\rho^2 + h(\rho)^2 d\theta^2$ es suave en M para $\rho = 0$ y $\rho = A$, se sigue que $h(0) = h(A) = 0$ y $h'(0) = -h'(A) = 1$. Entonces $c = 0$, lo que implica $f' = 0$ y $R \equiv r$. $\square$

6.5 Sobre el caso $r > 0$ en general

Para completar el estudio del flujo de Ricci en superficies cerradas restaría probar convergencia con $\chi(M) > 0$ y curvatura cambiando de signo. Este caso fue abordado por Chow en [B.C91], donde prueba el siguiente teorema.

Teorema 6.11. *Si g es una métrica en $\mathbb{S}^2$, bajo el flujo de Ricci normalizado la curvatura escalar se hace positiva en tiempo finito.*

Si queremos adaptar la prueba de Hamilton, uno de los problemas será extender la noción de entropía al caso donde la curvatura cambia de signo. Con este fin, podemos asumir que M es difeomorfa a $\mathbb{S}^2$ pasando al cubrimiento doble si es necesario. Recordamos la EDO asociada a la ecuación de evolución de R,

$$\frac{d}{dt}s = s(s - r),$$

con $r > 0$. Tomamos ahora la solución inicial con $s(0) = s_0 < R_{min}(0) < 0$, que está dada por

$$s(t) = \frac{r}{1 - (1 - r/s_0)\, e^{rt}}.$$

La ecuación de evolución para $R - s$ es

$$\frac{d}{dt}(R - s) = \Delta(R - s) + (R - r + s)(R - s).$$

Como $R_{min}(0) - s_0 > 0$, el principio del máximo nos muestra que $R - s > 0$ y por lo tanto tiene sentido definir

$$N(g(t), s(t)) := \int_M (R - s) \log(R - s) d\mu.$$

Decimos que N es la *entropía modificada de M.*

Si bien no es monótona, puede probarse que permanece uniformemente acotada. Además, Chow prueba una desigualdad de Harnack modificada; dados $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in M \times \mathbb{R}^+$ con $t_1 < t_2$,

$$R(x_2, t_2) - s(t_2) \geq e^{-\Delta/4 - C(t_2 - t_1)}(R(x_1, t_1) - s(t_1)),$$

donde

$$\Delta(x_1, t_1, x_2, t_2) = \operatorname*{ínf}_{\gamma} \int_{\tau}^{T} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 dt.$$

Usando este estimativo de Harnack y la cota superior en la entropía modificada obtenemos una cota superior uniforme en la curvatura, y a partir de la misma obtenemos una cota inferior uniforme en el radio de inyectividad y una cota superior uniforme en el diámetro.

Al tener acotado el diámetro, la desigualdad de Harnack nos da $R - s \geq c > 0$ para todo $t \geq 0$, pero como $s(t) \to 0$ exponencialmente, vemos que $R(t)$ debe ser estrictamente positivo con t suficientemente grande. Esto reduce al caso previo, que fue demostrado en la subsección anterior.

Finalmente, se obtiene

Corolario 6.12. *Si M es una superficie cerrada con métrica inicial g_0, bajo el flujo de Ricci, $g(t)$ converge a una métrica de curvatura constante.*

Si bien el trabajo de Hamilton dependía del teorema de uniformización en los casos $\chi(M) = 0$ y $\chi(M) > 0$, las pruebas aquí presentadas sortean el uso de éste y por lo tanto brindan una prueba independiente del mismo.

A Apéndice A

En este apéndice daremos un breve repaso de geometría Riemanniana, enfocándonos en el cálculo tensorial y en la definición de algunas cantidades importantes. Para un desarrollo detallado de los teoremas y definiciones sobre variedades Riemannianas, mirar por ejemplo [dC92] y [Lan96]. La derivada de Lie y resultados relacionados pueden encontrarse en [War83]. Una introducción sencilla a la derivada covariante y curvatura puede ser encontrada en [Lee91] y [GHL90].

A.1 Tensores y variedades Riemannianas

Definición A.1.

Un *fibrado vectorial k-dimensional* es una variedad $\mathcal{E}$ (el espacio total) junto con una variedad M y un mapa sobreyectivo $\pi : \mathcal{E} \to M$ (el mapa proyección) tal que

1. Para cada $p \in M$, el conjunto $\mathcal{E}_p := \pi^{-1}(p)$ tiene estructura de espacio vectorial k-dimensional (llamamos a esto la *fibra* de $\mathcal{E}$ sobre p).
2. Para cada $p \in M$ existe un abierto U de p y un difeomorfismo suave $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathcal{R}^k$ (una *trivialización local*) tal que φ manda cada fibra $\mathcal{E}_p$ a la fibra correspondiente $\{p\} \times \mathbb{R}^k$ por un isomorfismo lineal.

Una *sección* de $\mathcal{E}$ es un mapa $F : M \to \mathcal{E}$ tal que $\pi \circ F = Id_M$. El espacio de las secciones de $\mathcal{E}$ se denota por $C^\infty(\mathcal{E})$.

Definición A.2. Sea M una n-variedad diferenciable. Definimos el *fibrado tangente* de M como el fibrado vectorial con espacio base M y proyección definida por $\pi(X) = p$ si $X \in T_pM$. Denotamos este espacio como TM.

Similarmente, definimos el *fibrado cotangente* de M como el fibrado vectorial con espacio base M y proyección definida por $\pi(\omega) = p$ si $\omega \in T_p^*M$. Denotamos este espacio como T^*M.

Recordamos que estos tienen estructura de variedad diferenciable de dimensión 2n.

Definición A.3. Decimos que X es un *campo vectorial* en M si es una sección de TM. Similarmente, decimos que ω es una *1-forma* en M si es una sección de T^*M.

Podemos generalizar este tipo de construcciones con la siguiente definición,

Definición A.4. Sea M una n-variedad diferenciable. Definimos un campo tensorial de tipo (k, l) como una sección diferenciable de

$$T_l^k(M) := \underbrace{T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M}_{k \text{ veces}} \otimes \underbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}_{l \text{ veces}}$$

Dado un sistema de coordenadas local (x^i) sobre el punto $p \in M$, podemos escribir cualquier tensor de tipo (k,l) T en este sistema como

$$T = T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} \partial_{j_1} \otimes \cdots \otimes \partial j_l \otimes dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}$$

Donde sumamos sobre todos los indices j_p, i_q que se repiten dos veces, uno arriba y uno abajo. Esto se conoce como el *convenio de sumación de Einstein.*

Será usual utilizar la representación en coordenadas de estos campos para hacer los cálculos más sencillos, y escribiremos $T^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k}$ en vez de T abusando de la notación.

Dado un tensor $T^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} \in T^k_l(M)$ podemos tomar la traza sobre un indice superior y uno inferior de la siguiente forma,

$$(trT)^{j_2 \ldots j_k}_{i_2 \ldots i_k} = T^{pj_2 \ldots j_k}_{pi_2 \ldots i_k}$$

y obtenemos un elemento de $T^{k-1}_{l-1}(M)$. Recordamos que estamos utilizando el convenio de sumación de einstein y por lo tanto estamos tomando la suma con p de 1 a dim(M).

Mirando la definición es claro que la traza depende de sobre cuales índices estemos tomando la misma (aquí elegimos i_1 y j_1). Sin embargo, el tensor resultante no depende de las coordenadas locales elegidas.

Una k-forma en M es una sección de $\Lambda^k T^* M$. Es decir, un (k,0)-tensor tal que es antisimétrico en todos sus índices. Un k-campo vectorial en M es una sección de $\Lambda^k TM$.

Definición A.5. Sea A un (2,0)-tensor. Decimos que A es *estrictamente positivo* (*definido positivo*) y escribimos $A > 0$ ($A \geq 0$) si

$$A(V, V) > 0 \quad (A(V, V) \geq 0)$$

para todo $V \in TM$, $V \neq 0$. Similarmente, podemos definir $A > B$ ($A \geq B$) si $A - B > 0$ ($A - B \geq 0$).

Con esto, podemos definir una métrica Riemanniana como

Definición A.6. Una métrica Riemanniana en una variedad suave M es un producto interno que varía suavemente en el plano tangente de cada punto $p \in M$, es decir, un campo tensorial de tipo (2,0) tal que es simétrico y estrictamente positivo en cada punto de M. Denotaremos una métrica Riemanniana como g y a su representación en coordenadas como g_{ij}.

Una variedad suave dotada de una métrica riemanniana (M, g) se dice una variedad Riemanniana.

Dada una variedad Riemanniana (M, g), tenemos una norma inducida en cada plano tangente, que podemos escribir como

$$|X|_g := \sqrt{g(X, X)} \quad \forall X \in T_p M.$$

Para aliviar la notación en algunos cálculos, escribiremos $|\cdot|$ (o equivalentemente $\|\cdot\|$) en vez de $|\cdot|_g$ en los casos donde no haya ambiguedad. Similarmente utilizaremos la notacion $\langle X, Y \rangle$ para indicar $g(X, Y)$.

Teniendo entonces la métrica, tiene sentido definir isometrías. Decimos que $\phi : M \to N$ es una isometría entre dos variedades Riemannianas (M, g) y (N, h) si es un difeomorfismo y $\phi^* h = g$. Cuando exista una tal ϕ entre dos variedades, diremos que son isométricas.

Denotamos a la inversa de la métrica por g^{ij} y notamos que está definida por la ecuación

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$$

siendo δ^i_k el delta de Kronecker. Ahora, por el teorema de representación de Riesz, todo producto interno nos induce un isomorfismo $V \cong V^*$ dado por el mapa $X \mapsto X^\flat$ definido por

$$X^\flat := \langle X, Y \rangle$$

que en coordenadas queda dado por $X^\flat_i = g_{ij} X^j$. Usando esta misma idea, para un tensor en general podemos *bajar un índice* de la misma manera; por ejemplo, si tomamos $T^{rmp}{}_{iq}$, podemos escribir

$$T_r{}^{mp}{}_{iq} := g_{rs} T^{smp}{}_{iq}$$

Que toma un elemento de $T^k_l(M)$ y nos retorna otro en $T^{k+1}_{l-1}(M)$.

De igual manera, usando g^{ij} podemos definir *subir un índice* de un tensor. Un ejemplo de esto sería, dado el tensor $T^{rmp}{}_{iq}$,

$$T^{rmp}{}_i{}^q := g_{qs} T^{rmp}{}_{is},$$

que dado un elemento de $T^k_l(M)$ lo mapea a $T^{k-1}_{l+1}(M)$.

También podemos definir una *norma* en el espacio de tensores usando estas mismas ideas; por ejemplo

$$|T^{ijk}_{pq}|^2_g := g_{i_1 i_2} g_{j_1 j_2} g_{k_1 k_2} g^{q_1 q_2} g^{p_1 p_2} T^{i_1 j_1 k_1}_{p_1 q_1} T^{i_2 j_2 k_2}_{p_2 q_2}.$$

Definición A.7. Dados dos tensores A y B, la expresión $A * B$ indicará una combinación lineal de trazas de $A \otimes B$ con coeficientes que no dependen de A o B.

También podemos extender esta notación a productos múltiples para referirnos a combinaciones lineales de $*$-productos de cantidades tensoriales.

A.2 Derivada de Lie

La noción de derivada de una función en una variedad puede ser extendida sin necesidad de introducir una métrica en la misma, es decir, dependiendo sólamente de de la estructura de M como variedad. Veamos cómo.

Sea X un campo en M y consideramos φ_t con $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ el flujo generado por X, podemos definir la *derivada de Lie* para (k,l)-campo tensorial F como

$$\mathcal{L}_X F(p) := \frac{d}{dt}\left((\varphi_{-t})_* F(\varphi_t(p)) \right)\Big|_{t=0}$$

Y en coordenadas, el término $(\varphi_{-t})_* F(X_1, ..., X_k, \omega^1, ..., \omega^l)(\varphi_t(p))$ puede escribirse como

$$F_{\varphi_t(p)}\left((\varphi_t)_*\big(X_1(p)\big), ..., (\varphi_t)_*\big(X_k(p)\big), (\varphi_t^{-1})^*\big(\omega^1(p)\big), ...(\varphi_t^{-1})^*\big(\omega^l(p)\big) \right),$$

que también es una cantidad tensorial del mismo tipo que F. Más informalmente, lo que estamos haciendo es transportar los campos y 1-formas por el flujo generado por X y viendo la variación en $t = 0$ de esta cantidad. Más en general, tenemos

Lema A.1. *La derivada de Lie está bien definida. Además, si X e Y son campos vectoriales, ω es una k-forma y F y G son tensores, se cumple*

1. *Para una función escalar f, $\mathcal{L}_X f = X(f)$.*

2. *Si Y es un campo vectorial, $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$, donde $[X, Y] := XY - YX$.*

3. $\mathcal{L}_X(F \otimes G) = (\mathcal{L}_X F) \otimes G + F \otimes (\mathcal{L}_X G)$.

4. *$\mathcal{L}_X$ conmuta con tomar trazas, $\mathcal{L}_X(trT) = tr(\mathcal{L}_X T)$ para toda traza sobre cualquier par de índices del tensor T.*

5. *Fórmula de Cartan para k-formas; $\mathcal{L}_X \omega = i_X d\omega + d(i_X \omega)$.*

Demostración. La prueba de estas propiedades es directa y pueden encontrarse por ejemplo, en [War83]. □

A.3 Derivada covariante

Recordamos algunas definiciones generales sobre variedades Riemannianas.

Definición A.8. Dado un fibrado vectorial $\mathcal{E}$ sobre M, una conexión en $\mathcal{E}$ es un mapa

$$\nabla : C^\infty(TM) \times C^\infty(\mathcal{E}) \to C^\infty(\mathcal{E})$$

tal que

1. $\nabla_X Y$ es un lineal sobre $C^\infty(M)$ en X

2. $\nabla_X Y$ es $\mathbb{R}$-lineal sobre Y

3. ∇ satisface la regla de Leibniz, $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$

Decimos que $\nabla_X Y$ es la *derivada covariante* de Y en la dirección de X.

De esta definición nace naturalmente el concepto de "transportar un vector"de un plano tangente en un punto hacia otro cercano; dada una curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = X_p$, una sección Y de $\mathcal{E}$ definida sobre γ en M se dice *paralela* sobre γ si $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} Y = 0$ sobre γ.

A partir de la definición, notamos que una conexión sobre un fibrado $\mathcal{E}$ queda unívocamente definida en coordenadas locales (x^i) con base local (E_j) para $\mathcal{E}$ por las ecuaciones

$$\nabla_{\partial_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k$$

Donde los Γ_{ij}^k son los *símbolos de Christoffel* para la conexión ∇.

Para poder trabajar con flujos geométricos, es necesario definir una manera de derivar tensores. Para ello es que tenemos el siguiente.

Lema A.2. *Dada una conexión ∇ en el fibrado tangente TM, podemos definir conexiones en todos los fibrados tensoriales $T_l^k(M)$ tal que*

1. *∇ es la conexión dada sobre TM*

2. *Para funciones escalares f, se cumple $\nabla_X f = X(f)$*

3. $\nabla_X(F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G = F \otimes (\nabla_X G)$

4. *∇_X conmuta con todas las trazas: $\nabla_X(trY) = tr(\nabla_X(Y))$ para todas las trazas sobre cualquier par de índices en Y*

Demostración. La prueba puede encontrarse por ejemplo en [Lee91], Sección 4. □

Luego, si T es un tensor de tipo (k,l) en M dado por coordenadas locales, podemos escribir la derivada covariante de T como

$$(\nabla_X T) = (\nabla_p T^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k})\partial_{j_1} \otimes \ldots \otimes \partial j_l \otimes dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k} X^p,$$

que en coordenadas locales, $(\nabla_p T^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k})$ tiene la forma

$$(\nabla_p T^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k}) = \partial_p T^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} + \sum_{s=1}^{l} T^{j_1 \ldots q \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} \Gamma^{j_s}_{pq} - \sum_{s=1}^{k} T^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots q \ldots i_k} \Gamma^{q}_{pi_s}, \tag{83}$$

donde en el segundo término, el índice q ocupa la posición de j_s y en el tercero ocupa la posición de i_s.

Haciendo uso de la notación $*$, podemos escibir la ecuación anterior como

$$\nabla T = \partial T + \Gamma * T.$$

Podemos generalizar este resultado usando inducción,

Lema A.3. *Sea $\nabla^m T$ la derivada covariante m-ésima del tensor T y $\partial^m T$ la expresión en coordenadas*

$$(\partial^m T)_{i_1 \ldots i_m} := \partial_{i_1 \ldots i_m} T,$$

en un sistema de coordenadas locales (x^i) definidas en una carta U. Entonces,

$$\nabla^m T = \partial^m T + \sum_{i=0}^{m-1} \left((\underset{j \leq m-1}{*})(\partial^j \Gamma) \right) * \nabla^i T.$$

Teorema A.4 (Levi-Civita)**.** *Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Entonces existe una única conexión ∇ en TM que satisface*

1. *∇ es compatible con la métrica g: $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$*
2. *∇ es libre de torsión: $\tau(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \equiv 0$*

La condición (1) se puede reescribir usando el lema previo como $\nabla g = 0$.

La conexión que cumple estas condiciones se denomina conexión de Levi-Civita de g.

Demostración. Ver [dC92], sección 2. □

En coordenadas locales, los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita son

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_j l + \partial_j g_i l - \partial_l g_{ij}).$$

Usando esta conexión podemos definir el siguiente operador.

Definición A.9. Definimos el *Laplaciano* en (M, g) como la familia de operadores

$$\Delta : C^\infty(T^k_l M) \to C^\infty(T^k_l M)$$

mediante

$$\Delta T := g^{ij} \nabla_i \nabla_j T,$$

donde ∇ es la conexión de Levi-Civita de g. En coordenadas, escibimos $\Delta T^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k}$ en vez de $(\Delta T)^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k}$.

Además tenemos la siguiente relación entre la conexión de Levi-Civita y la derivada de Lie,

Lema A.5. *Si (M, g) es una variedad Riemanniana y X un campo en M, tenemos*

$$(\mathcal{L}_X g)_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i,$$

donde ∇ es la conexión de Levi-Civita de la métrica g.

Fijando una conexión en M (que usualmente será la conexión de Levi-Civita), podemos definir el una “curva sin aceleración” o *geodésica* como una curva $\gamma : [a, b] \to M$ tal que $\nabla_{\dot\gamma(t)} \dot\gamma(t) = 0 \quad \forall t \in [a, b]$. Fijando un punto inicial y una velocidad inicial, existe una única geodésica con dicha velocidad que pasa por ese punto.

Además, si M es completa, el intervalo maximal de definición de la misma es $\mathbb{R}$.

Definición A.10. Sea M una variedad suave completa y sin borde. Dado $v \in T_pM$, sea $\gamma_v : [0, 1] \to M$ la única geodésica que empieza en p con velocidad v; es decir, $\gamma_v(0) = p$, $\dot\gamma_v(0) = v$. Definimos el *mapa exponencial* $exp : TM \to M$ como $exp(v) = \gamma_v(1)$. Denotamos exp_p al mapa exponencial restricto a T_pM. Este mapa es suave.

Como exp_p es un difeomorfismo local en el origen de T_pM, es posible elegir un entorno U de P tal que es difeomorfo a un abierto de $T_pM = \mathbb{R}^n$ por el teorema de la función inversa. Podemos elegir entonces coordenadas (x^i) en T_pM tal que los vectores (∂_i) son ortonormales con respecto a la métrica g en p. Entonces tenemos una carta (U, exp_p^{-1}). Estas coordenadas son las *coordenadas normales* en p y tienen propiedades que las hacen útiles para realizar cálculos.

Lema A.6. *En coordenadas normales en un entorno p, tenemos*

1. $g_{ij} = \delta_{ij}$ *en p.*

2. *Si $v \in \mathbb{R}^n$, la curva $\gamma_v(t) = tv$ es una geodésica mientras esté definida.*

3. $\partial_k g_{ij} = 0$ *y* $\Gamma^k_{ij} = 0$ *en p. Por lo tanto*

$$\nabla_k T^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} = \partial_k T^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k}$$

en p, por la fórmula 83.

Demostración. La prueba es directa, pero los cálculos pueden verse por ejemplo en ([O'n83]). $\square$

Definición A.11. El *radio de inyectividad* en un punto $p \in M$ está dado por

$$\operatorname{inj}(p) := sup\{r > 0 : exp_p : B(0,r) \to M \text{ es inyectiva } \}$$

Y el *radio de inyectividad de* M es

$$\operatorname{inj}(M,g) := \inf\{\operatorname{inj}(p) : p \in M\}$$

Sobre esta cantidad, tenemos el siguiente resultado.

Teorema A.7. *[Klingenberg] Sea* (M,g) *una superficie orientable tal que la curvatura escalar* R *está acotada por* $0 < R < C$ *con* $C > 0$ *una constante. Entonces*

$$\operatorname{inj}(M,g) \geq \frac{\pi}{\sqrt{C}}.$$

Demostración. Ver el teorema 5.9 de [CE08]. □

A.4 El tensor de Riemann y cantidades relacionadas

Definición A.12. Sea (M,g) una variedad Riemanniana. Definimos el *tensor de curvatura de Riemann* como el (3,1)-tensor que cumple

$$\operatorname{Rm}(X,Y,Z,\omega) := \omega(R(X,Y)Z)$$

donde

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &:= \nabla^2 Z(X,Y) - \nabla^2 Z(Y,X) \\ &= \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z. \end{aligned} \tag{84}$$

Recordamos que por la regla del producto se tiene que

$$(\nabla^2 Z)(X,Y) \neq \nabla_X(\nabla_Y Z)$$

sino que

$$(\nabla^2 Z)(X,Y) = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_{\nabla_X Y} Z.$$

Si bien no es obvio que es un (3,1)-tensor, esto puede ser chequeado a mano facilmente. En coordenadas locales, escribiremos Rm como R^l_{ijk}.

Usando la fórmula (83) y la conexión de Levi- Civita obtenemos

Lema A.8. *En coordenadas locales, tenemos la siguiente igualdad,*

$$R^l_{ijk} = \partial_i \Gamma^l_{ik} - \partial_j \Gamma^l_{ik} + \Gamma^p_{jk}\Gamma^l_{ip} - \Gamma^p_{ik}\Gamma^l_{jp}.$$

Nos será útil conocer algunas simetrías e identidades al permutar índices. Jugando con la definición del tensor de Riemann y las propiedades de la conexión de Levi Civita obtenemos

Lema A.9. *El tensor de Riemann satisface las siguientes propiedades.*

1. $R_{ijkl} = R_{klij} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}$.
2. *Primera identidad de Bianchi:* $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$.
3. *Segunda identidad de Bianchi:* $\nabla_p R_{ijkl} + \nabla_i R_{jpkl} + \nabla_j R_{pikl} = 0$.

Demostración. Pueden encontrarse en [O'n83] y [Wal84]. □

Definición A.13. El *tensor de curvatura de Ricci* es el (2,0)-tensor dado por

$$R_{ij} := R^s_{sij}.$$

Y notamos que $R_{ij} = R_{ji}$.

La *curvatura escalar* es la traza del tensor de Ricci,

$$R := g^{ij} R_{ij}.$$

Veamos algunas propiedades que nos serán utiles a la hora de realizar los cálculos.

Proposición A.10. *Se cumplen las siguientes propiedades.*

1. $[\nabla_i, \nabla_j] X^l \equiv R^l_{ijk} X^k$.
2. *Contracción de la segunda identidad de Bianchi:* $\nabla^j R_{ij} = \frac{1}{2} \nabla_i R$.
3. *Fórmula para conmutar derivadas covariantes:*

$$[\nabla_p, \nabla_q] T^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} = \sum_{s=1}^{l} R^{j_s}_{pqm} T^{j_1 \ldots m \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} - \sum_{s=1}^{l} R^m_{pqi_s} T^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots m \ldots i_k}$$

Demostración. Las pruebas de estas igualdades son directas y pueden encontrarse por ejemplo en [Lee91], Capítulo 7. □

Finalmente, si modificamos la métrica por una constante, obtenemos las siguientes relaciones sobre algunas cantidades geométricas.

Lema A.11. *Si $\tilde{g} = Cg$ son dos métricas Riemannianas en M relacionadas por un factor de escala C, entonces se tienen las siguientes relaciones.*

1. $\tilde{g}^{ij} = C^{-1} g^{ij}$.
2. $\tilde{R}^l_{ijk} = R^l_{ijk}$.
3. $\tilde{R}_{ij} = R_{ij}$.
4. $\tilde{R} = C^{-1} R$.
5. *La forma de volumen cumple la siguuiente igualdad:* $d\tilde{\mu} = C^{n/2} d\mu$.

Demostración. Nuevamente, estos resultados pueden encontrarse en [Lee91]. □

A.5 Campos de Jacobi y campos de Killing

Definición A.14. Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Decimos que J es un campo de Jacobi si satisface la euación de Jacobi:

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \nabla_{\dot{\gamma}(t)} J(t) + R(J(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t) = 0,$$

donde $R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z$, como en la definición de Rm.

Lema A.12. *Sea $\gamma : [0, a] \to M$ una geodésica en M, y γ_τ una familia suave de geodésicas con $\gamma_0 = \gamma$. Entonces*

$$J(t) = \left. \frac{\partial \gamma_\tau(t)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}$$

es un campo de Jacobi. Es decir, la variación de una variación suave de geodésicas nos da un campo de Jacobi.

Definición A.15. Sea σ una geodésica conectando a p y q en (M, g). Decimos que p y q son *puntos conjugados* si existe un campo de Jacobi no nulo $J(t)$ sobre γ tal que $J(a) = J(b) = 0$.

Teorema A.13. *Si tengo una geodésica γ definida en [a,b] con $\gamma(a) = p$ y $\gamma(b) = q$ puntos conjugados y existe $a < r < b$ con $\gamma(r)$ conjugado a p, entonces la longitud de la geodésica no puede ser mínimo local; en particular no puede ser minimizante.*

Definición A.16. Sea (M, g) variedad Riemanniana. Decimos que X es un campo de Killing si el flujo asociado ϕ genera una familia de isometrías ϕ_t definida por

$$\phi_t := \phi(\cdot, t).$$

Teorema A.14. *X es un campo de Killing en (M, g) si y solamente si*

$$\mathcal{L}_X g = 0.$$

A.6 Cocientes de diferencias a futuro

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en un intervalo. Decimos que el *cociente de diferencias a futuro* de f en un punto $t \in [a, b)$, denotado por $\frac{df}{dt}(t)$, es menor o igual a c si

$$\limsup_{\Delta t \to 0^+} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \leq c.$$

Decimos que es mayor o igual a c' si

$$c' \leq \liminf_{\Delta t \to 0^+} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Argumentos estándar de comparación muestran el siguiente.

Lema A.15. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que ϕ es C^1 en $[a, b] \times \mathbb{R}$ y además $\frac{df}{dt}(t) \leq \phi(t, f(t))$ para cada $t \in [a, b)$ en el sentido de los cocientes de diferencias a futuro. Supongamos además que existe $G(t)$ en $[a, b]$ tal que $G'(t) = \phi(t, G(t))$ y además $f(a) \leq G(a)$. Entonces $f(t) \leq G(t)$ para todo $t \in [a, b]$.*

B Evolución de cantidades geométricas

Para poder analizar el flujo, es necesario saber cómo evolucionan los objetos geométricos tales como el tensor de curvatura y la curvatura escalar bajo este flujo. En esta sección nos limitaremos a enunciar algunos cálculos que son utilizados frecuentemente. Las pruebas pueden encontrarse en [CK04], capítulo 6.

B.1 Evolución de cantidades en dimensión arbitraria

Consideremos una ecuación de la forma

$$\frac{d}{dt} g_{ij} = h_{ij}.$$

Lema B.1. *La ecuación de evolución para la inversa de g_{ij} es*

$$\frac{d}{dt} g^{ij} = -g^{ik} g^{jl} h_{kl}.$$

Asumiremos que estamos eligiendo coordenadas geodésicas centradas en el punto p sobre el que estamos trabajando, por lo que $\partial_i g_{jk}(p) = 0$ para todo i, j, k. Observamos ahora que si bien los símbolos de Christoffel no son tensores, la variación de los mismos con respecto al tiempo es tensorial.

Lema B.2. *La evolución de los símbolos de Christoffel está dada por*

$$\frac{d}{dt} \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\nabla_i h_{lj} + \nabla_j h_{il} - \nabla_l h_{ij}).$$

En particular, para el flujo de Ricci la ecuación es

$$\frac{d}{dt} \Gamma_{ij}^k = -g^{kl} (\nabla_i R_{jl} + \nabla_j R_{il} - \nabla_l R_{ij}).$$

Lema B.3. *Bajo las condiciones de esta sección, el tensor de Riemann evoluciona a través de la ecuación*

$$\frac{d}{dt} R_{ijk}^l = \frac{1}{2} g^{lm} \left[-R_{ijm}^p h_{pk} - R_{ijk}^p h_{pm} + \nabla_i \nabla_k h_{jm} - \nabla_j \nabla_k h_{im} + \nabla_j \nabla_m h_{ik} - \nabla_i \nabla_m h_{jk} \right].$$

En particular, para el flujo de Ricci la ecuación es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R_{ijkl} &= \Delta R_{ijkl} + 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} + B_{ikjl} - B_{iljk}) \\ &= -(R_i^p R_{pjkl} + R_j^p R_{ipkl} + R_k^p R_{ijpl} + R_l^p R_{ijkp}), \end{aligned} \tag{85}$$

donde $B_{ijkl} := -R_{pij}^q R_{qlk}^p$.

Lema B.4. *La evolución del tensor de Ricci está dada por*

$$\frac{d}{dt} R_{jk} = \frac{1}{2} g^{ab} [\nabla_a \nabla_k h_{jb} - \nabla_j \nabla_k h_{ab} + \nabla_j \nabla_b h_{ak} - \nabla_a \nabla_b h_{jk}].$$

En particular, para el flujo de Ricci la ecuación es

$$\frac{d}{dt} R_{ij} = \Delta R_{ij} + 2R_{pijq} R^{pq} - 2R_i^p R_{pj}. \tag{86}$$

Demostración. Basta contraer el resultado anterior en $i = l$. $\square$

Teorema B.5. *La curvatura escalar evoluciona mediante la ecuación*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}R &= -\Delta(tr_g(h)) + g^{aj}g^{bk}(\nabla_a\nabla_b h_{jk} - R_{ab}h_{jk}) \\ &= -\Delta(tr_g(h)) + g^{aj}g^{bk}\nabla_a\nabla_b h_{jk} - \langle Ric, h\rangle_g.\end{aligned} \tag{87}$$

En particular, para el flujo de Ricci la ecuación es

$$\frac{d}{dt}R = \Delta R + 2|\operatorname{Rc}|^2.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}R &= \frac{d}{dt}(g^{jk}R_{jk}) \\ &= -g^{jm}g^{kl}h_{ml}R_{jk} \\ &\quad + g^{jk}(\frac{1}{2}g^{ab}[\nabla_a\nabla_k h_{jb} - \nabla_j\nabla_k h_{ab} + \nabla_j\nabla_b h_{ak} - \nabla_a\nabla_b h_{jk}]) \\ &= -g^{jk}\nabla_j\nabla_k(g^{ab}h_{ab}) + g^{jk}g^{ab}\nabla_j\nabla_a h_{kb} - g^{jm}g^{kl}h_{ml}R_{jk} \\ &= -\Delta(tr_g(h)) + g^{aj}g^{bk}(\nabla_a\nabla_b h_{jk} - R_{ab}h_{jk}).\end{aligned} \tag{88}$$

Finalmente, observamos que $\langle Ric, h\rangle_g. = g^{aj}g^{bk}R_{ab}h_{jk}$. $\square$

B.2 Evolución de algunas cantidades en dimensión 2

Proposición B.6. *Sea* (M, g) *una superficie Riemanniana. Entonces* $\operatorname{Rc} = \frac{1}{2}Rg$.

Demostración. Sea K la curvatura Gaussiana de nuestra superficie. Como estamos en dimensión 2, hay una sola componente independiente del tensor de curvatura, pues

$$R_{1212} = -R_{1221} = -R_{2112} = R_{2121}$$

y como $R_{1212} = -\det(g)K$, se obtiene que

$$R_{abcd} = K(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}).$$

Entonces, tomando trazas tenemos

$$g^{ac}R_{abcd} = Kg^{ac}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}),$$

y por lo tanto,

$$\operatorname{Rc}_{bd} = Kg_{bd} \tag{89}$$

Tomando trazas una vez más,

$$R = g^{cd}R_{cd} = Kg^{cd}g_{cd} = 2K,$$

teniendo entonces $K = \frac{1}{2}R$. Uniendo esto con (89) obtenemos el resultado. $\square$

Corolario B.7. *Bajo el FRN en superficies, la curvatura escalar evoluciona a través de la siguiente EDP,*

$$\frac{d}{dt}R = \Delta R + R(R - r)$$

Donde $r = \frac{\int R d\mu}{\int d\mu} = 4\pi\chi(M)/A$, *donde* $\chi(M)$ *es la clase de Euler de* M *y*A *el área total de la superficie en* $t = 0$.

Demostración. Utilizaremos los lemas obtenidos previamente, con $h_{ij} = -2R_{ij} + rg_{ij} = -(R - r)g_{ij}$ por estar en dimensión 2. Por lo tanto,

$$tr_g(h) = -(R - r)tr_g(g) = -2(R - r).$$

Luego $\Delta(tr_g(h)) = -2\Delta R$.

Además,

$$\begin{aligned} g^{jk}g^{ab}\nabla_j\nabla_a h_{kb} &= g^{jk}g^{ab}\nabla_j\nabla_a(-(R - r)g_{kb}) \\ &= g^{jk}g^{ab}(-\nabla_j\nabla_a R g_{kb}) \\ &= g^{jk}g^{ab}g_{kb}(-\nabla_j\nabla_a R) \\ &= -\Delta R. \end{aligned} \tag{90}$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned} -\langle Ric, h\rangle_g &= \frac{1}{2}R(R - r)\langle g, g\rangle \\ &= R(R - r). \end{aligned} \tag{91}$$

Juntando lo anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}R &= -\Delta(tr_g(h)) + g^{aj}g^{bk}\nabla_a\nabla_b h_{jk} - \langle Ric, h\rangle_g \\ &= -(-2\Delta R) - \Delta R + R(R - r) \\ &= \Delta R + R(R - r). \end{aligned} \tag{92}$$

La igualdad $r = 4\pi\chi(M)/A$ es consecuencia inmediata de la igualdad $R = 2K$ y el teorema de Gauss-Bonnet. □

C El principio escalar del máximo

Teorema C.1 (Principio escalar del máximo)**.** *Sea M una variedad Riemanniana cerrada y $g(t)$ una familia de métricas sobre M. Supongamos que $u : M \times [0,T] \to \mathbb{R}$ es una satisface la desigualdad diferencial*

$$\frac{d}{dt}u \geq \Delta_{g(t)}u + \langle X(t), \nabla u \rangle + F(u), \tag{93}$$

donde $X(t)$ es un campo vectorial dependiente del tiempo y F es una función localmente Lipschitz. Sea $h(t)$ solución de la EDO asociada $\frac{d}{dt}h = F(h)$ con $u(\cdot, 0) \geq h(0)$. Entonces $u \geq h$ para todo $x \in M$ y $t \in [0,T]$.

Demostración. Este teorema es consecuencia de que en un mínimo local, el Laplaciano es no negativo y el gradiente es nulo. Consideremos una función $u_\epsilon := u + \epsilon(\delta + t)$. Notamos que $M \times [0,T]$ es compacto, pot lo que podemos elegir una constante uniforme de Lipschitz K para F. Elegimos un δ pequeño que depende únicamente de K tal que $u_\epsilon - h > 0$ para $t \in [0,\delta]$; y podemos hacer que ϵ tienda a 0 para probar el resultado en $[0,\delta]$ y luego repetir el argumento con el mismo δ para cubrir todo el intervalo $[0,T]$.

Notamos que $u_\epsilon > h$ en $t = 0$. Supongamos que existe un primer tiempo t_0 tal que $u_\epsilon = h$ en un punto x_0. Como tenemos que para todo tiempo $t < t_0$ $(u_\epsilon - h)(x_0, t_0) > 0$, la derivada temporal es no positiva y estamos en un mínimo espacial. Entonces en (x_0, t_0) tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{\partial}{\partial t}(u_\epsilon - h) \\ &\geq \epsilon + \Delta_{g(t)}(u_\epsilon - h) - \langle X(t), \nabla(u_\epsilon - h)\rangle + F(u_\epsilon - \epsilon(\delta + t)) - F(h) \\ &\geq \epsilon - K|u_\epsilon - h - \epsilon(\delta + t)| \\ &= \epsilon(1 - K|\delta + t|). \end{aligned} \tag{94}$$

Tomando $\delta < \frac{1}{2K}$, esta expresión es estrictamente positiva en $[0,\delta]$, lo que es absurdo. ☐

Es importante notar que estos resultados valen también para el mínimo; es decir, si consideramos la desigualdad diferencial

$$\frac{d}{dt}u \leq \Delta_{g(t)}u + \langle X(t), \nabla u \rangle + F(u), \tag{95}$$

donde $X(t)$ es un campo vectorial dependiente del tiempo y F es una función localmente Lipschitz. Sea $h(t)$ solución de la EDO asociada $\frac{d}{dt}h = F(h)$ con $u(\cdot, 0) \geq h(0)$. Entonces $u \leq h$ para todo $x \in M$ y $t \in [0,T]$.

Referencias

[B.C91] B.Chow. The ricci flow on the 2-sphere. *Journal of Differential Geometry*, 33:325–334, 1991.

[Bre10] S. Brendle. *Ricci flow and the sphere theorem.* American Mathematical Society, 2010.

[BS09] Simon Brendle and Richard Schoen. Manifolds with 1/4-pinched curvature are space forms. *. Amer. Math. Soc.*, 22:287–307, 2009.

[CCCY] HD Cao, B Chow, SC Chu, and ST Yau. *Collected papers on Ricci flow, Ser*, volume 37.

[CE08] J. Cheeger and D. Ebin. *Comparison theorems in Riemannian Geometry.* American Mathematical Society, 2008.

[CK04] Bennet Chow and Dan Knopf. *The Ricci Flow: an introduction.* American Mathematical Society, 2004.

[CT06] P. Lu X. Chen and G. Tian. A note on uniformization of riemann surfaces by ricci flow. *Proc. Amer. Math. Soc*, 134:3391—3393, 2006.

[dC92] Manfredo P. do Carmo. *Riemannian Geometry.* Birkhäuser, 1992.

[GHL90] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*, volume 3. Springer, 1990.

[Ham82] Richard Hamilton. Three-manifolds with positive ricci curvature. *Journal of Differential Geometry*, 17:255–306, 1982.

[Ham88] Richard S. Hamilton. The ricci flow on surfaces. *Mathematics and General Relativity*, 71:237–261, 1988.

[Lan96] S. Lang. *Differential and Riemannian Manifolds.* Springer-Verlag, 1996.

[Lee91] John M. Lee. *Riemannian Manifolds: An introduction to curvature.* Springer, 1991.

[Mil63] J. Milnor. *Morse Theory.* Princeton University Press, 1963.

[MT07] John Morgan and Gang Tian. *Ricci Flow and the Poincaré Conjecture.* American Mathematical Society, 2007.

[ON67] V.A.Solonnikov O.A.Ladyzhenskaya and N.N.Uraltseva. *Linear and quasilinear equations of parabolic type.* American Mathematical Society, 1967.

[O'n83] Barrett O'neill. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, volume 103. Academic press, 1983.

[Per02a] Grisha Perelman. The entropy formula for the ricci flow and its geometric applications. 2002.

[Per02b] Grisha Perelman. Finite extinction time for the solutions to the ricci flow on certain threemanifolds. 2002.

[Per03] Grisha Perelman. Ricci flow with surgery on three-manifolds. 2003.

[Wal84] Robert M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.

[War83] Frank W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer, 1983.