

TRABAJO MONOGRÁFICO

---

Difeomorfismos parcialmente hiperbólicos  
con foliación central compacta

---

Verónica De Martino Pérez

Noviembre de 2017

Orientador:

Rafael Potrie Altieri

Centro de Matemática

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

URUGUAY



## Resumen

Consideramos  $f$  un difeomorfismo parcialmente hiperbólico y dinámicamente coherente. Si la foliación central es una foliación por círculos y tal que los fibrados estable e inestable tienen dimensión ambos menor o igual a dos, probamos que la longitud de las hojas centrales está uniformemente acotada.

Además probamos que un cubrimiento finito de  $f$  es un producto fibrado sobre un automorfismo de Anosov del toro si se da alguna de las siguientes condiciones: o bien la foliación central tiene hojas todas simplemente conexas y  $f$  es de codimensión uno o bien la foliación central es de codimensión dos.

Estos resultados fueron probados por A. Gogolev en [G].

## Abstract

Let  $f$  be a dynamically coherent partially hyperbolic diffeomorphism. If the center foliation is a foliation by circles and the stable and unstable bundles are both of dimension less than or equal to two, we prove that the length of the center leaves is uniformly bounded.

We also prove that a finite cover of  $f$  is a skew-product over an toral Anosov automorphism if either of the following conditions is met: either the leaves of the center foliation are all simply connected and  $f$  is of codimension one or the center foliation is of codimension two.

This result was proved by A. Gogolev in [G].

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>12</b>
2.1. Foliaciones . . . . .	12
2.2. Difeomorfismos parcialmente hiperbólicos . . . . .	26
<b>3. Foliaciones por hojas compactas</b>	<b>31</b>
3.1. El ejemplo de Sullivan . . . . .	32
3.2. La función volumen y el conjunto malo . . . . .	36
<b>4. Difeomorfismos parcialmente hiperbólicos con foliación central compacta</b>	<b>40</b>
4.1. Descomposición de la holonomía central . . . . .	40
4.2. Parcialmente hiperbólicos con holonomía central trivial . . . . .	42
4.3. Primeros resultados . . . . .	46
4.4. Enunciado del teorema 1.1 . . . . .	49
<b>5. La prueba del teorema 1.1</b>	<b>51</b>
5.1. Existencia de una hoja volumen recurrente . . . . .	52
5.2. Reducción del problema . . . . .	53
5.3. Enunciado . . . . .	57
5.4. La proyección de holonomía . . . . .	58
5.5. La prueba del teorema . . . . .	60
<b>6. El borde accesible es vacío</b>	<b>62</b>
6.1. El mapa de holonomía . . . . .	62
6.2. Estructura topológica $\widehat{\mathcal{W}}^s(y_0)$ . . . . .	65
6.3. La prueba . . . . .	68



## 1. Introducción

Supongamos una foliación por hojas compactas en una variedad también compacta.

**Pregunta.** *¿Es cierto que el volumen de las hojas tiene que estar acotado?*

Esta pregunta sigue siendo interesante cuando la foliación es una foliación por círculos. Si pensamos en las hojas como las órbitas de un flujo, entonces la pregunta pasa a ser

**Pregunta.** *Si un flujo es tal que todos los puntos son periódicos ¿es cierto que los períodos están acotados?*

Así planteada, esta pregunta es la *Conjetura de órbitas periódicas*. Hoy, es sabido que la conjetura es errónea. D. Sullivan [S] dio un ejemplo en dimensión 5 de un flujo de clase  $C^\infty$ , con todas sus órbitas periódicas pero períodos no acotados.

Poniendo ciertas restricciones, sin embargo, existen resultados. D. Epstein probó que en dimensión 3 la conjetura es cierta (ver [E]), y más tarde E. Vogt e independientemente R. Edwards, K. Millet y D. Sullivan generalizaron la prueba de D. Epstein a foliaciones de codimensión 2 (ver [V], [EMS]). A grandes rasgos, la prueba de D. Epstein consiste en encontrar una sección global transversal al flujo. De esta manera, el problema continuo (de tiempos, longitudes) se convierte en un problema discreto: si consideramos el mapa de primer retorno a dicha sección ¿es cierto que los períodos son acotados? La respuesta es afirmativa; todos los puntos son periódicos y el teorema de Montgomery dice que un homeomorfismo con todos sus puntos periódicos debe ser periódico (ver [M]).

Estos resultados son óptimos, en términos de codimensión. En [EV] se da un ejemplo analítico en dimensión cuatro de una foliación por círculos y longitudes no acotadas.

**Pregunta.** *¿Podemos poner alguna hipótesis dinámica que nos asegure que los períodos son acotados?*

Si suponemos que la foliación es preservada por alguna dinámica (no necesariamente un flujo), quizás podamos usar las características de esa dinámica para estudiar la foliación. O al revés, podemos esperar entender la dinámica a

partir de esa foliación que se preserva. El estudio de foliaciones dinámicas es relativamente reciente, y con toda la teoría de foliaciones a la mano, resulta ser una herramienta bastante fuerte: los sistemas dinámicos son mucho mejor entendidos en dimensiones bajas, y la existencia de una foliación dinámica permite, de alguna forma, reducir la dimensión del problema.

Los sistemas hiperbólicos (sistemas en donde una dirección se expande y otra, transversal, se contrae) han sido extensamente estudiados, y entendidos. Un teorema clásico dice que las direcciones estable e inestable *integran* a foliaciones dinámicas. Pero estas foliaciones no pueden tener hojas compactas (ver [CP], sección 4). Podemos pedirle a un difeomorfismo que tenga una componente hiperbólica y otra (dirección central) en donde el comportamiento está limitado por la contracción-expansión de la hiperbolicidad. Un difeomorfismo así se dice *parcialmente hiperbólico*.

La dirección central de un difeomorfismo parcialmente hiperbólico no tiene por qué ser integrable, pero si lo fuera tiene sentido estudiarla: el resto es hiperbólico ¿Podemos suponer que una foliación por hojas compactas es la foliación tangente a la dirección central de un cierto difeomorfismo parcialmente hiperbólico?

La respuesta es afirmativa, existen ejemplos de dinámicas parcialmente hiperbólicas en donde la dirección central integra a una foliación con todas sus hojas compactas (productos fibrados). En todos los casos, el volumen de las hojas de dicha foliación es uniformemente acotado. La siguiente pregunta fue hecha por C. Pugh (ver [HHU<sub>2</sub>], problema 42)

**Pregunta.** *Si un difeomorfismo parcialmente hiperbólico tiene foliación central con todas las hojas compactas ¿es el volumen de las hojas uniformemente acotado?*

En dimensión 3, C. Bonatti y A. Wilkinson prueban que si el difeomorfismo es transitivo, y existe algún círculo fijo por la dinámica que además cumple que su variedad estable y su variedad inestable se intersectan en otro círculo, entonces existe foliación central con todas las hojas compactas y el volumen de dichas hojas es acotado (ver [BW]).

En dimensiones más altas el problema se vuelve más complicado. P. Carrasco prueba en [C] que si el volumen es localmente acotado en todas las

hojas centrales periódicas, entonces lo es globalmente. Esto es cierto en cualquier dimensión (de la variedad tanto como la de la foliación central), pero la hipótesis parece ser bastante fuerte.

Por otro lado, D. Bohnet y C. Bonatti estudian las consecuencias de que un difeomorfismo parcialmente hiperbólico tenga foliación central compacta y volumen acotado. Haciendo suposiciones extra acerca de la codimensión de la foliación central, D. Bohnet prueba que un difeomorfismo es esencialmente un producto fibrado (ver [BB], [B]).

Este trabajo se basa en un trabajo de A. Gogolev, [G], que poniendo restricciones solamente en la dimensión de los espacios estable, central e inestable, prueba que el volumen de las hojas centrales es acotado.

La estructura de este trabajo sera la siguiente.

Comenzaremos en la sección 2 definiendo foliación y enunciando algunos resultados (básicos y muy útiles). Introduciremos la noción de *holonomía*, un mapa que codifica el comportamiento de hojas cercanas a una cierta hoja fija. Es una herramienta importante para el estudio de foliaciones; en este caso, entender la holonomía de una hoja será entender el volumen en un entorno de dicha hoja (ver subsección 3.2).

En la subsección 2.2 daremos una definición mas precisa de hiperbolicidad parcial y enunciaremos algunas propiedades; en particular, nos interesa la existencia de foliaciones tangentes a las direcciones estable, inestable. Vamos a pedirle al difeomorfismo que sea *dinamicamente coherente*, algo un poco más fuerte que pedir que exista una foliación tangente a la dirección central.

La existencia de foliaciones estable e inestable nos permitirá reducir el tamaño del problema: estudiar la holonomía de la foliación central es lo mismo que estudiar la holonomía de la foliación central en restricción a cada hoja centro-estable y centro-inestable (ver subsección 4.1).

En la subsección 4.3 probamos que si las hojas centrales son compactas y simplemente conexas, entonces el volumen es una función continua en  $M$  y por lo tanto acotada (ver teorema 4.7). Esto es porque de alguna forma, lo que permite que el volumen *explote* alrededor de una cierta hoja es que esa hoja tenga grupo fundamental no trivial.

En la misma sección vemos que si la foliación central es de codimensión



dos, podemos reducir el problema a dos problemas en codimensión 1, donde contamos con lo siguiente: la holonomía tiene, a lo más, orden dos. Esto va a implicar que el volumen es acotado (ver teorema 4.9).

En ambos casos, tiene sentido mirar el espacio cociente de  $M$ , sobre las hojas centrales, y la acción del difeomorfismo allí. Debería ser hiperbólico, en algún sentido. Probamos que, a menos de un cubrimiento finito, el difeomorfismo es un producto fibrado sobre un homeomorfismo de Anosov (una parte hiperbólica bien distinguida de una parte central, también en la subsección 4.3).

Dedicamos las dos últimas secciones a la prueba del siguiente teorema.

**Teorema 1.1.** *Si  $f : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo parcialmente hiperbólico, dinámicamente coherente, con foliación central compacta de dimensión uno, y además los fibrados estable e inestable tienen dimensión ambos menor o igual a dos, entonces la longitud de las hojas centrales es uniformemente acotada.*

La prueba será por absurdo.

Vamos a suponer que existen hojas centrales donde la función volumen no es localmente acotada. Tomaremos una de esas hojas, con cuidado, para poder definir bien un mapa de primer retorno a una cierta sección transversal global (y todos los puntos serán periódicos). El teorema de Montgomery termina el trabajo.



## 2. Preliminares

En esta sección introduciremos conceptos necesarios para entender este trabajo. Se asume que el lector tiene conocimientos básicos de topología diferencial y de topología algebraica (como en [dC] y [H] por ejemplo).

Sea  $M$  una variedad compacta y orientable de dimensión  $d$ . Fijemos en  $M$  una métrica Riemanniana  $g$ .

### 2.1. Foliaciones

Comenzamos por introducir algunas nociones básicas de teoría de foliaciones. Seguimos los libros [CLN] y [CC].

**Definición 2.1.** *Una foliación de dimensión  $q$  (o de dimensión  $d - q$ ) en  $M$  es un atlas  $\mathcal{F}$  de  $M$  que es maximal con respecto a las siguientes propiedades:*

1. Si  $(\phi, U) \in \mathcal{F}$ , entonces  $\phi(U) = U_1 \times U_2$ , donde  $U_1$  y  $U_2$  son discos abiertos de  $\mathbb{R}^q$  y  $\mathbb{R}^{d-q}$  respectivamente.
2. Si  $(\phi, U)$  y  $(\psi, V)$  son dos elementos de  $\mathcal{F}$  con  $U \cap V \neq \emptyset$ , entonces el mapa de cambio de coordenadas  $\psi \cdot \phi^{-1} : \phi^{-1}(U \cap V) \rightarrow \psi^{-1}(U \cap V)$  es un homeomorfismo de la forma  $\psi \cdot \phi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$ .

Para cada  $(\phi, U)$  en  $\mathcal{F}$  llamamos placa de  $\mathcal{F}$  a  $\phi^{-1}(U_1 \times \{y\})$ . Decimos que dos puntos  $x$  e  $y$  de  $M$  están relacionados si existe un camino de placas  $\{P_1, \dots, P_n\}$  de  $\mathcal{F}$  de  $x$  a  $y$  de forma que  $x \in P_1$ , que  $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$  y que  $y \in P_n$ .

Llamamos *hojas* de  $\mathcal{F}$  a las clases de equivalencia de dicha relación y notamos por  $\mathcal{F}(x)$  a la hoja de  $\mathcal{F}$  por  $x$ . Cada hoja de  $\mathcal{F}$  es un subconjunto de  $M$  conexo por caminos y tiene estructura de subvariedad inmersa, inducida por las cartas de  $\mathcal{F}$  (ver [CLN]).

Así, una foliación en  $M$  puede entenderse como una partición de  $M$  en subvariedades inmersas, de forma que localmente, el espacio es de la forma  $U_1 \times U_2$ , donde  $U_1$  y  $U_2$  son discos abiertos de  $\mathbb{R}^q$  y  $\mathbb{R}^{d-q}$  respectivamente.

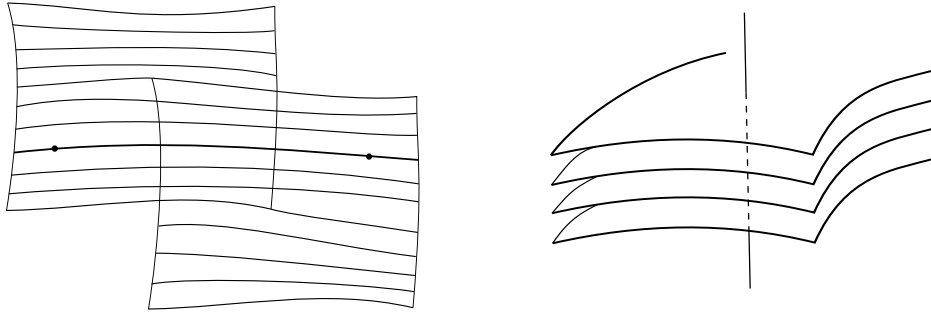


Figura 2.1: Camino de placas y vista local de una foliación

### Subfibrados

Un subfibrado de dimensión  $k$  de  $TM$  es un mapa  $E$  que a cada punto  $x$  de  $M$  asigna un subespacio  $E(x)$  de dimensión  $k$  de  $T_xM$  y que además es continuo de la siguiente manera: para todo punto  $x$  de  $M$  existe un entorno  $V$  de  $x$  y  $k$  campos de vectores continuos  $X_1, \dots, X_k$ , definidos en  $V$  de forma tal que para todo  $q$  en  $V$  el conjunto  $\{X_1(q), \dots, X_k(q)\}$  forme una base de  $E(q)$ .

Observemos que una foliación  $\mathcal{F}$  en  $M$  define un subfibrado de  $TM$ :

$$x \mapsto T_x\mathcal{F}(x),$$

que llamaremos  $T\mathcal{F}$ . Una foliación  $\mathcal{F}$  se dice tangente a  $E$ , un subfibrado de  $TM$ , si  $T\mathcal{F} = E$ .

En este trabajo nos restringiremos a trabajar con foliaciones cuyas hojas son de clase  $C^1$  y que son tangentes a subfibrados continuos de  $TM$ , el espacio tangente de  $M$ . Esto se debe a que este es el tipo de regularidad que aparece en el contexto dinámico en el que trabajaremos. Las foliaciones son estudiadas en mucha más generalidad (ver [CC]).

### Orientación de foliaciones

La noción de orientación de foliaciones se define de forma casi análoga a la de orientación en variedades.

Decimos que dos bases ordenadas  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  de un espacio vectorial  $V$  definen la misma orientación en  $V$  si la matriz de cambio de base entre  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_2$  tiene determinante positivo.

La relación *definir la misma orientación en  $V$*  es de equivalencia, y tiene dos

clases a las que llamaremos orientaciones de  $V$ .

Decimos que un subfibrado  $E$  es orientable si para cada  $x$  de  $M$  es posible escoger una orientación  $O(x)$  de  $E(x)$  de forma que el mapa  $x \mapsto O(x)$  sea continuo de la siguiente manera. Consideremos un atlas de  $M$  por abiertos  $\{U_i\}_{i \in I}$  de forma tal que para cada  $i \in I$  la restricción  $E|_{U_i}$  está definida por  $k$  campos de vectores  $\{X_1, \dots, X_k\}$ . Para cada  $x$  de  $U_i$  las bases  $\{X_1(x), \dots, X_k(x)\}$  y  $\{-X_1(x), X_2(x), \dots, X_k(x)\}$  definen dos orientaciones distintas de  $E(x)$ , que llamamos  $O_i^+(x)$  y  $O_i^-(x)$ . Decimos que la elección  $O(x)$  es continua si  $O|_{U_i} = O_i^+$ , para todo  $i$ , y si además  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , entonces  $O_i^+ = O_j^+$  en la intersección.

Igual que para variedades, si el subfibrado  $E$  no fuera orientable, siempre podemos tomar un cubrimiento dos a uno de  $M$  en el que el levantado de  $E$  si lo sea.

Consideramos  $\widehat{M} = \{(x, O) : x \in M, O \text{ una orientación de } E(x)\}$  y  $\pi : \widehat{M} \rightarrow M$  la proyección sobre la primera coordenada. Definimos en  $\widehat{M}$  la topología cuya base se construye de la siguiente manera:

dado  $(x_0, O_0)$  un punto de  $\widehat{M}$ , sea  $U \subset M$  un entorno de  $x_0$  en donde  $E$  está definido de forma continua. Podemos suponer que  $O(x_0) = O_0$ . Definimos  $V$  un entorno de  $(x_0, O_0)$  en  $\widehat{M}$  como  $V = \{(x, O(x)) : x \in U\}$ .

Con esta topología,  $\pi : \widehat{M} \rightarrow M$  es un cubrimiento doble, y podemos darle a  $\widehat{M}$  la estructura diferenciable inducida por  $\pi$ , compatible con la topología recién definida y que hace que  $\pi$  sea un difeomorfismo local.

*El cubrimiento doble de  $E$  es entonces el subfibrado  $\pi^*E$  de  $T\widehat{M}$ , dado por*

$$(\pi^*E)(x) = (D_{(x,O)}\pi)^{-1}(E(\pi(x))).$$

**Proposición 2.2.** *Sea  $M$  una variedad conexa, y sea  $E$  un subfibrado de  $M$ . Sean  $\widehat{M}$ ,  $\pi$  y  $\pi^*E$  como arriba. Entonces:*

1.  $\pi^*E$  es orientable.
2.  $\widehat{M}$  es conexa si y solamente si  $E$  no es orientable.

*Demostración.* 1. Podemos definir  $O^*$  una orientación de la siguiente manera. Decimos que  $\{X_1(x, O), \dots, X_k(x, O)\}$  está en  $O^*(x, O)$  si  $\{D_{(x, O)}\pi \cdot X_1(x, O), \dots, D_{(x, O)}\pi \cdot X_k(x, O)\}$  está en  $O$ . Es fácil chequear que es una orientación en  $\pi^* E$ .

2. Supongamos que  $\widehat{M}$  es conexa. Dado  $x_0$  un punto en  $M$ , consideremos  $\gamma^* : [0, 1] \rightarrow \widehat{M}$  un camino desde  $(x_0, O_0) = \gamma^*(0)$  hasta  $(x_0, -O_0) = \gamma^*(1)$ . El camino  $\gamma = \pi\gamma^*$  empieza y termina en  $x_0$ , es decir, es cerrado en  $M$ .

Supongamos ahora que  $E$  es orientable, con orientación continua  $O$ . Podemos suponer  $O(x_0) = O_0$ . En este caso, el camino  $\hat{\gamma}(t) = (\gamma(t), O(\gamma(t)))$  verifica  $\pi \cdot \hat{\gamma}(t) = \gamma(t)$ ,  $\hat{\gamma}(0) = (x_0, O_0) = \gamma^*(0)$ . Luego  $\hat{\gamma} = \gamma^*$  y por lo tanto  $\gamma^*(1) = (x_0, O_0)$ , que es absurdo.

Para el recíproco, supongamos que  $\widehat{M}$  es desconexa. Probaremos que tiene exactamente dos componentes y que  $E$  es orientable. Para eso, primero observemos que si  $M_i$  es una componente conexa de  $\widehat{M}$ , entonces  $\pi|_{M_i}$  es biyectiva: es inyectiva por el razonamiento anterior y es sobreyectiva pues  $\pi$  es un difeomorfismo local y  $M$  es conexa. Luego,  $\pi|_{M_i}$  es un difeomorfismo para todo  $i$ .

Además  $\pi^{-1}(x) = \{(x, O), (x, -O)\}$ , por lo que  $\widehat{M}$  debe tener exactamente dos componentes conexas. Como en cada componente  $\pi^* E$  es orientable, podemos definir en  $E$  orientación inducida por  $\pi|_{M_i}$ ,  $i = 1, 2$ . Resulta entonces que  $E$  es orientable.

□

Como corolario de la proposición anterior obtenemos que si  $M$  es simplemente conexa, entonces todo subfibrado de  $TM$  es orientable. En particular,  $M$  es orientable (tomando  $E(x) = T_x M$  para todo  $x \in M$ ).

Introduciremos a continuación la noción de orientabilidad transversal, que en teoría de foliaciones resulta ser particularmente útil.

Si  $E$  y  $E'$  son dos subfibrados en  $TM$ , decimos que son complementarios, o transversales si para todo  $x$  en  $M$  se cumple que  $T_x M = E(x) \oplus E'(x)$ .

Además siempre existe un subfibrado complementario:  $E^\perp(x) = \{v \in$

$T_x M : \langle v, u \rangle = 0, \forall u \in E$ . El subfibrado  $E^\perp$  es transversal a  $E$  y es fácil ver que si  $E$  es continuo entonces  $E^\perp$  también lo es.

Además, se puede probar que si  $E'$  es otro subfibrado transversal a  $E$ , entonces  $E'$  es orientable si y solamente si  $E^\perp$  lo es. La proyección ortogonal sobre  $E^\perp(x)$  en cada espacio tangente  $T_x M$  permite definir una orientación en  $E'$  a partir de la de  $E^\perp$ , y viceversa.

Esto da lugar a la siguiente definición:

**Definición 2.3.** *Decimos que un subfibrado  $E$  es transversalmente orientable si existe algún subfibrado complementario a  $E$  que es orientable.*

**Teorema 2.4.** *Sea  $E$  un subfibrado continuo en  $M$ . Entonces:*

1. *Si  $E$  es orientable y transversalmente orientable, entonces  $M$  es orientable.*
2. *Si  $M$  es orientable, entonces  $E$  es orientable si y solamente si es transversalmente orientable.*

*Demostración.* 1. Sean  $O$  una orientación de  $E$ , y  $O^\perp$  una orientación de  $E^\perp$ . Es fácil ver que si para cada  $p \in M$ ,  $\{v_1, \dots, v_k\} \in O$  y  $\{v_{k+1}, \dots, v_n\} \in O^\perp$  entonces  $p \mapsto O(p) = \{\text{la clase de orientación de } \{v_1, \dots, v_n\}\}$  define una orientación continua en  $M$ .

2. Supongamos ahora que  $M$  y  $E$  son orientables. Si  $O^M$  y  $O$  son orientaciones de  $M$  y  $E$  respectivamente, podemos definir en  $E^\perp$  una orientación continua de la siguiente forma: una base  $\{v_1^\perp, \dots, v_k^\perp\}$  de  $E^\perp$  está en  $O^\perp$  si  $\{v_1, \dots, v_{n-k}, v_1^\perp, \dots, v_k^\perp\}$  está en  $O^M$ , para todo  $\{v_1, \dots, v_{n-k}\} \in O$ .

□

A partir de esta proposición obtenemos que en una variedad orientable, es equivalente que un subfibrado sea orientable a que sea transversalmente orientable.

A partir de la noción de orientabilidad y orientabilidad transversal de subfibrados, podemos definir los análogos para foliaciones. Esto será útil en la siguiente sección.

Diremos que una foliación  $\mathcal{F}$  es *orientable* si el subfibrado tangente a la foliación  $T\mathcal{F}$  es un subfibrado orientable de  $TM$ .

Analogamente,  $\mathcal{F}$  se dice transversalmente orientable si  $T\mathcal{F}$  es transversalmente orientable. La proposición anterior nos dice que en una variedad orientable, ambas nociones son equivalentes.

Si bien una foliación no tiene por qué ser orientable ni transversalmente orientable, siempre podemos tomar un cubrimiento finito en la que sí lo sea.

**Proposición 2.5.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación en una variedad  $M$  orientable.*

*Entonces  $M$  admite un cubrimiento doble  $\pi : \widehat{M} \rightarrow M$  tal que la foliación  $\widehat{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$  es orientable y transversalmente orientable.*

*Demostración.* Como  $M$  es orientable alcanza ver el caso en que  $\mathcal{F}$  sea no orientable.

Sea  $\widehat{M}$  el cubrimiento doble orientado de  $T\mathcal{F}$ . Como  $\pi : \widehat{M} \rightarrow M$  es un difeomorfismo local, podemos considerar  $\widehat{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$ . Claramente  $T(\widehat{\mathcal{F}}) = \pi^*(T\mathcal{F})$  que es orientable por la proposición 2.2.

Como  $M$  es orientable,  $\widehat{M}$  también lo es. Luego,  $\widehat{\mathcal{F}}$  también es transversalmente orientable.  $\square$

De aquí en adelante podemos considerar todas las foliaciones orientables y transversalmente orientables.

### Holonomía de una foliación

Supongamos que  $\mathcal{L}$  es una hoja  $\mathcal{F}$ . Nuestro objetivo será estudiar el comportamiento de hojas cercanas a  $\mathcal{L}$  a medida que variamos continuamente un punto de  $\mathcal{L}$ .

Para eso, si  $\gamma$  es un camino cerrado en  $\mathcal{L}$  y  $\Sigma$  una (pequeña) sección transversal a  $\mathcal{F}$  por  $p = \gamma(0)$ , vamos a definir  $h_\gamma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  el *primer retorno* de  $\mathcal{F}(x) \cap \Sigma$  a  $\Sigma$ .

Además, vamos a ver que si  $\hat{\gamma}$  es un camino homotópico a  $\gamma$  en  $\mathcal{L}$ , entonces los mapas  $h_\gamma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  y  $h_{\hat{\gamma}} : \hat{\Sigma} \rightarrow \hat{\Sigma}$  coinciden en algún entorno de  $p$  suficientemente pequeño. Esto implica que el mapa  $\gamma \mapsto h_\gamma$  induce un morfismo

$$\pi_1(\mathcal{L}, p) \rightarrow G(\Sigma, p),$$



del grupo fundamental de  $\mathcal{L}$  en  $p$ , al grupo de gérmenes de homeomorfismos de  $\Sigma$  que fija  $p$ .

Esta representación se llama *holonomía de  $\mathcal{L}$  en el punto  $p$* . Dedicaremos el resto de esta sección a precisar estos conceptos.

### Holonomía de una hoja

Sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}$  un camino continuo y  $\Sigma_0, \Sigma_1$  secciones de dimensión  $m - n$ , transversales a  $\mathcal{F}$  por  $p_0 = \gamma(0)$  y  $p_1 = \gamma(1)$  respectivamente. Dichas secciones pueden tomarse fácilmente considerando cartas de  $\mathcal{F}$  cuyos dominios contengan a  $p_0$  y a  $p_1$ .

La idea es *avanzar* por cartas locales de  $\mathcal{F}$  desde una transversal a la otra.

**Lema 2.6** (Existencia de cadenas subordinadas). *Existe un cubrimiento  $C = \{U_1, \dots, U_n\}$  de  $M$  por dominios de cartas locales de  $\mathcal{F}$  tal que si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , entonces  $U_i \cup U_j$  está contenido en el dominio de alguna carta local de  $\mathcal{F}$ .*

*Demostración.* Consideremos  $V$  un cubrimiento finito de  $M$  por dominios de cartas locales de  $\mathcal{F}$ , y sea  $\delta$  el número de Lebesgue del cubrimiento  $V$ . El número de Lebesgue  $\delta$  de un cubrimiento es tal que si el diámetro de un abierto  $U$  es menor a  $\delta$  entonces  $U$  está contenido en algún abierto del cubrimiento.

Para concluir, alcanza tomar un cubrimiento finito de  $M$ ,  $U = \{U_1, \dots, U_k\}$  tal que el diámetro de  $U_i$  sea menor a  $\delta/2$  para todo  $i$ .  $\square$

En particular esto implica que fijada la curva  $\gamma$  existen cartas locales  $(U_i)_{i=0, \dots, k}$  de  $\mathcal{F}$  y una partición de  $[0, 1]$ ,  $0 = t_0 < \dots < t_{k+1}$  tal que si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  entonces  $U_i \cap U_j$  está contenido en una carta local de  $\mathcal{F}$  y además,  $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ , para todo  $0 \leq i \leq k$ .

En este caso decimos que  $(U_i)_{i=0, \dots, k}$  es una *cadena subordinada a  $\gamma$* .

Fijemos una cadena subordinada a  $\gamma$ .

Para cada  $0 < i < k+1$ , fijamos  $D(t_i) \subset U_{i-1} \cap U_i$ , una sección transversal, difeomorfa a un disco de dimensión  $m - n$ , que contenga a  $\gamma(t_i)$ . Llamamos además  $D(0)$  a  $\Sigma_0$  y  $D(1)$  a  $\Sigma_1$ . Para cada  $x \in D(t_i)$  suficientemente cerca de  $\gamma(t_i)$ , la placa de  $U_i$  que pasa por  $x$  corta también a  $D(t_{i+1})$ , en un único punto  $h_i(x)$ .

El dominio del mapa  $h_i$  contiene un disco  $D_i \subset D(t_i)$  que contiene al punto  $\gamma(t_i)$ , por lo que la composición

$$h_\gamma = h_k \cdot h_{k-1} \cdots h_0$$

está bien definida en un entorno de  $p_0$  en  $\Sigma_0$ .

Llamamos a  $h_\gamma$  *mapa de holonomía asociado a  $\gamma$* .

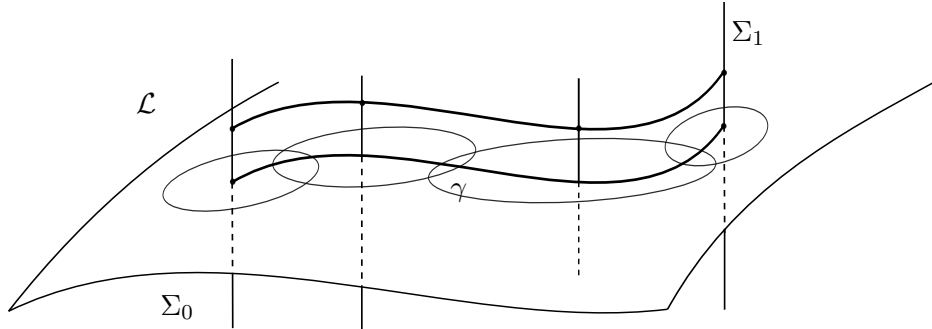


Figura 2.2

El mapa  $h_\gamma$  es independiente de la cadena subordinada a  $\gamma$  (ver referencia) y de la elección de las transversales. Esto último es porque si  $T_1$  y  $T_2$  son dos transversales por un punto  $p$ , entonces podemos suponer  $T_1$  y  $T_2$  contenidas en el dominio de alguna carta de  $\mathcal{F}$ . En ese caso (reajustando) existe un homeomorfismo  $g$  de una transversal a la otra de forma que  $h_\gamma^1 \cdot g = g \cdot h_\gamma^2$  (donde  $h_\gamma^i$  es el mapa de holonomía asociado a  $\gamma$  definido en  $T^i$ ).

De la construcción de  $h_\gamma$  sabemos que:

1.  $f_\gamma(p_0) = p_1$ ,
2.  $h_{\gamma^{-1}} = (h_\gamma)^{-1}$ ,
3. como los mapas intermedios  $h_i$  son continuos (por ser  $\mathcal{F}$  de clase  $C^0$ ),  $h_\gamma$  es continua.

**Proposición 2.7.** Si  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  son dos caminos homotópicos,  $\text{rel}(0,1)$ , y  $h_{\gamma_i}$  es el mapa de holonomía asociado a  $\gamma_i$ ,  $i = 0, 1$ , entonces  $h_{\gamma_0}$  y  $h_{\gamma_1}$  coinciden en un entorno de  $p_0$ .

*Demostración.* Sea  $H : I \times I \rightarrow \mathcal{L}$  la homotopía entre  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$ . Tenemos que  $H(t, 0) = \gamma_0(t)$ , que  $H(t, 1) = \gamma_1(t)$  y que  $H(0, s) = p_0$  y  $H(1, s) = p_1$ , para todo  $t, s \in I$ .

Para cada camino  $\gamma_s : I \rightarrow L$  definido como  $\gamma_s(t) = H(t, s)$  hay una cadena  $\mathcal{C}$  subordinada a  $\gamma_s$ . Por la continuidad de  $H$ , para  $s'$  cercano a  $s$ , la cadena  $\mathcal{C}$  también es subordinada a  $\gamma_{s'}$ . Como consecuencia, podemos encontrar una colección de cadenas  $(\mathcal{C}_i)_{i=1, \dots, m}$  y una partición de  $I$ :  $0 = s_0 < \dots < s_m = 1$  tal que para todo  $i = 1, \dots, m$ , la cadena  $\mathcal{C}_i$  es subordinada a  $\gamma_{s_i}$ , para todo  $s \in [s_{i-1}, s_i]$ . Si llamamos  $\gamma_i$  a  $\gamma_{s_i}$ , entonces lo anterior implica que  $h_{\gamma_{i-1}}$  coincide con  $h_{\gamma_i}$  en un entorno de  $p_0$  y por lo tanto  $h_{\gamma_0}$  coincide con  $h_{\gamma_1}$  cerca de  $p_0$ .  $\square$

Dado un espacio  $X$ , un elemento  $x \in X$  y  $V$  un entorno de  $x$  en  $X$ , podemos definir una relación de equivalencia en los mapas  $\{f : V \rightarrow X\}$ , diciendo que  $f \sim g$  si existe un entorno  $W$  de  $x$  tal que  $f|W = g|W$ . La clase de equivalencia de  $f$  se llama *germen de  $f$  en  $x$* .

El conjunto  $G(X, x)$  de gérmenes de homeomorfismos que fijan  $x$  admite estructura de grupo, con el producto  $\text{germ}(f) \cdot \text{germ}(g) = \text{germ}(f \cdot g)$ , donde el dominio de  $f \cdot g$  es  $\text{dominio}(g) \cap g^{-1}(\text{dominio}(f))$ .

Acabamos de ver que caminos homotópicos dan lugar al mismo germen de holonomía, al que llamaremos  $\phi_\gamma$ .

Esto implica que si  $p_0 = p_1$ , y  $\Sigma_0 = \Sigma_1$ , entonces

$$\Phi : \pi_1(\mathcal{L}, p_0) \rightarrow G(\Sigma_0, p_0),$$

$$\Phi([\gamma]) = \phi_{\gamma^{-1}}$$

induce un homomorfismo de grupos.

El mapa  $\Phi$  está bien definido por lo probado en la proposición anterior. Para ver que es morfismo: si  $[\gamma]$  y  $[\mu]$  son dos elementos de  $\pi_1(\mathcal{W}, p_0)$ ,

$$\Phi([\gamma] \cdot [\mu]) = \phi_{\gamma^{-1} \cdot \mu^{-1}} = \phi_{\mu^{-1}} \cdot \phi_{\gamma^{-1}} = \Phi([\mu]) \cdot \Phi([\gamma]),$$

donde la segunda igualdad es cierta pues si  $\mathcal{C}_\gamma$  y  $\mathcal{C}_\mu$  son cadenas subordinadas a  $\gamma^{-1}$  y  $\mu^{-1}$  respectivamente, entonces  $\mathcal{C}_\gamma \cup \mathcal{C}_\mu$  es una cadena subordinada a la concatenación  $\gamma^{-1} \cdot \mu^{-1}$ .

El subgrupo  $\text{Hol}(\mathcal{L}, p_0) = \Phi(\pi_1(\mathcal{L}, p_0))$  de  $G(\Sigma_0, p_0)$  se llama *grupo de holonomía de  $\mathcal{L}$  en  $p_0$* . Dados dos puntos de  $\mathcal{L}$ ,  $p_0$  y  $p_1$ , cualquier camino  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{L}$ , con  $\alpha(0) = p_0$ ,  $\alpha(1) = p_1$  induce un isomorfismo

$$\alpha^* : \text{Hol}(\mathcal{L}, p_0) \rightarrow \text{Hol}(\mathcal{L}, p_1),$$

donde  $\alpha^*(\Phi[\mu]) = \phi_\alpha \cdot \Phi[\mu] \cdot \phi_\alpha^{-1}$ .

Podemos hablar entonces de *el grupo de holonomía de  $\mathcal{L}$*  sin especificar el punto base.

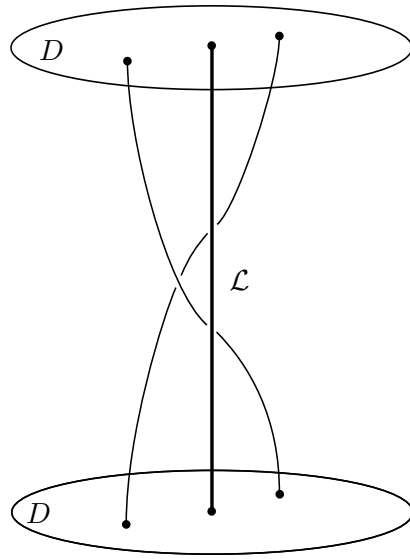


Figura 2.3: Una hoja dando dos vueltas alrededor de la hoja  $\mathcal{L}$

El siguiente teorema relaciona el *tamaño* del grupo de holonomía de una hoja con el comportamiento de las hojas adyacentes a ella.

Notamos por  $\mathcal{F}(U)$  a la saturación de  $U$  por  $\mathcal{F}$ . Eso es

$$\mathcal{F}(U) = \bigcup_{x \in U} \mathcal{F}(x),$$

y decimos que un subconjunto  $\subset M$  está saturado por  $\mathcal{F}$  si  $\mathcal{F}(S) = S$ .

**Teorema 2.8.** *(de estabilidad local de Reeb) Sea  $\mathcal{F}$  una foliación de codimensión  $n$  en una variedad  $M$ , y  $\mathcal{L}$  una hoja compacta de  $\mathcal{F}$  con grupo de holonomía finito.*

Entonces existe un entorno abierto  $U$  de  $\mathcal{L}$ , saturado por  $\mathcal{F}$ , tal que todas las hojas por  $U$  son compactas con grupo de holonomía finito. El entorno  $U$  se puede tomar arbitrariamente pequeño.

Además, podemos definir una retracción  $\pi : U \rightarrow \mathcal{L}$  tal que para toda hoja  $\mathcal{L}'$  de  $U$ ,  $\pi|_{\mathcal{L}'} : \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$  es un cubrimiento con una cantidad finita de hojas y, para todo  $y \in \mathcal{L}$  se cumple que  $\pi^{-1}(y)$  es homeomorfo a un disco de dimensión  $p$  y es transversal a  $\mathcal{F}$ .

La prueba se puede encontrar en [CLN], en el capítulo 4.

Esto en particular implica que si  $\mathcal{L}'$  es una hoja en  $U$ , entonces el orden del grupo de holonomía de  $\mathcal{L}'$  divide al orden del grupo de holonomía de  $\mathcal{L}$ .

**Corolario 2.9.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación de codimensión  $n$  en una variedad  $M$ , y  $\mathcal{L}$  una hoja compacta de  $\mathcal{F}$  con grupo de holonomía trivial.

Entonces existe un entorno abierto  $U$  de  $\mathcal{L}$ , saturado en  $\mathcal{F}$ , tal que todas las hojas por  $U$  son compactas con grupo de holonomía trivial. El entorno  $U$  se puede tomar arbitrariamente pequeño.

Además, podemos definir una retracción  $\pi : U \rightarrow \mathcal{L}$  tal que para toda hoja  $\mathcal{L}'$  de  $U$ ,  $\pi|_{\mathcal{L}'} : \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$  es un cubrimiento de una hoja y, para todo  $y \in \mathcal{L}$  se cumple que  $\pi^{-1}(y)$  es homeomorfo a un disco de dimensión  $p$  y es transversal a  $\mathcal{F}$ .

Este corolario dice que en caso de que el grupo de holonomía de una hoja  $\mathcal{L}$  sea finito, entonces existe un entorno  $U$  que es difeomorfo a un producto  $U \simeq \mathcal{L} \times D$ , donde  $D$  es un disco transversal a la foliación  $\mathcal{F}$ .

## El espacio de hojas

El espacio de hojas asociado a una foliación  $\mathcal{F}$  es el resultado de colapsar cada hoja de  $\mathcal{F}$  a un punto.

Llamamos *espacio de hojas* al espacio cociente  $M/\mathcal{F}$  dotado de la topología cociente. Notamos por  $\bar{\mathcal{L}}$  a la clase de la hoja  $\mathcal{L}$  en  $M/\mathcal{F}$ .

Uno podría preguntarse si el espacio de hojas hereda alguna propiedad topológica buena de  $M$ , pero  $M/\mathcal{F}$  ni siquiera tiene por qué ser Hausdorff.

**Ejemplo.** Si  $\mathcal{F}$  es una foliación en  $M$  una variedad compacta, y  $\mathcal{F}$  tiene alguna hoja no compacta  $\mathcal{L}$ , entonces el espacio de hojas no será Hausdorff: la hoja  $\mathcal{L}$  acumulará en algún punto  $x$  de  $M$ , y por lo tanto cualquier entorno de  $\overline{\mathcal{F}(x)}$  en  $M/\mathcal{F}$  va a contener a  $\overline{\mathcal{L}}$ .

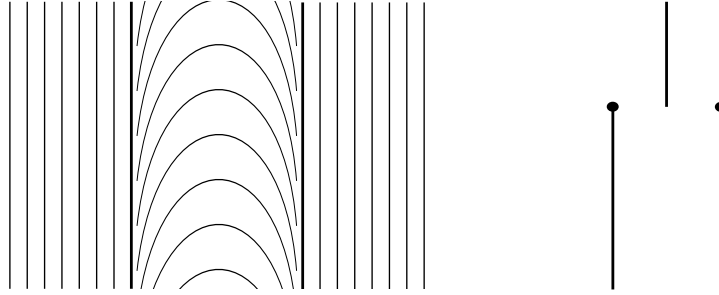


Figura 2.4: Una componente de Reeb en el plano y el espacio de hojas

Podríamos preguntarnos si una foliación cuyas hojas son todas compactas nos garantiza algo sobre la topología del espacio de hojas. La respuesta es negativa, lo veremos más adelante.

## Continuidad

Sea  $\mathcal{F}$  una foliación de clase  $C^0$  tangente al subfibrado  $T\mathcal{F}$  también continuo.

Fijemos primero una familia de transversales. Sea  $T\mathcal{F}^\perp$  el subfibrado continuo de  $TM$  que es perpendicular a  $T\mathcal{F}$  en todos los puntos.

Para cada  $x \in M$ , sea  $\exp_x : T_x M \rightarrow M$  el mapa exponencial, definido como  $\exp_x(v) = \gamma_{x,v}(1)$  el tiempo 1 de la geodésica que pasa por  $x$  en tiempo 0 con velocidad  $v$ . Se prueba que  $\exp_x$  es un difeomorfismo local, y por lo tanto para cada  $x$  existe  $\epsilon_x$  de forma tal que  $\exp_x|_{B(0, \epsilon_x)} : B(0, \epsilon_x) \rightarrow M$  es un difeomorfismo (ver [dC]).

El diferencial de  $\exp_x$  es la identidad en el origen; existe  $\epsilon$  tal que para cada  $x \in M$  y  $\epsilon < \epsilon_x$  se cumple que

$$T_x^\epsilon = \exp_x(B(0, \epsilon) \cap T\mathcal{F}^\perp)$$

es transversal a  $\mathcal{F}$  en todos los puntos:  $T_y T_x^\epsilon$  es transversal a  $T\mathcal{F}(y)$  en todos los puntos  $y \in T_x^\epsilon$ .

Queremos usar la compacidad de  $M$  para probar que fijados  $R > 0$  y  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta$  uniforme en toda la variedad que hace que cualquiera sea  $\gamma$  una curva de longitud menor que  $R$ , hojas  $\delta$ -cerca de  $\gamma(0)$  acompañen a  $\gamma$  a menos de  $\epsilon$  durante toda la longitud de  $\gamma$ . Este resultado es análogo al teorema de continuidad con respecto a las condiciones iniciales, de ecuaciones diferenciales.

Necesitamos la siguiente definición.

Si  $X$  es un espacio métrico, y  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  es una función, entonces  $g$  se dice *semicontinua inferiormente* en un punto  $x \in X$  si para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $\|x - y\| < \delta$  se cumple que  $f(y) > f(x) - \epsilon$ . La función  $g$  se dice semicontinua inferiormente si es semicontinua inferiormente en  $x$ , para todo  $x \in X$ . Si además  $X$  es un espacio compacto,  $\delta$  se puede tomar uniforme.

La restricción de la métrica a cada hoja  $\mathcal{L}$  induce una métrica, y por lo tanto una distancia  $d_{\mathcal{L}}$ ; podemos definir, para cada  $x$  y  $R > 0$  la bola  $\mathcal{L}(x, R)$  la bola centrada en  $x$ , de radio  $R$ , en  $\mathcal{L}(x)$ .

**Lema 2.10.** *Dado  $R > 0$  existe  $\alpha > 0$  tal que*

- (I) *El entorno normal  $N_{\mathcal{L}}^{\alpha}$  de radio  $\alpha$  de  $\mathcal{L}(x, R)$  está inyectivamente encajado en  $M$ , para toda  $\mathcal{L} \in \mathcal{F}$  y  $x \in M$ .*
- (II) *Si  $\gamma \subset M$  es una curva tal que  $\text{long}(\gamma) \leq R$ , y  $x_0$  es un punto en  $T_{\gamma(0)}^{\alpha}$ , entonces mientras esté bien definida la holonomía hasta  $T_{\gamma(t)}^{\alpha}$ , la curva  $\gamma$  levanta a una curva  $\hat{\gamma}$ , con  $\text{long}(\hat{\gamma}) \leq 2R$ , que pasa por  $x_0$ .*

*Demostración.* Para probar (I). Si  $\alpha_x$  es tal que el entorno tubular de radio  $\alpha_x$  de  $\mathcal{L}(x, R)$  es una subvariedad encajada de  $M$ , definimos el mapa  $\hat{\alpha}(x) = \sup\{\alpha_x\}$ . La función  $\hat{\alpha}$  es semicontinua inferiormente, yes claro que esto implica que existe  $\alpha_0 = \min_{x \in M} \alpha(x)$ . Tomamos  $\alpha = \alpha_0/3$ , para estar seguros.

Para probar (II). Si  $\gamma$  es una curva en una hoja  $\mathcal{L}$  de  $\mathcal{F}$ , tal que  $\text{long}(\gamma) \leq R$ , entonces  $\gamma \subset \mathcal{L}(x, R)$ , donde  $x = \gamma(0)$ . Tomando mapas de  $\mathcal{F}$  de diámetro menor a  $\alpha$  obtenemos un entorno tubular de  $\mathcal{L}(x, R)$ , en donde dado un punto inicial  $x_0$ , la curva  $\gamma$  levanta a una curva  $\hat{\gamma}$  por  $x_0$ . Que  $\text{long}(\hat{\gamma}) < 2R$  es consecuencia de la continuidad de la métrica en  $M$ .  $\square$

**Proposición 2.11.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación continua en una variedad compacta  $M$ . Entonces para todo  $\epsilon > 0$  y  $R > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para toda  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  cuya imagen está contenida en una hoja  $\mathcal{L}$  de  $\mathcal{F}$  y tal que  $\text{long}(\gamma) \leq R$  se cumple que el mapa de holonomía  $h_\gamma : T_x^\delta \rightarrow T_y^\epsilon$  asociado a  $\gamma$  está bien definido.*

*Demostración.* Primero que nada, observemos que podemos suponer  $\epsilon < \alpha/2$ , donde  $\alpha$  es el del lema anterior.

Fijemos un cubrimiento por abiertos  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1, \dots, n}$  de forma tal que si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , entonces  $U_i \cup U_j \subset V$  el dominio de alguna carta de  $\mathcal{F}$  y que además  $D = \min\{\text{diam}(U_i)\} < \epsilon/2$ . Sea  $L$  el número de Lebesgue del cubrimiento  $\mathcal{U}$ .

Supongamos por absurdo que existen  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  curvas, cada una contenida en alguna hoja  $\mathcal{L}_n$  de  $\mathcal{F}$  y tal que  $h_{\gamma_n} : T_{\gamma_n(0)}^{1/n} \rightarrow T_{\gamma_n(1)}^\epsilon$  no está bien definido. Eso es que para cada  $n$  exista  $x_n \in T_{\gamma_n(0)}^{1/n}$  donde  $h_{\gamma_n}(x_n)$  no está definido.

**Observación.** *Tiene que ser  $\text{long}(\gamma_n) \geq \hat{R}$  para algún  $\hat{R} > 0$ . Si no existiría  $N$  de forma tal que  $2/N < D$  y  $\text{long}(\gamma_N) < L$ ; en este caso  $\gamma_N \subset U_i$  para algún  $i$ , y  $T_{\gamma_N(0)}^{1/n} \subset U_i$ . Como el diámetro de  $U_i < \epsilon/2$  el mapa  $h_{\gamma_N}$  va a estar bien definido.*

Para cada  $n$ , sea

$$t_n = \sup\{t : \text{está definido } h_{\gamma_n}^t(x_n)\},$$

donde  $h_{\gamma_n}^t : T_{\gamma_n(0)}^{1/n} \rightarrow T_{\gamma_n(t)}^\epsilon$ . Entonces para cada  $n$  existe  $\eta_n : [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}(x_n)$  tal que  $d(\eta_n(1), \mathcal{F}(\gamma_n(t_n))) \geq \epsilon$ .

Por el mismo argumento de la observación, cada  $\eta_n$  debe tener longitud mayor que  $R'$  para algún  $R' > 0$ .

Ambas familias de curvas  $\gamma_n$  y  $\eta_n$  son equiacotadas, y por lo tanto tienen subsucesiones convergentes a  $\gamma$  y  $\eta$  respectivamente (por el teorema de Arzelá-Ascoli, que se puede encontrar en [Mu], capítulo 7). Además tiene que ser  $\eta(0) = \gamma(0)$ .

**Observación.** *Tanto  $\gamma$  como  $\eta$  son curvas contenidas en hojas de  $\mathcal{F}$ . La prueba de esto es local. La convergencia se da adentro de finitos dominios de cartas de  $\mathcal{F}$ , en donde trivializando es claro que el límite va a estar contenido en una hoja de  $\mathcal{F}$ .*



La condición  $\gamma(0) = \eta(0)$  implica que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ . Pero esto es absurdo ya que  $\eta$  está contenida en el  $\alpha$  entorno tubular del lema. Debería ser  $\eta$  el levantado de  $\gamma$ , pero el levantado de  $\gamma$  en el entorno es  $\gamma$ .  $\square$

## 2.2. Difeomorfismos parcialmente hiperbólicos

Los sistemas parcialmente hiperbólicos son una versión relajada de los sistemas hiperbólicos. Además de ser dinámicamente ricos, le dan a  $M$  estructura extra: foliaciones dinámicas (ver [CP]).

**Definición 2.12.** Decimos que un difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  de clase  $C^1$  es parcialmente hiperbólico si el fibrado tangente  $TM$  de  $M$  admite una descomposición en tres subfibrados no triviales, continuos,  $Df$ -invariantes,

$$TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u,$$

y existe  $N \geq 0$  tal que para todo  $x \in M$ , si  $v^\sigma \in E_x^\sigma$ ,  $\sigma = s, c, u$ ,  $\|v^\sigma\| = 1$ , entonces se cumple que:

$$\|D_x f^N \cdot v^s\| < \min\{1, \|D_x f^N \cdot v^c\|\} \leq \max\{1, \|D_x f^N \cdot v^c\|\} < \|D_x f^N \cdot v^u\|, \forall x \in M.$$

Existen varias definiciones de hiperbolicidad parcial. La que dimos aquí es una de ellas, que se conoce como *hiperbolicidad parcial fuerte*.

Llamaremos *subfibrado estable*, *centro-estable*, *central*, *centro-inestable* e *inestable* a  $E^s$ ,  $E^{cs} = E^s \oplus E^c$ ,  $E^c$ ,  $E^{cu} = E^c \oplus E^u$ ,  $E^u$  respectivamente.

### Integrabilidad de los subfibrados estable e inestable.

Decimos que un subfibrado  $E$  es *integrable* si existe una foliación tangente a  $E$  en todo punto. Para el caso de dimensión 1, sabemos que Lipschitz es condición suficiente para que un campo sea únicamente integrable, pero en dimensiones mayores incluso ser  $C^\infty$  no es suficiente para asegurar la integrabilidad de un subfibrado.

Los subfibrados estable e inestable dados por un difeomorfismo parcialmente hiperbólicos, sin embargo, sí son integrables, como enuncia el siguiente teorema clásico, y esto se debe fundamentalmente a las hipótesis dinámicas. Una demostración se puede encontrar en [CP] (sección 4).

**Teorema 2.13** (Teorema de la variedad estable). *Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Entonces los fibrados  $E^s$  y  $E^u$  integran únicamente a foliaciones  $\mathcal{W}^s$  y  $\mathcal{W}^u$ ,  $f$ -invariantes, tangentes a  $E^s$  y  $E^u$  respectivamente.*

Dado un  $x \in M$ , se cumple que

$$d(f^n(x), f^n(y)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{para todo } y \in \mathcal{W}^s(x),$$

$$d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{para todo } y \in \mathcal{W}^u(x).$$

Además existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$\mathcal{W}^\sigma(x, \epsilon) = \{y \in \mathcal{W}^\sigma(x) : d^\sigma(x, y) < \epsilon\}, \quad \sigma = s, u,$$

es una subvariedad encajada, para todo  $x$  de  $M$ .

Cada  $\mathcal{W}^\sigma(x, \epsilon)$  se llama variedad estable ( $\sigma = s$ ) e inestable ( $\sigma = u$ ) local por  $x$ ; se deduce del teorema que existen constantes  $C > 0$  y  $\lambda < 1$  tal que, para todo  $x \in M$  se cumple que

$$y \in \mathcal{W}^s(x, \epsilon) \Rightarrow d(f^n(x), f^n(y)) \leq C\lambda^n d(x, y), \forall n \geq 0,$$

$$y \in \mathcal{W}^u(x, \epsilon) \Rightarrow d(f^n(x), f^n(y)) \leq C\lambda^n d(x, y), \forall n \leq 0.$$

Llamamos a  $C$  y  $\lambda$  constantes de expansividad de  $f$ .

### Coherencia dinámica

En general, el subfibrado *central* de un parcialmente hiperbólico no es integrable.

Decimos que un difeomorfismo parcialmente hiperbólico  $f$  es *dinamicamente coherente* si existen foliaciones  $\mathcal{W}^{cs}$  y  $\mathcal{W}^{cu}$  tangentes en todos los puntos a  $E^s \oplus E^c$  y  $E^c \oplus E^u$  respectivamente. Las llamamos foliaciones centro-estable y centro-inestable.

Cuando se da que dichos subfibrados son integrables, es inmediato que  $E^c$  también lo es: dado un punto  $p \in M$ , la hoja central por  $p$  será  $\mathcal{W}^c(p) = \mathcal{W}^{cs}(p) \cap \mathcal{W}^{cu}(p)$ .

Para cada  $p$ , la hoja  $\mathcal{W}^c(p)$  será tangente al fibrado central  $E^c$  y transversal a los fibrados estable e inestable. Además, cada hoja de la foliación

centro-estable (centro-inestable) estará saturada por la foliación central y la foliación estable (inestable); en cada hoja centro-estable (centro-inestable) las foliaciones central y estable (inestable) serán transversales (debido a la transversalidad de los subfibrados).

El subfibrado  $E^s \oplus E^u$  en general no es integrable, ni siquiera localmente. Un teorema de Dolgopyat- Wilkinson dice que existe un abierto y denso (con la topología  $C^1$ ) en los parcialmente hiperbólicos con  $E^s \oplus E^u$  no integrable (ver [DW]).

Es una pregunta abierta si la integrabilidad de  $E^c$  implica la coherencia dinámica del difeomorfismo  $f$ .

### Ejemplos de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos

Daremos algunos ejemplos de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos. Nos enfocaremos brevemente en aquellos cuya foliación central es compacta. Para ver más ejemplos, ir a [CP], sección 3.

**Ejemplo** (Lineal en  $\mathbb{T}^n$ ). Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$  una matriz con coeficientes enteros, de determinante 1.

La acción de  $A$  sobre  $\mathbb{R}^n$  baja al cociente  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ , como un difeomorfismo  $f_A(\bar{x}) = A\bar{x}$ . El difeomorfismo  $f_A$  será parcialmente hiperbólico si  $A$  tiene algún valor propio de módulo mayor que 1 (y por lo tanto uno de módulo menor que 1).

Podría ser que los valores propios de  $A$  fueran todos de módulo distinto de 1 ( $f_A$  se dice de Anosov), y en ese caso  $f_A$  es parcialmente hiperbólico definiendo el espacio central como el generado por vectores propios asociados a valores propios de módulo intermedio (si es que existen).

Ahora, si  $A$  tiene algún valor propio de módulo 1, entonces  $f_A$  es un difeomorfismo parcialmente hiperbólico (genuino) definiendo  $E^c$  como el espacio generado por los vectores propios asociados a valores propios de módulo 1.

Las foliaciones estable, central e inestable en  $\mathbb{T}^n$  serán el cociente de subespacios afines tangentes a los subfibrados estable, central e inestable respectivamente.

Es un resultado de álgebra lineal que el vector propio asociado al valor propio real de módulo 1 genera un espacio de pendiente racional, y por lo

tanto si fuera el caso que  $\dim E^c = 1$  y que el valor propio asociado fuera 1 o  $-1$ , entonces la foliación central bajará a una foliación por círculos en  $\mathbb{T}^n$ .

Este grupo de ejemplos puede ser generalizado a cocientes compactos de nilvariedades (ver [CP]).

**Ejemplo** (Producto fibrado). Un fibrado  $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B}, \mathcal{F})$  es una variedad  $\mathcal{E}$  y un mapa  $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$  tal que para todo  $x \in \mathcal{B}$  existe un entorno  $U$  de  $x$  en  $\mathcal{B}$  de forma tal que  $p^{-1}(U) \simeq U \times \mathcal{F}$ , donde  $\mathcal{F}$  es una variedad compacta. En este caso se dice que  $\mathcal{E}$  es un fibrado con base  $\mathcal{B}$  y fibra  $\mathcal{F}$ .

Dado un difeomorfismo  $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ , decimos que  $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  levanta a  $f$  si  $\pi \cdot F = f \cdot \pi$ . Notamos  $F_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_{f(x)}$  al difeomorfismo inducido sobre cada fibra ( $\mathcal{F}_x$  es la fibra de  $\mathcal{E}$  que proyecta sobre  $x \in \mathcal{B}$ ).

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ B & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Sea  $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  un difeomorfismo de Anosov, con  $T\mathcal{B} = E^s \oplus E^u$  y sea un difeomorfismo  $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ , un levantado de  $f$  de forma que existe  $N > 0$  tal que para todo  $x \in \mathcal{B}$  y  $t \in \mathcal{F}_x$  se cumple

$$\|Df^N|E^s(x)\| < \min\{1, m(D_t F_x^N)\| \} < \max\{1, \|Df^N|T_t \mathcal{F}_x\|\} < m(Df^N|E^u(x)),$$

donde  $m(Dg) = \min_{\|v\|=1} \{\|Dg(v)\|\}$ .

En ese caso el difeomorfismo  $F$  es parcialmente hiperbólico con  $T\mathcal{E} = \hat{E}^s \oplus \hat{E}^c \oplus \hat{E}^u$ , donde  $D\pi \hat{E}^\sigma = E^\sigma$  para ambos  $\sigma = s, u$ , y si  $e \in \mathcal{E}$  con  $\pi(e) = x$ , entonces  $\hat{E}^c(e) = T_e \mathcal{F}_x$ .

Notemos que el subfibrado central integra trivialmente a una foliación  $\mathcal{W}^c$ , en donde  $\mathcal{W}^c(e) = \mathcal{F}_{\pi(e)}$ . Si la fibra  $\mathcal{F}$  es compacta, entonces  $F$  será un difeomorfismo parcialmente hiperbólico, dinámicamente coherente con foliación central compacta.

Si fijamos en  $\mathcal{E}$  una métrica Riemanniana, entonces el volumen de cada hoja (fibra) varía continuamente con el punto, debido a la continuidad de la métrica. Formalizaremos esto más adelante.

**Ejemplo** (Tiempo 1 de un flujo de Anosov). Un flujo de Anosov es un flujo  $\phi_t$  en una variedad  $M$ , de forma tal que el espacio tangente de  $M$  se descompone

en tres subfibrados  $T_x M = E^s(x) \oplus \mathbb{R}\partial_t \phi_t(x) \oplus E^u(x)$  y además existen  $C > 0$  y  $\lambda < 1$  tal que

$$\|D\phi_t|E^s\| < C\lambda^t; \|D\phi_{-t}|E^s\| < C\lambda^t, \forall t \geq 0.$$

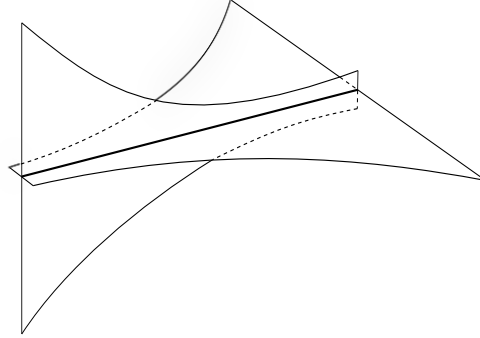


Figura 2.5: Vista local de un flujo de Anosov

*Ejemplos de flujos de Anosov son (entre otros) la suspensión de un difeomorfismo de Anosov de  $\mathbb{T}^n$  o el flujo geodésico en el tangente unitario de superficies de curvatura constante negativa.*

*Si consideramos  $f = \phi_1$  el tiempo 1 del flujo, entonces  $f$  será un difeomorfismo parcialmente hiperbólico, donde el espacio central será el generado por la dirección del flujo, y dicho espacio será (trivialmente) integrable a una foliación de dimensión 1, dada por las órbitas del flujo.*

*Las hojas compactas de la foliación central se corresponden con órbitas periódicas del flujo  $\phi_t$ ; se puede probar que un flujo de Anosov tiene numerables órbitas periódicas, por lo que en este caso la foliación central de  $f$  tendrá hojas no compactas.*

En [BB] se presentan ejemplos de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos donde todas las hojas centrales son compactas y sin embargo la holonomía de las hojas no es trivial (existen hojas con holonomía finita). En este caso el ejemplo es un cociente de producto fibrado.

Ejemplos no dinámicamente coherentes pueden ser encontrados en [HHU<sub>1</sub>] (un parcialmente hiperbólico en  $\mathbb{T}^3$ , no transitivo) y en [BGHP] (ejemplos transitivos en  $T^1 S$ , donde  $S$  es una superficie de género grande). En ambas referencias el fibrado central es de dimensión uno.

### 3. Foliaciones por hojas compactas

Supongamos que  $\mathcal{F}$  es una foliación por círculos, en una variedad  $M$  compacta.

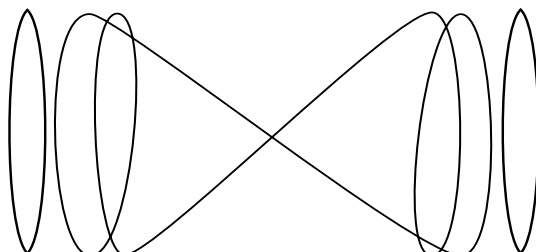


Figura 3.1: Dos hojas

¿Podemos decir algo acerca de la longitud de las hojas? Se podría pensar que la longitud tiene que estar acotada. Una sucesión de hojas con longitud arbitrariamente grande tendría que acumular en algún punto, y por lo tanto en alguna hoja. Esta hoja límite, que a priori parecería tener longitud infinita, es compacta. a

Si podemos probar la existencia de una sección transversal global a la foliación, entonces la longitud de las hojas estará acotada. La existencia de una sección así,  $\Sigma$ , nos permite pasar de un problema continuo (longitudes, tiempo) a un problema discreto (período del retorno). El mapa de primer retorno a  $\Sigma$  será un homeomorfismo con todos sus puntos periódicos, (*un homeomorfismo puntualmente periódico*), y un teorema de Montgomery [M] nos permite concluir:

**Teorema 3.1.** *Un homeomorfismo puntualmente periódico en una variedad topológica conexa es periódico.*

Vamos a usar las hipótesis dinámicas para probar la existencia de dicha sección. A continuación damos algunos ejemplos de foliaciones por hojas compactas para motivar y entender la pregunta planteada.

**Ejemplo (Productos).** *Si  $B$  es una variedad cualquiera y  $F$  una variedad compacta, entonces  $E = B \times F$  es una variedad foliada, donde la hoja por  $(p, q)$  será  $\mathcal{F}(p, q) = \{p\} \times F$ .*

**Ejemplo (Fibrados).** *La estructura de fibrado le da a  $E$  estructura de variedad foliada. Por cada punto  $x \in E$ , la hoja  $\mathcal{F}(x)$  será  $p^{-1}(p(x)) \simeq F$ . Los fibrados pueden entenderse como una generalización de los productos (fibrados triviales). Ejemplos de fibrados no triviales son el espacio unitario tangente  $T^1\Sigma_g$ , donde  $\Sigma_g$  es la variedad compacta orientable de género  $g \neq 1$ . La base en cada caso es  $\Sigma_g$  y la fibra  $S^1$ .*

**Ejemplo (Variedades de Seifert).** *Una variedad de Seifert es un espacio foliado por círculos, donde todas las hojas tienen holonomía trivial salvo finitas de ellas, llamadas fibras excepcionales, con holonomía finita.*

### 3.1. El ejemplo de Sullivan

El siguiente es un ejemplo dado por Sullivan en la década del 70 (ver [S]); consiste de una foliación  $\mathcal{F}$  de dimensión 1 en una variedad de dimensión 5, donde  $\mathcal{F}$  es tal que todas sus hojas son círculos pero la longitud de las hojas no es localmente acotada.

Sea  $S^2$  la esfera de dimensión 2, y  $T^1S^2$  el fibrado tangente unitario de  $S^2$ . El grupo de isometrías que preservan orientación de  $S^2$  es el grupo  $SO_3$  (que también podemos pensar como el grupo de transformaciones ortogonales de  $\mathbb{R}^3$  que preservan orientación).

Los elementos de  $SO_3$  actúan transitiva pero no libremente sobre  $S^2$ : dados dos puntos  $x$  e  $y$  de  $S^2$  cualesquiera, existe al menos un elemento de  $SO_3$  que lleva  $x$  en  $y$ . Por otro lado, todos los elementos de  $SO_3$  fijan al menos un punto.

Es por eso que extendemos la acción de  $SO_3$  a  $T^1S^2$ . Cada elemento  $g \in SO_3$  actúa en  $T^1S^2$  de la siguiente forma:

$$g : T^1S^2 \rightarrow T^1S^2,$$

$$(p, v) \mapsto (g \cdot p, d_p g \cdot v).$$

Dado  $p \in S^2$  y  $v, u \in T_p S^2$  de norma 1, con ángulo  $\theta$  entre ellos, podemos considerar  $g \in SO_3$  que deja  $p$  fijo y rota ángulo  $\theta$ . Esto y que  $SO_3$  actúe transitivamente sobre  $S^2$  implican que la acción definida arriba es transitiva.

Además, la acción resulta ser libre: una isometría de  $S^2$  que fije un punto y que además sea la identidad en su tangente debe ser la identidad en  $T^1S^2$ .

Sea  $\gamma_{S^2} : [0, 1] \rightarrow S^2$  una curva simple, cerrada y suave en la esfera. Ya que podemos suponer que  $\|\dot{\gamma}_{S^2}\| = 1$ , tiene sentido considerar la curva  $\gamma_*$ , en  $T^1S^2$ ,

$$\begin{aligned}\gamma_* &: [0, 1] \rightarrow T^1S^2, \\ t &\mapsto (\gamma_{S^2}(t), \dot{\gamma}_{S^2}(t)).\end{aligned}$$

La nueva  $\gamma_*$  es simple, cerrada y suave.

Dado un elemento  $g$  cualquiera de  $SO_3$ , la curva  $g \cdot \gamma_*$  también es simple, cerrada y suave, y como la acción de  $SO_3$  es transitiva en  $T^1S^2$ , obtenemos que  $\bigcup_{g \in SO_3} \phi_g(\gamma_*) = T^1S^2$ . Esta unión, sin embargo, no es disjunta. Si consideramos el elemento  $g \in T^1S^2$  que lleva  $\gamma_*(0)$  a  $\gamma_*(1/2)$  ( $g$  no es la identidad), entonces  $\gamma_* \cap g \cdot \gamma_* \neq \emptyset$ .

La solución a este problema es considerar, en lugar de la curva  $\gamma_*$  en  $T^1S^2$ , la curva

$$\begin{aligned}\gamma &: [0, 1] \rightarrow T^1S^2 \times S^1, \\ t &\mapsto (\gamma_*(t), t),\end{aligned}$$

y extender la acción de  $SO_3$  en  $T^1S^2$  a  $T^1S^2 \times S^1$  como la identidad en la última coordenada, es decir, que  $g \cdot \gamma = (g \cdot \gamma_*, t)$ .

Ahora tenemos que

$$T^1S^2 \times S^1 = \bigsqcup_{g \in SO_3} g \cdot \gamma.$$

Acabamos de construir, por cada curva  $\gamma$  en  $S^2$ , una foliación por círculos en  $T^1S^2 \times S^1$ , a la que llamaremos  $\mathcal{F}_\gamma$ .

Antes de seguir con la construcción de la foliación que queremos, algunas observaciones.

1. Si partimos de una curva  $\gamma$  de clase  $C^\infty$ , cada hoja de la foliación  $\mathcal{F}_\gamma$  será también de clase  $C^\infty$ .
2. La regularidad de la foliación  $\mathcal{F}_\gamma$  está dada por la regularidad de la acción de  $SO_3$  en  $T^1S^2 \times S^1$ , que es  $C^\infty$ .

El método para construir el ejemplo de Sullivan hace uso de la construcción anterior, y consiste en lo siguiente.



Sea  $M = T^1S^2 \times D^2$ , variedad con borde de dimensión 5. El parámetro  $r$  representa el radio de  $D$ , y para cada  $r \in (0, 1]$  tenemos un  $S^1 \times T^1S^2$ .

Fijamos en  $r = 1$  una curva  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow S^2$  cualquiera (simple, cerrada y suave). Definimos para cada  $r$  una curva  $\gamma_r$  de modo que:

1. la familia  $\{\gamma_r\}$  varíe diferenciablemente con  $r$ ,
2. si  $K_r = \max_{s \in [0,1]} k_r(s)$ , donde  $k_r$  es la función curvatura de  $\gamma_r$ , entonces  $K_r \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty$ .

**Lema 3.2.** *Existe una familia de curvas  $\{\gamma_r\}_{r \in (0,1]}$  como arriba.*

*Demostración.* La prueba consiste en la prueba de dos afirmaciones. La primera es que (1) si partimos de una curva  $\gamma$  suave, podemos hacerla variar suavemente de forma que el promedio de curvatura crezca estrictamente. La segunda es que (2) podemos crear curvatura (usando 1) de modo que iterando muchas veces quede uniformemente distribuida.

Repitiendo estos dos pasos logramos una familia  $\{\gamma_r\}_{r \in (0,1]}$  como queremos.

No probaremos (1). Consideremos  $\gamma$  una meridiano de  $S^2$ , parametrizado por longitud de arco y procedemos como en la imagen.

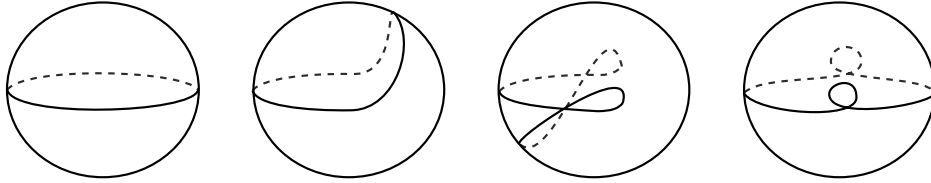


Figura 3.2: Prueba de (1)

Para ver (2) simplemente notemos que la curvatura creamos en el paso anterior está contenida en los tramos  $\gamma[a, b]$  y  $\gamma[c, d]$ , donde  $[a, b] \cap [c, d] = \emptyset$ . Podemos particionar el intervalo  $[0, 1]$  en una cantidad par (más que cuatro) de subintervalos  $\{P_1, \dots, P_{2n}\}$  y realizar el paso (1) en los pares de intervalos  $P_i, P_{i+n}$ , con  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Procedemos haciendo inducción en  $n$ .

□

Obtenemos así una foliación en  $T^1S^2 \times S^1$  para cada  $r \neq 0$ , y como  $\{\gamma_r\}$  varía diferenciablemente con  $r$ , estas foliaciones en realidad formarán una fo-

liación de  $T^1S^2 \times D^2 \setminus \{0\}$ .

La forma en que las curvas  $\{\gamma_r\}$  varían, y la acción de  $SO_3$  nos asegura que la holonomía de todas las hojas es trivial, o sea, que la longitud de las hojas varía continuamente con el punto en  $T^1S^2 \times D^2 \setminus \{0\}$  (probaremos eso más adelante).

Pero ¿cómo se comportan las hojas a medida que  $r$  se acerca a 0? La condición  $K_r \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty$  implica que las curvas en  $T^1S^2$  serán cada vez más *verticales*: mucha curvatura implica que al mover poco el parámetro de cada curva cambiará poco el punto en la base ( $S^2$ ) pero necesariamente la curva tendrá que *girar mucho*, o sea, va a haber mucho desplazamiento en la fibra.

En  $r = 0$  entonces, consideramos la foliación cuyas hojas son justamente la fibra de  $T^1S^2$ , es decir que, dado un punto  $(p, v, 0) \in T^1S^2 \times \{0\}$ , la hoja por ese punto será

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow T^1S^2 \times \{0\}, \\ t &\mapsto ((p, \theta_t(v)), 0), \end{aligned}$$

donde  $\theta_t$  es rotar  $2\pi t$  sobre la fibra.

La foliación resultante, que llamaremos  $\mathcal{F}$ , es una foliación por círculos en la variedad compacta  $T^1S^2 \times D^2$ ; todas sus hojas son compactas y por lo tanto tienen longitud finita. La holonomía es trivial en todas las hojas, salvo en  $T^1S^2 \times \{0\}$ , en donde todas las hojas tienen holonomía de orden infinito.

Si  $\gamma = (p, \theta(v))$  es una hoja en  $T^1S^2 \times \{0\} \simeq T^1S^2$ , arbitrariamente cerca pasan hojas de  $\mathcal{F}$  con coordenada  $r$  cercana a 0 (pero no 0), y cuanto más pequeño  $r$  más vueltas en dirección vertical dan las curvas antes de alejarse del punto  $p$ .

Para cualquier punto  $P = (p, v, 0)$  el grupo de holonomía de la hoja por  $P$  tiene orden infinito, y por lo tanto el volumen de las hojas no es localmente acotado en  $P$ .

Además el espacio de hojas no es Hausdorff (ver figura 3.1). Si lo fuera, todas las hojas deberían tener holonomía finita (ver [EMS], páginas 19-20).

**Observación 3.3.** *En este caso el conjunto de de puntos en donde el volumen de las hojas no es localmente acotado tiene estructura de subvariedad (de  $T^1S^2$ !) encajada.*

Pegando por el borde dos copias del ejemplo recién construido obtenemos una foliación por círculos en  $S^2 \times T^1S^2$  donde la longitud de las hojas no es localmente acotada.

**Pregunta.** ¿Puede ser la foliación de Sullivan la foliación central de algún difeomorfismo parcialmente hiperbólico?

### 3.2. La función volumen y el conjunto malo

En esta sección definiremos la función *volumen de una hoja* y veremos la relación entre su continuidad y la holonomía de la foliación.

Referimos al lector a [EMS].

Notaremos por  $\mathcal{F}$  a una foliación de dimensión  $k$  en una variedad  $M$ , tal que todas sus hojas son subvariedades compactas. En virtud de la proposición 2.5 podemos suponer también que la foliación es orientable.

Recordamos que hay una métrica Riemanniana  $g$  fija en  $M$ . Para cada punto en  $M$  existe un entorno  $V$  de  $x$  en  $\mathcal{F}(x)$  en donde hay una orientación bien definida. A partir de esta orientación y la métrica en  $M$ , podemos definir en  $V$  una forma de volumen. Haciendo esto para cada  $x \in M$ , habremos definido una forma de volumen en cada hoja de  $\mathcal{F}$  que varía continuamente con la hoja ( es simplemente restringir el producto interno  $g_x$  al subespacio  $T_x(\mathcal{F}(x))$  para cada  $x$  punto de  $M$ ).

Queda bien definida

$$\begin{aligned} \text{vol} : M &\rightarrow (0, +\infty), \\ x &\mapsto \text{vol}(\mathcal{F}(x)), \end{aligned}$$

el volumen de la hoja de  $\mathcal{F}$  que pasa por  $x$ .

Es claro que  $\text{vol}$  es constante a lo largo de las hojas de  $\mathcal{F}$ . La proposición que sigue captura las propiedades básicas de  $\text{vol}$  y la relación entre su continuidad en una hoja y el *tamaño* del grupo de holonomía de esa hoja.

Recordamos que  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  se dice *semicontinua inferiormente* si para todo  $x \in X$  y  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $\|x - y\| < \delta$  se cumple que  $f(y) > f(x) - \epsilon$ , y que notamos con  $\text{Hol}(L)$  al grupo de holonomía de la hoja  $L$  y  $\mathcal{F}(x)$  a la hoja de la foliación  $\mathcal{F}$  que contiene a  $x$ .

**Proposición 3.4.** *La función  $\text{vol} : M \rightarrow (0, +\infty)$  cumple las siguientes propiedades:*

1. *Es semicontinua inferiormente, de una forma particular:*

*Para todo  $x \in M$ , para todo  $n > 0$ ,  $\epsilon > 0$ , y para todo  $y \in M$  lo suficientemente cerca de  $x$  sucede que o bien (i)  $\text{vol}(\mathcal{F}(y)) \geq n\text{vol}(\mathcal{F}(x))$ , o bien (ii) existe  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $1 \leq j \leq n$  tal que  $|\text{vol}(\mathcal{F}(y)) - j\text{vol}(\mathcal{F}(x))| < \epsilon$ .*

2. *El grupo  $\text{Hol}(\mathcal{F}(x))$  es trivial si y sólo si  $\text{vol}$  es continua en  $x$ .*

3. *El grupo  $\text{Hol}(\mathcal{F}(x))$  es finito si y sólo si  $\text{vol}$  es acotada en algún entorno de  $x$ .*

*Demostración.* Lo probaremos asumiendo que  $\mathcal{F}$  es una foliación de dimensión 1, ya que es el caso que nos importará. La prueba del caso general se puede encontrar en [EMS]. Una foliación  $\mathcal{F}$  compacta y de dimensión 1 tendrá hojas todas círculos.

Comenzamos por fijar  $x \in M$  y  $\mathcal{L}$  la hoja de  $\mathcal{F}$  que contiene a  $x$ .

**Lema.** *Existe un entorno  $W$  de  $\mathcal{L}$  y una retracción  $p : W \rightarrow \mathcal{L}$  de forma tal que para cualquier  $y \in \mathcal{L}$ , la preimagen  $p^{-1}(y)$  es un disco transversal a  $\mathcal{F}|_W$ .*

El abierto  $W$  no tiene por que estar saturado por hojas de  $\mathcal{F}$ .

*Demostración.* La hoja  $\mathcal{L}$  es compacta, y por lo tanto es cubierta por una cantidad finita de placas de  $\mathcal{F}$ . Además está encajada, por lo que podemos tomar  $\widehat{W}$  un entorno tubular de  $\mathcal{L}$  y  $p : \widehat{W} \rightarrow \mathcal{L}$  la proyección del entorno tubular. Las fibras  $p^{-1}(y)$  intersectan a  $\mathcal{L}$  transversalmente, y como la foliación es transversalmente continua, podemos considerar  $W \subset \widehat{W}$  para que  $p^{-1}(y)$  sea transversal a  $\mathcal{F}|_W$  para todo  $y \in \mathcal{L}$ .  $\square$

Fijado un  $n > 0$ , la proposición 2.11 asegura que existe un  $\delta > 0$  tal que hojas con puntos  $\delta$ -cerca de  $x$  o bien se cierran en  $j < n$  vueltas o bien dan al menos  $n$  vueltas en torno a  $\mathcal{L}$ . Esto implica (1).

Si el grupo de holonomía de  $\mathcal{L}$  es trivial, entonces aplica el teorema de estabilidad de Reeb y existe un entorno  $U \simeq \mathcal{L} \times D$ , que contiene a  $\mathcal{L}$ , siendo  $D$  un disco transversal a  $\mathcal{F}$ . Como la métrica  $g$  es continua en  $M$ , esto implica la continuidad de  $\text{vol}$  en  $x$ .

Fijemos  $D = p^{-1}(x)$  un disco transversal a  $\mathcal{L}$  por  $x$  ( $p$  es la retracción del lema) y (achicando  $D$  de ser necesario)  $h : D \rightarrow D$  un generador del grupo de holonomía  $\text{Hol}(\mathcal{L})$ .

Si existiera  $y \in D$  con  $h(y) \neq y$ , obtendríamos  $p|_{\mathcal{F}(y)} : \mathcal{F}(y) \rightarrow \mathcal{L}$  sería un cubrimiento de más de un hoja, lo entraría en contradicción con el argumento anterior. Esto concluye (2).

Si el grupo de holonomía de  $\mathcal{L}$  es finito, entonces existe un  $K$  tal que para  $y$  lo suficientemente cerca de  $x$ , la proyección  $p|_{\mathcal{F}(y)} : \mathcal{F}(y) \rightarrow \mathcal{L}$  es un cubrimiento de a lo más  $K$  hojas. Esto implica que  $\text{vol}(\mathcal{F}(y)) \leq K \text{vol}(\mathcal{L}) + C$ , para cierto  $C > 0$ .

Si  $\text{vol}$  es acotada en un entorno de  $x$ , es inmediato que no pueden existir hojas que pasen arbitrariamente cerca de  $x$  y que cubran a  $\mathcal{L}$  al menos  $n$  veces, para todo  $n > 0$ .  $\square$

Si estamos intentando probar que el el volumen de las hojas centrales de un difeomorfismo parcialmente hiperbólico tienen volumen uniformemente acotado, la proposición anterior nos dice que tenemos que probar que todas las hojas tienen grupo de holonomía finito.

**Proposición 3.5.** *Si  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  una función semicontinua inferiormente definida en  $X$  un espacio métrico compacto, entonces  $g$  es continua en un subconjunto denso de  $X$ .*

*Demostración.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$  definimos

$$A_n = \left\{ x \in X : \limsup_{y \rightarrow x} g(y) \geq g(x) + \frac{1}{n} \right\}.$$

Cada  $A_n$  es claramente cerrado, y además se cumple que  $g$  es continua en un punto  $x$  si y solamente si  $x \in (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)^c$ .

Para concluir alcanza probar que cada  $A_n$  tiene interior vacío. Como  $X$  es métrico compacto, un teorema de Baire asegura que entonces  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  tendrá interior vacío y por lo tanto su complemento será denso (ver [Mu], capítulo 8).

Fijemos un  $\epsilon > 0$  y  $\delta$  tal que para todo  $x \in M$ , si  $\|x - y\| < \delta$ , entonces  $g(y) \geq g(x) - \epsilon$ . Supongamos además que existe  $n$  tal que el conjunto  $A_n$  tiene interior no vacío.

Existe  $r < \delta$  tal que  $B(p_0, r) \subset A_n$ , para algún  $p_0 \in A_n$ . Como  $p_0 \in A_n$ , existe  $p_1 \in B(p_0, \frac{r}{2})$  tal que  $g(p_1) > g(p_0) + \frac{1}{n}$ . Repitiendo, conseguimos una

sucesión  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset B(p_0, r)$  tal que  $g(p_i) > g(p_0) + \frac{k}{n}$ . Existe un  $k_0$  para el cual  $\frac{k_0}{n} > 2\epsilon$ , pero esto es absurdo ya que  $\|p_{k_0} - p_0\| < r < \delta$  y  $g(p_0) < g(p_{k_0}) - \frac{k_0}{n} < g(p_{k_0}) - \epsilon$ . Esto niega la semicontinuidad inferior de  $g$ .  $\square$

Definimos el *malo* como

$$\mathcal{B} = \{x \in M : \text{vol no es localmente acotada en } x\},$$

es decir,  $\mathcal{B}$  es el conjunto de puntos  $x \in M$  tal que la hoja por  $x$  tiene grupo de holonomía de orden infinito.

El conjunto malo, por lo tanto, es cerrado y tiene interior vacío: la función vol es una función semicontinua inferiormente y  $\mathcal{B} \subset \hat{\mathcal{B}}$ , donde  $\hat{\mathcal{B}}$  es el conjunto de puntos de  $M$  donde vol no es continua. La proposición anterior asegura que  $\hat{\mathcal{B}}$  es cerrado y tiene interior vacío.

## 4. Difeomorfismos parcialmente hiperbólicos con foliación central compacta

Supondremos  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo parcialmente hiperbólico, dinámicamente coherente, con foliación central compacta.

Primero veremos que la holonomía de la foliación central se descompone en lo que llamaremos holonomía *centro-estable* y *centro-inestable*.

### 4.1. Descomposición de la holonomía central

Vamos a sacar ventaja de la existencia de las foliaciones centro-estable y centro-inestable. Para eso, comenzamos probando lo siguiente:

**Proposición 4.1** (Estructura transversal local de la foliación central). *Sea  $p \in M$  y  $\mathcal{W}^c(p)$  la hoja central por  $p$ . Entonces existe un disco  $D$ , transversal a la foliación  $\mathcal{W}^c$  que es homeomorfo a un producto*

$$D^s \times D^u,$$

donde cada  $D^\sigma$  es un disco de dimensión  $\dim E^\sigma$  contenido en la hoja centro-estable (respectivamente centro-inestable) por  $p$ .

*Demostración.* Consideramos  $T$  el subespacio  $E^s \oplus E^u$  de  $T_p M$  y  $\exp_T : T \rightarrow M$  el mapa exponencial restringido al subespacio  $T$ . Es sabido que el mapa exponencial es un difeomorfismo en un entorno de 0; existe  $r > 0$  tal que  $\exp_T|_{B(0,r)} : B(0,r) \rightarrow \hat{D}$  es un difeomorfismo, y por lo tanto  $\hat{D}$  es un disco que contiene a  $p$  y es tangente en  $p$  a  $E^s(p) \oplus E^u(p)$ . Además, podemos tomar  $r$  pequeño para que el disco  $\hat{D}$  sea transversal a la foliación central.

Definimos  $D^\sigma = \hat{D} \cap \mathcal{W}^{c\sigma}$ , pequeños discos de dimensión  $\dim E^\sigma$ . Tomando subdiscos de  $D^\sigma$  que contengan a  $p$  (que seguimos notando por  $D^\sigma$ ) podemos considerar el mapa

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : D^s \times D^u &\rightarrow \hat{D}, \\ [x, y] &\mapsto \mathcal{W}^{cu}(x) \cap \mathcal{W}^{cs}(y) \cap \hat{D}, \end{aligned}$$

que está bien definido.

La continuidad de las foliaciones nos dice que el mapa  $[\cdot, \cdot]$  es continuo y además, tomando  $r$  más pequeño, el punto de intersección será único (esto es

consecuencia de la "transversalidad" de las foliaciones centro-estable y centro-inestable).

Obtenemos que el mapa  $[\cdot, \cdot] : D^s \times D^u \rightarrow M$  es un homeomorfismo sobre su imagen, que llamaremos  $D$ .  $\square$

Sea ahora  $\mathcal{C}$  una hoja de  $\mathcal{W}^c$  y sea  $\text{Hol}(\mathcal{C})$  el grupo de holonomía de  $\mathcal{C}$  (que pensamos basado en algún punto  $p \in \mathcal{C}$ ). Sea  $D$  el disco por  $p$  transversal a la foliación central de la proposición 4.1 y sea  $h_\gamma : D \rightarrow D$  el mapa de holonomía asociado a  $\gamma$  una curva cerrada.

La proposición 4.1 nos dice que podemos pensar  $D$  como un producto,

$$D = D^s \times D^u,$$

siendo  $D^\sigma = D \cap \mathcal{W}^{c\sigma}(p)$ ,  $\sigma = s, u$ .

Las hojas centro-estables y centro-inestables están saturadas por la foliación central, por lo que  $h_\gamma(D^u) \subset D^u$  y  $h_\gamma(D^s) \subset D^s$ .

Si  $x$  es un punto en  $D$ , entonces escribimos  $x = (x^s, x^u)$ , donde  $x^s \in D^s$  y  $x^u \in D^u$ .

Como los discos  $D^\sigma$  son invariantes por  $h_\gamma$ , podemos definir el grupo de holonomía centro-estable y centro-inestable como

$$\text{Hol}^\sigma(\mathcal{C}) = \{h|_{D^\sigma} : h \in \text{Hol}(\mathcal{C})\}, \sigma = s, u.$$

Cada  $\text{Hol}^\sigma(\mathcal{C})$  tiene estructura de grupo, heredada de  $\text{Hol}(\mathcal{C})$ . Obtenemos el siguiente resultado:

**Proposición 4.2.** *El grupo de holonomía de  $\mathcal{C}$  se descompone como*

$$\text{Hol}(\mathcal{C}) = \text{Hol}^s(\mathcal{C}) \times \text{Hol}^u(\mathcal{C}).$$

*Entendemos esto como que para cada  $h_\gamma \in \text{Hol}(\mathcal{C})$ , y cada  $x \in D$ , se tiene que  $h_\gamma(x) = (h_\gamma^s(x^s), h_\gamma^u(x^u))$ , donde  $h_\gamma^\sigma \in \text{Hol}^\sigma(\mathcal{C})$ ,  $\sigma = s, u$ .*

*Demostración.* Se cumple que



$$\begin{aligned}
h_\gamma(x) &= h_\gamma(\mathcal{W}^{cs}(x) \cap \mathcal{W}^{cu}(x) \cap D) \\
&= h_\gamma(\mathcal{W}^{cs}(x) \cap D) \cap h_\gamma(\mathcal{W}^{cu}(x) \cap D) \\
&= h_\gamma(\mathcal{W}^{cs}(x^u) \cap D) \cap h_\gamma(\mathcal{W}^{cu}(x^s) \cap D) \\
&= h_\gamma^u(\mathcal{W}^{cs}(x^u) \cap D) \cap h_\gamma^s(\mathcal{W}^{cu}(x^s) \cap D) \\
&= \mathcal{W}^{cs}(h_\gamma^u(x^u)) \cap D \cap \mathcal{W}^{cu}(h_\gamma^s(x^s)).
\end{aligned}$$

□

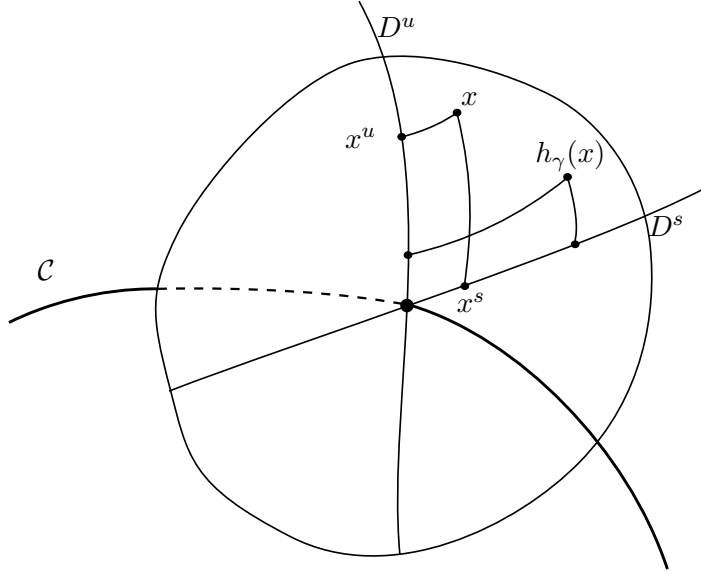


Figura 4.1: Descomposición de la holonomía central

## 4.2. Parcialmente hiperbólicos con holonomía central trivial

Supongamos que  $f : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo parcialmente hiperbólico dinámicamente coherente con foliación central compacta de holonomía trivial.

En ese caso, el teorema de estabilidad de Reeb asegura que cada hoja central  $\mathcal{C}$  tiene un entorno  $U$  saturado en  $\mathcal{W}^c$  que se puede pensar como un producto  $D \times \mathcal{C}$  (donde  $D$  es un disco transversal a  $\mathcal{W}^c$ , que podemos pensar que es el de la proposición 4.1).

Si consideramos  $p : M \rightarrow M/\mathcal{W}^c$  la proyección al espacio de hojas centrales, entonces  $p^{-1}(p(x)) = \mathcal{W}^c(x)$ , y si  $U$  es un entorno dado por el teorema

de estabilidad para la hoja  $\mathcal{W}^c(x)$ , entonces  $p(U)$  es un entorno de  $p(x)$  en  $M/\mathcal{W}^c$ . Además, como  $p|_U$  es continua e inyectiva, es un homeomorfismo sobre su imagen. Como  $U$  está saturado por  $\mathcal{F}$ , obtenemos que  $p(U) \simeq D$ .

Conseguimos para cada punto de  $M/\mathcal{W}^c$  un entorno  $p(U)$  tal que

$$p^{-1}(p(U)) \simeq p(U) \times \mathcal{W}^c(y),$$

para algún  $y \in M$ .

Por lo tanto  $M$  tiene estructura de fibrado  $(M, p, M/\mathcal{W}^c, F)$  con base el espacio de hojas y fibra  $F$  difeomorfa a cualquier hoja central.

### En el cociente

Como la foliación central es  $f$ -invariante, podemos además definir  $\hat{f} : M/\mathcal{W}^c \rightarrow M/\mathcal{W}^c$  que haga conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ M/\mathcal{W}^c & \xrightarrow{\hat{f}} & M/\mathcal{W}^c \end{array}$$

El mapa  $\hat{f}$  es un homeomorfismo del espacio de hojas (con la topología cociente), y debe ser, de alguna manera, *hiperbólico*.

Definimos en  $M/\mathcal{W}^c$  la distancia  $\rho$  como

$$\rho(a, b) := d_H(p^{-1}(a), p^{-1}(b)) = \max\left\{ \max_{x \in \mathcal{W}^c(a)} \min_{y \in \mathcal{W}^c(b)} d(x, y), \max_{x \in \mathcal{W}^c(b)} \min_{y \in \mathcal{W}^c(a)} d(x, y) \right\},$$

donde  $d$  es la distancia en  $M$  inducida por la métrica, y  $d_H$  es la distancia Hausdorff.

La distancia  $\rho$  induce la topología cociente: Vimos que la topología cociente está generada por la imagen de discos transversales a  $\mathcal{W}^c$ . Si  $D$  es uno de esos discos, entonces la distancia Hausdorff de dos hojas centrales en  $p^{-1}(p(D))$  está acotada por  $\text{diam}(D)$ . Si la distancia Hausdorff  $d$  entre dos hojas es chica, entonces dichas hojas tendrán que estar en  $p^{-1}(p(D))$  para algún  $D$  disco transversal; alcanza tomar las transversales de tamaño  $2d$  (ver la proposición 4.1).

El espacio de hojas centrales es entonces un espacio métrico compacto (y por lo tanto Hausdorff). Podemos adaptar la definición de hiperbolicidad al caso topológico, de la siguiente manera.

**Definición 4.3.** Sea  $(X, \rho)$  un espacio métrico compacto. Para un homeomorfismo  $h : X \rightarrow X$  definimos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^s(x, \epsilon) &= \{y \in X : \rho(h^n(x), h^n(y)) \leq \epsilon, \forall n \geq 0\}, \\ \mathcal{F}^u(x, \epsilon) &= \{y \in X : \rho(h^n(x), h^n(y)) \leq \epsilon, \forall n \leq 0\}\end{aligned}$$

los conjuntos estable (e inestable) local de  $x$ .

Supongamos que existen  $\epsilon > 0$  y constantes  $C > 0, \lambda \in (0, 1)$  tal que

$$\begin{aligned}y \in \mathcal{F}^s(x, \epsilon) &\Rightarrow \rho(h^n(x), h^n(y)) \leq C\lambda^n \rho(x, y), \forall n \geq 0, \\ y \in \mathcal{F}^u(x, \epsilon) &\Rightarrow \rho(h^n(x), h^n(y)) \leq C\lambda^n \rho(x, y), \forall n \leq 0,\end{aligned}$$

y que tenemos estructura de producto local: existe  $\delta > 0$  tal que si  $\rho(x, y) < \delta$ , entonces hay un único punto de intersección

$$[x, y] = \mathcal{F}^s(x, \epsilon) \cap \mathcal{F}^u(y, \epsilon),$$

y la función  $[\cdot, \cdot] : \{(x, y) \in X \times X : \rho(x, y) < \delta\} \rightarrow X$  es continua.

Si se verifica todo lo anterior, decimos que  $h$  es un homeomorfismo de Anosov.

Decimos además que  $h$  es un homeomorfismo de Anosov con foliaciones estable e inestable si los conjuntos estables e inestables

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^s(x) &= \{y \in X : \rho(h^n(x), h^n(y)) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty\}, \\ \mathcal{F}^u(x) &= \{y \in X : \rho(h^n(x), h^n(y)) \rightarrow 0, n \rightarrow -\infty\}\end{aligned}$$

forman dos foliaciones continuas de  $X$ , topologicamente transversales en todos los puntos. Además en este caso  $X$  será una variedad topológica, ya que soporta una foliación topológica.

Decimos que un homeomorfismo de Anosov es de *codimensión uno* si o bien la dimensión topológica de la variedad estable es uno, o la dimensión topológica de la variedad inestable es uno. Análogamente se definen los difeomorfismos de Anosov de codimensión uno.

Enunciaremos ahora un resultado de Franks ([F]) y Newhouse ([N]), adaptados al caso topológico, que en conjunto y bajo la hipótesis de que el homeomorfismo  $h$  sea de codimensión uno clasifican  $h$ . La prueba en [Hi] se adapta al contexto topológico (ver [G], página 759).

**Teorema 4.4** (Franks-Newhouse). *Sea  $h : X \rightarrow X$  un homeomorfismo de Anosov con foliaciones estable e inestable de codimensión 1. Entonces  $M$  es homeomorfo a un toro  $\mathbb{T}$  y  $h$  es conjugado a un automorfismo de Anosov lineal de  $\mathbb{T}$ .*

Teniendo todo esto en cuenta, volvemos al caso que nos interesa.

**Proposición 4.5.** *Supongamos que  $f : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo parcialmente hiperbólico, dinámicamente coherente, con foliación central compacta de holonomía trivial. Supongamos además que las foliaciones estable, inestable y central son orientables y transversalmente orientables. Entonces el homeomorfismo  $\hat{f} : M/\mathcal{W}^c \rightarrow M/\mathcal{W}^c$  es un homeomorfismo de Anosov con foliaciones estable e inestable.*

*Demostración.* El mapa  $\hat{f}$  es un homeomorfismo del espacio de hojas.

Las foliaciones estable e inestable serán  $\mathcal{F}^\sigma = \mathcal{W}^{c\sigma}/\mathcal{W}^c$ , para ambos  $\sigma = s, u$ , foliaciones topológicas transversales.

La estructura de producto local es consecuencia de la transversalidad de las foliaciones centro-estable y centro-inestable; si  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son dos hojas centrales a distancia Hausdorff pequeña entonces las hojas centro-estable local por  $\mathcal{C}_1$  y centro-inestable local por  $\mathcal{C}_2$  se intersectarán en una única hoja central.

Ahora, sea  $a \in M/\mathcal{W}^c$  y sea  $b$  tal que  $\rho(a, b) < \epsilon$  y  $b \in \mathcal{F}^s(a, \epsilon)$ . Las hojas  $\mathcal{C}_a = p^{-1}(a)$  y  $\mathcal{C}_b = p^{-1}(b)$  están a distancia Hausdorff menor que  $\epsilon$ , y además  $\mathcal{C}_b \subset \mathcal{W}^s(\mathcal{C}_a, \epsilon) = \cup_{x \in \mathcal{C}_a} \mathcal{W}^s(x)$ .

Esto implica que  $\sup_{x \in \mathcal{C}_a} \{d(x, \mathcal{W}^s(x) \cap \mathcal{C}_b)\} < \epsilon$ . Obtenemos que si  $n \geq 0$ , entonces  $d_H(f^n(\mathcal{C}_a), f^n(\mathcal{C}_b)) < C\lambda^n$  (para  $C$  y  $\lambda$  las constantes de contracción de  $f$ ). Esto concluye la prueba.  $\square$

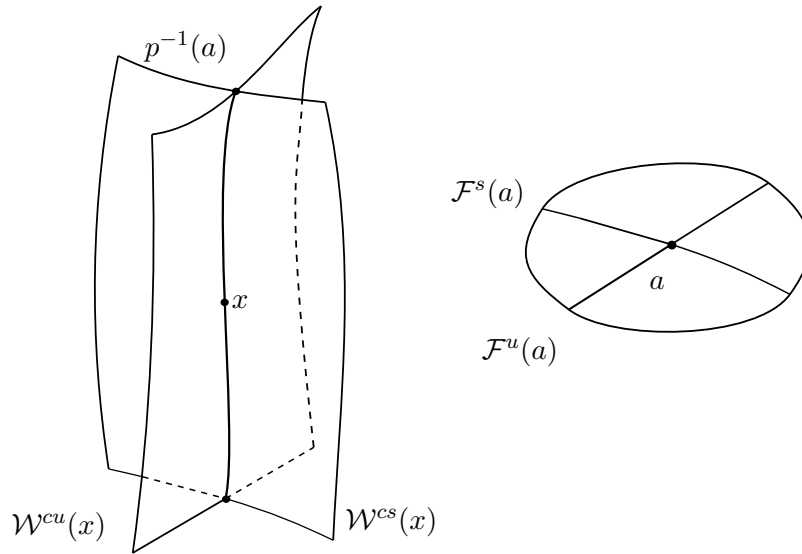


Figura 4.2: Una hoja central y la proyección al cociente

Esto nos dice que en caso de estar en la hipótesis de la proposición,  $f$  será un producto fibrado con base  $\hat{f}$  un homeomorfismo de Anosov del espacio de hojas.

**Corolario 4.6.** *Si a las hipótesis de la proposición anterior agregamos que  $f$  sea de codimensión 1, entonces  $f$  es un producto fibrado con base  $\hat{f}$  conjugada a un automorfismo del toro.*

### 4.3. Primeros resultados

En esta sección pondremos hipótesis muy específicas (sobre la codimensión de  $f$ , o la holonomía de las hojas centrales) y probaremos que, a menos de un cubrimiento finito, caemos en las hipótesis de la sección anterior.

**Teorema 4.7.** *centrales con holonomía trivial] Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo parcialmente hiperbólico, dinámicamente coherente. Supongamos que la foliación central es compacta, y que todas las hojas de la foliación central tienen holonomía trivial. Entonces el volumen de las hojas centrales es uniformemente acotado y a menos de un cubrimiento finito,  $f$  es un producto fibrado.*

*Si además suponemos que  $f$  es de codimensión 1, entonces  $f$  es un producto fibrado con base  $\hat{f}$  conjugada a un automorfismo de Anosov del toro.*

*Demostración.* Podemos suponer gracias a la proposición 2.5 que la foliación central es orientable a menos de un cubrimiento doble.

Como el grupo de holonomía de cada hoja es trivial, la función vol es continua (por la proposición 3.4, y por lo tanto el volumen de las hojas es acotado en  $M$ ).

Por otro lado, aplica lo hecho en la sección anterior: obtenemos que  $f$  es un producto fibrado sobre el espacio de hojas y que  $\hat{f} : M/\mathcal{W}^c \rightarrow M/\mathcal{W}^c$  es un homeomorfismo de Anosov con foliaciones estable e inestable.

Si además  $f$  es de codimensión uno, entonces aplican los teoremas de Franks y Newhouse, y el homeomorfismo  $\hat{f}$  será un automorfismo del toro.  $\square$

El siguiente lema nos será de utilidad.

**Lema 4.8.** *Si  $f : I \rightarrow I$  es un homeomorfismo del intervalo, con un punto fijo, tal que todos los puntos tienen órbita finita por  $f$ , y además  $f$  preserva orientación, entonces  $f$  es la identidad.*

*Demostración.* Si  $f$  no es la identidad, entonces existe  $x$  punto de  $I$  tal que la sucesión  $\{f^n(x)\}_{n \geq 0}$  es estrictamente creciente (o decreciente). Esto es absurdo.  $\square$

De ahora en adelante explotaremos el resultado de la proposición 4.2. Lo recordamos.

Si  $\mathcal{C}$  es una hoja central, entonces el grupo de holonomía de  $\mathcal{C}$  se descompone como

$$\text{Hol}(\mathcal{C}) = \text{Hol}^s(\mathcal{C}) \times \text{Hol}^u(\mathcal{C}).$$

**Teorema 4.9.** *central de codimensión dos] Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo parcialmente hiperbólico, dinámicamente coherente. Supongamos que la foliación central es compacta y que además  $\dim E^s = \dim E^u = 1$ .*

*Entonces el volumen de las hojas centrales es uniformemente acotado y, a menos de un cubrimiento finito,  $f$  es un producto fibrado con base  $\hat{f}$  conjugado a un automorfismo de Anosov del toro.*

La primera parte del teorema (que el volumen de las hojas es acotado) se prueba en [V] e independientemente en [EMS]; una foliación de codimensión dos por hojas compactas tiene volumen acotado. Daremos una prueba en el contexto en el que estamos trabajando.

*Demostración.* Por la proposición 2.5, podemos suponer que las foliaciones central, centro-estable, estable, centro-inestable e inestable son orientables y transversalmente orientables (tomando un cubrimiento finito).

Sea  $\mathcal{C}$  una hoja de  $\mathcal{W}^c$ . El teorema se reduce a probar lo siguiente:

**Afirmación.** *El grupo de holonomía  $\text{Hol}(\mathcal{C})$  es trivial.*

*Demostración.* Probaremos que ambos  $\text{Hol}^\sigma(\mathcal{C})$ ,  $\sigma = s, u$  son triviales.

Sea  $h_\gamma^s \in \text{Hol}^s(\mathcal{C})$ , con base en un punto  $p$  de  $\mathcal{C}$ , definido en  $D^s = D \cap \mathcal{W}^{cs}(p)$ , donde  $D$  es el disco transversal a  $\mathcal{W}^c$  definido por la proposición 4.1.

Veamos primero que  $h_\gamma^s : D^s \rightarrow D^s$  preserva la orientación: fijamos  $D_+^s$  una componente conexa de  $D^s \setminus p$  y  $v \in E^s(p)$ , unitario y apuntando en la dirección de  $D_+^s$ . Sea ahora  $v_\gamma : [0, 1] \rightarrow E^s$  la única curva continua de vectores unitarios tangentes a  $\mathcal{W}^s$  que cumple que  $v_\gamma(t) \in E^s(\gamma(t))$  y que  $v_\gamma(0) = v$ . El mapa  $h_\gamma^s$  debe fijar  $D_+^s$ . Si no lo hiciera, tendríamos que  $v_\gamma(1) = \lambda v$ , para algún  $\lambda < 0$ . Pero esto no puede ser, ya que la foliación centro-inestable es transversalmente orientable (y de codimensión 1).

Tenemos entonces que  $h_\gamma^s$  es un homeomorfismo de  $D^s$ , que preserva orientación. Para probar que  $h_\gamma^s$  es la identidad, alcanza con probar que todos los puntos tienen órbita finita.

Para eso, fijemos un  $\epsilon > 0$  lo suficientemente pequeño como para que las placas centrales de tamaño  $\epsilon$  de puntos en  $D^s$  no se intersecten. Si algún punto  $x \in D^s$  tuviera órbita infinita por  $h_\gamma^s$  (podemos suponerla toda contenida en  $D^s$ ) y, por lo tanto, obtendríamos que  $\text{vol}(\mathcal{W}^c(x)) \geq n\epsilon, \forall n > 0$ . Esto no puede ser, ya que todas las hojas de  $\mathcal{W}^c$  son compactas.

De forma completamente análoga se prueba que  $\text{Hol}^u(\mathcal{C})$  es trivial.  $\square$

Hemos probado que todas las hojas de la foliación central tienen holonomía trivial.

La demostración del teorema termina de manera idéntica a la del teorema anterior.  $\square$

#### 4.4. Enunciado del teorema 1.1

Enunciaremos el teorema principal de este trabajo. Desarrollaremos la prueba en las siguientes secciones.

**Teorema.** *Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo parcialmente hiperbólico, dinámicamente coherente. Supongamos que la foliación central es compacta y que  $\dim E^c = 1$ . Supongamos además que  $\dim E^s \leq 2$  y  $\dim E^u \leq 2$ .*

*Entonces el volumen de las hojas centrales es uniformemente acotado.*

Obtenemos directamente el siguiente corolario:

Decimos que un difeomorfismo parcialmente hiperbólico es de codimensión  $k + l$  si  $\dim E^u = k$  y  $\dim E^s = l$  o viceversa. El siguiente es un corolario inmediato del teorema principal.

**Corolario 4.10.** *Si  $f : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo parcialmente hiperbólico con foliación central compacta de dimensión uno, y además  $f$  es de codimensión  $2 + 1$  o  $2 + 2$ , entonces la holonomía de la foliación central es finita, o equivalentemente, la longitud de las hojas centrales es uniformemente acotada en  $M$ .*

**Observación 4.11.** *Si  $M$  es una variedad de dimensión menor o igual a cuatro, entonces el corolario anterior aplica directamente, sin hacer suposiciones extra sobre la codimensión del difeomorfismo  $f$ .*

El siguiente resultado fue probado por D. Bonhet en su tesis de doctorado (ver [B]).

**Teorema 4.12** (Codimensión  $1+k$ ). *Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo parcialmente hiperbólico de codimensión  $k + 1$  y tal que la foliación central tiene holonomía finita. Entonces existe un cubrimiento finito de  $f$  que es un producto fibrado.*

Este teorema nos dice que si  $f$  está en las hipótesis del teorema 1.1, entonces  $f$  es, a menos de un cubrimiento finito, un producto fibrado.

El siguiente teorema aplica cuando  $M$  es una variedad de dimensión cinco y  $f$  es un difeomorfismo parcialmente hiperbólico de codimensión  $2 + 2$ .

**Teorema 4.13** (Codimensión  $2+2$ ). *Sea  $f : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo parcialmente hiperbólico con foliación central compacta, de dimensión uno, y de codimensión  $2 + 2$  (y por lo tanto de holonomía finita).*



*Entonces las hojas centrales con holonomía no trivial son aisladas, y por lo tanto finitas.*

En este caso  $M$  es un fibrado de Seifert.

**Observación 4.14.** *Para terminar de tratar el caso en que  $M$  es una variedad de dimensión cinco (y la foliación central de dimensión uno), falta considerar el caso de codimensión  $1 + 3$ . Las técnicas usadas para probar el teorema principal usan bastante inevitablemente el hecho de que la dimensión de los fibrados estable e inestable es menor o igual a 2 (ver sección 6.3).*

## 5. La prueba del teorema 1.1

En esta sección desarrollaremos la prueba del teorema 1.1. Queremos probar que la holonomía de cada hoja de la foliación central de  $f$  es finita cuando los fibrados estable e inestable tienen ambos dimensiones menor o igual a dos.

Vamos a usar la proposición 4.2: estudiar la holonomía de una hoja central es estudiar la holonomía de esa hoja dentro de cada hoja centro-estable y centro-inestable. El problema se reduce a probar que la holonomía es finita para una foliación de codimensión a lo más dos. Si cada hoja centro-estable y centro-inestable fuera compacta, [EMS] y [V] aseguran que la holonomía de cada hoja es finita (esto vale para hojas centrales compactas de dimensión cualquiera!); pero en general esto no pasa.

Consideremos  $\mathcal{C}$  una hoja central y  $\mathcal{W}^{cs}(\mathcal{C})$  la hoja centro-estable que contiene a  $\mathcal{C}$ . Si  $\mathcal{W}$  es una hoja estable, que intersecta a  $\mathcal{C}$ , queremos probar que la holonomía a lo largo de  $\mathcal{C}$  está bien definida en *toda* la hoja  $\mathcal{W}$ . Como todas las hojas centrales son compactas, todo punto sería periódico y con el Teorema de Montgomery 3.1 conseguiríamos probar que la holonomía a lo largo de  $\mathcal{C}$  es finita. Para dos foliaciones transversales cualesquiera, esto podría ser imposible.

Vamos a usar la dinámica (la contracción de  $\mathcal{W}$  cuando se itera por  $f$ ) para acercar las hojas centrales a  $\mathcal{C}$  (a sus iterados) y de alguna manera usar la continuidad de la foliación para definir el primer retorno a  $\mathcal{W}$ . Además, vamos a necesitar algún tipo de recurrencia para  $\mathcal{C}$  y sus iterados: iterando podríamos perder toda la información acerca de  $\mathcal{C}$  y al iterar hacia atrás no obtendríamos nada.

Esto de iterar y acercar, sin embargo, solo puede funcionar en

$$\mathcal{W}^s(\mathcal{C}) = \bigcup_{x \in \mathcal{C}} \mathcal{W}^s(x);$$

el resto de la hoja centro-estable puede quedarse *lejos*.

Pero nos encontramos con una dificultad:  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$  no tiene por qué estar saturada por hojas centrales. Podría tener *borde* en  $\mathcal{W}^{cs}(\mathcal{C})$ .

En esta sección asumiremos que este borde es vacío y probaremos el resto del teorema. Dejamos la prueba de que el borde es vacío para la última sección.

Observamos que en esta sección no se hace ninguna suposición acerca de la dimensión de los fibrados estable e inestable.

## 5.1. Existencia de una hoja volumen recurrente

Sea  $\mathcal{C}$  una hoja de la foliación central. Decimos que  $\mathcal{C}$  es volumen recurrente si

$$\inf_{n \in \mathbb{Z}} \text{vol} f^n(\mathcal{C}) < \infty.$$

Vamos a probar que existe al menos una hoja central en el conjunto malo que es volumen recurrente. Vamos a usar la dinámica para estudiar la holonomía de una foliación y podría ser que iterando perdiéramos control sobre la hoja (sus iterados). Al encontrar una hoja volumen recurrente, podremos hablar de holonomía en términos de longitud (y abusar de 2.11).

Si existe alguna hoja central  $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$  periódica, entonces no hay nada que probar (y se puede saltar esta sección).

Si no existiera dicha hoja, procedemos como sigue. Recurriremos a varios resultados de teoría ergódica. Todos pueden ser consultados en [Mn].

Sea  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio medible y  $f : X \rightarrow X$  una función medible. Decimos que la medida  $\mu$  es  $f$ -invariante si

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$$

para todo  $A \in \mathcal{A}$ .

**Teorema 5.1.** *Si  $f$  es una función continua en un espacio métrico compacto  $X$ , entonces existe  $\mu$  una medida de probabilidad en los borelianos de  $X$  que es  $f$ -invariante.*

El siguiente resultado es clásico en teoría ergódica. Junto con el teorema anterior, nos proporcionarán las herramientas para probar la existencia de una hoja volumen recurrente.

**Teorema 5.2** (Recurrencia de Poincaré). *Sea  $f : X \rightarrow X$  medible, que preserve una medida de probabilidad  $\mu$ . Sea  $E$  medible, tal que  $\mu(E) > 0$ . Entonces casi todo punto de  $E$  vuelve a  $E$  infinitas veces.*

Ahora aplicaremos los resultados anteriores para probar la existencia de una hoja central volumen recurrente.

**Proposición 5.3.** *Si el conjunto malo  $\mathcal{B}$  es no vacío, entonces contiene una hoja central  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{B}$  que es volumen recurrente.*

*Demostración.* El conjunto  $\mathcal{B}$  es cerrado en  $M$ , y por lo tanto compacto. Además, está saturado por hojas centrales.

Podemos dar a  $\mathcal{B}$  la métrica inducida por la métrica de  $M$  y existirá por lo tanto una medida de probabilidad  $\mu$  en  $\mathcal{B}$  que es  $f$ -invariante.

Si definimos  $\mathcal{B}_L = \{x \in \mathcal{B} : \text{long}(\mathcal{W}^c(x)) \leq L\}$ , entonces se cumple que

$$\mathcal{B} = \bigcup_{L \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_L,$$

y por lo tanto existe un  $L > 0$  tal que  $\mu(\mathcal{B}_L) > 0$ .

Por el teorema de recurrencia de Poincaré, existe (al menos) un punto de  $\mathcal{B}_L$  que vuelve a  $\mathcal{B}_L$  infinitas veces. La hoja central  $\mathcal{C}$  por  $x$  será por lo tanto volumen recurrente.

Existe  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $n_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$ , y tal que  $f^{n_k}(x) \in \mathcal{B}_L$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Como  $\mathcal{B}_L$  está saturado por hojas centrales, se cumplirá también que  $f^{n_k}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}_L$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .  $\square$

## 5.2. Reducción del problema

Dada una hoja central  $\mathcal{C}$  y un punto  $x \in \mathcal{W}^s(\mathcal{C})$ , la hoja estable por  $x$  podría intersectar a  $\mathcal{C}$  más de una vez (podría ser finitas o numerables veces). Vamos a pasar a un *cubrimiento* de  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$  de forma que dichas intersecciones sean únicas. Esto nos permitirá definir un mapa de holonomía para el *levantado* de  $\mathcal{C}$ , que luego probaremos que es trivial.

La siguiente construcción vale para cualquier hoja central.

Consideremos el espacio

$$\widehat{\mathcal{W}^s(\mathcal{C})} = \{(x, p) : x \in \mathcal{W}^s(\mathcal{C}), p \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}^s(x)\}.$$

Sea  $x$  es un punto de  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$  y  $p \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}^s(x)$ . Fijemos  $\gamma$  un camino en  $\mathcal{W}^s(x)$  con  $\gamma(0) = x$  y  $\gamma(1) = p$ , y  $U$  un pequeño entorno de  $x$  en  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$ . Si  $y$  es un punto en  $U$ , entonces podemos *seguir*  $\mathcal{W}^s(y)$  a lo largo de  $\gamma$  hasta  $\mathcal{C}$ , obteniendo así un mapa continuo  $\hat{\cdot} : U \rightarrow \mathcal{C}$  bien definido (el mapa que a cada punto  $y$  de  $U$  asigna  $\mathcal{W}^s(y) \cap \mathcal{C}$ ).

Esto nos permite definir

$$\varphi : U \rightarrow \widehat{\mathcal{W}^s(\mathcal{C})},$$

$$y \mapsto (y, \hat{y}),$$

y así  $\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$  hereda la estructura diferenciable y la métrica Riemanniana de  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$ .

Si definimos

$$\begin{aligned} p : \widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}}) &\rightarrow \mathcal{W}^s(\mathcal{C}), \\ (x, p) &\mapsto x \end{aligned}$$

la proyección sobre la primera coordenada, entonces  $p$  es una isometría local.

Existen por lo tanto foliaciones  $\widehat{\mathcal{W}}^s$  y  $\widehat{\mathcal{W}}^c$  en  $\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$  que se proyectan localmente sobre las foliaciones estable y central respectivamente.

Para cada  $x \in \mathcal{C}$ , la hoja estable  $\mathcal{W}^s(x)$  levantará a  $\#\mathcal{W}^s(x) \cap \mathcal{C}$  hojas estables  $\widehat{\mathcal{W}}^s((x, p)) = (\mathcal{W}^s(x), p)$ , por lo que  $\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$  estará saturado por hojas estables, y más aún, si definimos

$$\widehat{\mathcal{C}} = \{(x, x) : x \in \mathcal{C}\},$$

entonces

$$\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}}) = \bigsqcup_{x \in \widehat{\mathcal{C}}} \widehat{\mathcal{W}}^s(x),$$

unión disjunta de hojas estables.

Si  $\epsilon > 0$  es lo suficientemente pequeño para que  $U = \mathcal{W}^s(\mathcal{C}, \epsilon)$  sea un fibrado sobre  $\mathcal{C}$  (donde las fibras son placas estables), entonces  $p(U \times \mathcal{C}) = U$  es un difeomorfismo.

Es importante notar que esto último implica que todas las propiedades locales de  $\widehat{\mathcal{C}}$  se traducirán en (las mismas) propiedades locales de  $\mathcal{C}$ .

Debemos remarcar varias cosas.

- I. En este espacio cada hoja estable va a intersectar a  $\widehat{\mathcal{C}}$  en un único punto.
- II. Si bien  $p$  es un difeomorfismo local, puede no ser un cubrimiento.

### El borde accesible

Para cada  $x \in \widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$ , la hoja central por  $x$  puede ser un círculo completo o un arco  $\alpha_x : (0, 1) \rightarrow \widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$ . En este caso, podemos completar  $\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$  con dos puntos  $\alpha_x(0)$  y  $\alpha_x(1)$  y definir

$$\partial \widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}}) = \bigcup_{\widehat{W}^c(x) \simeq (0,1)} \{\alpha_x(0), \alpha_x(1)\}.$$

Definimos la clausura de  $\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$  como

$$\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})^{cl} = \widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}}) \cup \partial\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$$

con la siguiente métrica: si  $p = \alpha_x(0)$  y  $q = \alpha_y(0)$  para ciertos  $x$  e  $y$ , entonces definimos  $d(p, q) = \lim_{t \rightarrow 0} d(\alpha_x(t), \alpha_y(t))$ . A la extensión de  $d$  a la clausura le llamamos  $\hat{d}$ .

Se puede probar que el espacio  $\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})^{cl}$  con la métrica  $\hat{d}$  es la completación métrica de  $\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$ .

De la misma manera que definimos  $\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$  definimos  $\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{f^n\mathcal{C}})$ , su borde accesible y su clausura.

A continuación veremos que el borde accesible tiene estructura, y que extiende a la foliación estable. Esta es una prueba de [BW] adaptada a nuestro problema.

**Lema 5.4.** *El borde accesible de  $\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$  tiene estructura de variedad sin borde. Más aún, podemos pensar  $\partial\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$  como una extensión de la foliación estable.*

*Demostración.* La transversalidad de los fibrados estable, central e inestable nos permite elegir un cubrimiento finito de  $M$  por abiertos, todos de diámetro mayor que algún  $\epsilon > 0$ , de forma que cada uno de esos abiertos tenga estructura de producto estable por central por inestable.

Sea  $x \in \partial\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$  y sea  $y \in \widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$  de forma que  $d(x, y) < \epsilon/2$ . El punto  $p(y) \in M$  pertenece a algún abierto  $U$  del cubrimiento anterior, de diámetro mayor que  $\epsilon$ . Podemos pensar  $U$  en  $\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$  (fijando alguna coordenada inestable).

Obtenemos un sistema de coordenadas continuo

$$\phi : U \rightarrow [-1, 1] \times [-1, 1],$$

tal que los segmentos de hojas estables vayan por  $\phi$  a segmentos verticales  $\{s\} \times [-1, 1]$  y los segmentos de hojas centrales vayan por a segmentos horizontales  $[-1, 1] \times \{t\}$  y tal que  $\phi(x) = (0, 0)$ .

El mapa  $\phi$  extiende  $\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$  más allá de su borde. Podemos pensar que por  $x$  pasa un disco estable. Ahora veremos que todo este disco está contenido en el borde.

Existe  $\alpha$  una curva contenida en  $\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$  tal que  $\alpha(1) = x$ . Achicando  $U$  si fuera necesario, podemos suponer que todos los segmentos verticales de  $U$

de la forma  $\{s\} \times [-1, 1]$ , para  $s \in (0, 1]$  cortan a  $\phi \cdot \alpha$ . Podemos pensar que puntos de la forma  $\{-s\} \times [-1, 1]$  se corresponden con puntos *más allá* del borde.

Se cumple que  $(0, s) \times \{t\} \subset \widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$ , para todo  $s \in (0, 1)$  y  $t \in [-1, 1]$ , y los puntos de la forma  $(0, t)$  no están en  $\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$ . Entonces el segmento de hoja estable por  $x$  en  $U$  está contenido en el borde accesible de  $\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$ .

Podemos seguir extendiendo esta construcción, ya que el tamaño de los entornos del cubrimiento es uniforme. Obtenemos que la "hoja estable" entera  $\widehat{\mathcal{W}}^s(x)$  está contenida en el borde accesible de  $\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$ .  $\square$

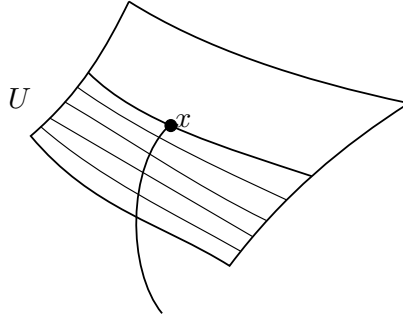


Figura 5.1: vista local del borde

De la construcción que hicimos es inmediato: que el borde accesible sea vacío es equivalente a que  $\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$  esté saturado por hojas centrales.

De ahora en más notaremos por  $\widehat{\mathcal{W}}^s(a)$  a la componente del borde accesible de  $\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$  que contiene a  $a$ .

### La dinámica

Habiendo definido  $\widehat{\mathcal{W}}^s(f^n \mathcal{C})$  para todos los iterados de  $\mathcal{C}$ , podemos definir el *levantado* (no realmente) de  $f$ .

Definimos

$$\begin{aligned} \hat{f} : \widehat{\mathcal{W}}^s(f^{n-1} \mathcal{C}) &\rightarrow \widehat{\mathcal{W}}^s(f^n \mathcal{C}), \\ (x, q) &\mapsto (f(x), f(q)). \end{aligned}$$

Tanto  $f$  como  $\hat{f}$  se extienden a sus respectivas clausuras. Obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}}) & \xrightarrow{\hat{f}} & \widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{f(\mathcal{C})}) \dots \\
\downarrow p & & \downarrow p \\
\mathcal{W}^s(\mathcal{C}) & \xrightarrow{f} & \mathcal{W}^s(f(\mathcal{C})) \dots
\end{array}$$

Las nuevas foliaciones estable e inestable son transversales y orientables, y si bien  $\hat{f}$  no está definido en una variedad ambiente, sí siguen valiendo las propiedades dinámicas cuando se itera por  $\hat{f}$ . Si  $x \in \widehat{\mathcal{W}}^s(p)$ , entonces  $\hat{d}(\hat{f}^n x, \hat{f}^n p) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ .

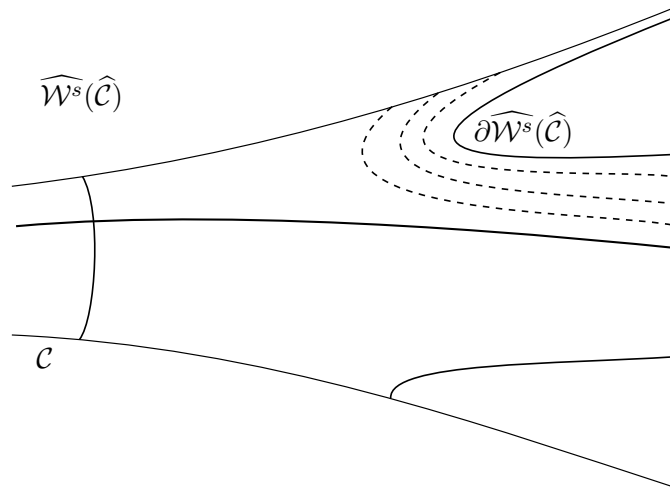


Figura 5.2: El levantado de  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$

### 5.3. Enunciado

La prueba del teorema 1.1 se basa en la siguiente proposición; la usaremos para probar el teorema y dejaremos la prueba para más adelante.

**Proposición 5.5.** *Sea  $f : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo parcialmente hiperbólico, dinámicamente coherente, con foliación central de dimensión uno y compacta, tal que  $\dim E^s \leq 2$  y  $\dim E^u \leq 2$ .*

*Entonces si  $\mathcal{C}$  es una hoja central volumen recurrente, el borde accesible de  $\widehat{\mathcal{W}}^\sigma(\widehat{\mathcal{C}})$ ,  $\sigma = s, u$  es vacío.*



#### 5.4. La proyección de holonomía

Dedicaremos esta sección a probar que si el borde accesible de  $\widehat{\mathcal{W}}^\sigma(\widehat{\mathcal{C}})$  es vacío, entonces la holonomía de  $\widehat{\mathcal{C}}$  en  $\widehat{\mathcal{W}}^\sigma(\widehat{\mathcal{C}})$  es finita, para  $\sigma = s, u$ .

En adelante trabajaremos sobre  $\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$ , pero lo análogo vale para  $\widehat{\mathcal{W}}^u(\widehat{\mathcal{C}})$ . Nos olvidamos de los  $\widehat{\cdot}$  para evitar la muerte por notación.

Sea  $x \in \mathcal{C}$  y un punto  $y \in \mathcal{W}^s(x)$ . La hoja central por  $y$  no tiene por qué estar completamente contenida en  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$ . Definimos  $\mathcal{C}_y = \mathcal{W}^c(y) \cap \mathcal{W}^s(\mathcal{C})$ , el arco central por  $y$  contenido en  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$ .

Cada  $\mathcal{C}_y$  puede ser una hoja central completa (si esta está contenida completamente en la saturación estable de  $\mathcal{C}$ ) o un arco homeomorfo a un intervalo abierto.

Definimos la *proyección de holonomía centro-estable* como el mapa

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{y \rightarrow x} : \mathcal{C}_y &\rightarrow \mathcal{C}, \\ z &\mapsto \mathcal{W}^s(z) \cap \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Este mapa está bien definido ya que el levantamiento fue construido para que  $\mathcal{W}^s(x) \cap \mathcal{C}$  sea un único punto.

Además la invariancia de las foliaciones hace que la holonomía conmute con la dinámica. Eso es, que

$$f \cdot \mathcal{H}_{y \rightarrow x} = \mathcal{H}_{f(y) \rightarrow f(x)} \cdot f.$$

**Proposición 5.6.** *Si  $\mathcal{C}_y = \mathcal{W}^c(y)$ , entonces la proyección de holonomía  $\mathcal{H}_{y \rightarrow x} : \mathcal{C}_y \rightarrow \mathcal{C}$  es un cubrimiento con una cantidad finita de hojas.*

*Demostración.* La proyección de holonomía conmuta con la dinámica, por lo que es suficiente probar que existe un  $n$  tal que  $\mathcal{H}_{f^n(y) \rightarrow f^n(x)} : \mathcal{C}_{f^n(y)} \rightarrow f^n(\mathcal{C})$  es un cubrimiento finito.

La hoja central por  $y$  es compacta y está contenida en  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$ ; por lo tanto existe un  $R > 0$  tal que  $\mathcal{C}_y \subset \mathcal{W}^s(\mathcal{C}, R)$ .

Como la foliación estable es transversal a la central, podemos considerar  $\epsilon$  lo suficientemente chico para que  $\mathcal{W}^s(f^n(\mathcal{C}), \epsilon)$  sea un fibrado sobre  $f^n(\mathcal{C})$  con fibras pequeñas placas estables, para todo  $n \geq 0$ . Esto es posible debido a la compacidad de  $M$  y la estructura de producto de las foliaciones central y estable dentro de cada hoja centro-estable

Iterando obtenemos que  $f^N(\mathcal{C}_y) \subset f^N(\mathcal{W}^s(\mathcal{C}, R)) \subset \mathcal{W}^s(\mathcal{C}, \epsilon)$  para algún  $N > 0$ .

La hoja  $\mathcal{C}_{f^N(y)}$  es un encaje de  $S^1$  en el fibrado  $\mathcal{W}^s(f^N(\mathcal{C}), \epsilon)$ , transversal a la fibra, y esto implica que  $\mathcal{H}_{f^N(x) \rightarrow f^N(y)}$  es un cubrimiento. Además, como  $\mathcal{C}_f^N(y)$  es un círculo, tiene longitud finita, y por lo tanto el cubrimiento tiene que ser finito.  $\square$

**Observación 5.7.** *Notar que con el mismo razonamiento (pero iterando hacia el pasado) obtenemos el mismo resultado para la proyección análoga  $\mathcal{H}_{y \rightarrow x}$  en  $\mathcal{W}^u(\mathcal{C})$ .*

Fijemos una orientación para la foliación central en  $\mathcal{W}^s\mathcal{C}$  y supongamos que  $\mathcal{C}$  es tal que  $\partial\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$  es vacío. Esto es equivalente a que  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$  esté saturado por hojas centrales.

La proposición anterior nos dice que en ese caso, el mapa

$$h(\mathcal{C}) : \mathcal{W}^s(p) \rightarrow \mathcal{W}^s(p)$$

que a cada punto asigna su primer retorno a  $\mathcal{W}^s(p)$  está bien definido en toda la variedad estable por  $p$  (un punto cualquiera de  $\mathcal{C}$ ).

La continuidad de la foliación central asegura que  $h$  es un homeomorfismo de  $\mathcal{W}^s(p)$ .

La hoja  $\mathcal{C}$  es un círculo, y por lo tanto  $\pi_1(\mathcal{C}) = \mathbb{Z}$ . El homeomorfismo  $h$  genera al grupo  $\text{Hol}^s(\mathcal{C})$  (definido en la proposición 4.2).

La proyección de holonomía de cualquier hoja central sobre  $\mathcal{C}$  es un cubrimiento finito; esto implica que existe  $k \geq 1$  tal que  $h^k(y) = y$ . Obtenemos lo siguiente.

**Proposición 5.8.** *Si  $\mathcal{C}$  es tal que  $\partial\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$  es vacío, entonces  $\text{Hol}^s(\mathcal{C})$  es un grupo finito.*

*Demostración.* Todos los puntos son periódicos por  $h$  y el teorema de Montgomery 3.1 implica que  $h$  es un homeomorfismo periódico.

Luego existe  $K > 0$  tal que  $h^K = h$ , y esto implica que  $\text{Hol}^s(\mathcal{C}) = \{h, \dots, h^K\}$ .  $\square$

Volviendo a los  $\widehat{\cdot}$ , obtuvimos que si  $\widehat{\mathcal{W}^s(\widehat{\mathcal{C}})}$  está saturada por hojas centrales, entonces la holonomía centro-estable de  $\widehat{\mathcal{C}}$  es finita.

## 5.5. La prueba del teorema

Para completar la prueba, hace falta probar que lo que obtuvimos para el levantamiento baja a  $M$ .

**Proposición 5.9.** *Si  $\widehat{\mathcal{C}}$  tiene holonomía centro-estable finita en  $\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$ , entonces la holonomía centro-estable de  $\mathcal{C}$  es finita.*

*Demostración.* La prueba es sencilla; si la holonomía centro-estable de  $\widehat{\mathcal{C}}$  es finita, entonces el teorema de estabilidad de Reeb dice que existen entornos de  $\widehat{\mathcal{C}}$  en  $\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$  arbitrariamente pequeños, saturados por la foliación central de forma que cada hoja  $\mathcal{L}$  en dichos entornos cubre a  $\widehat{\mathcal{C}}$  con una cantidad finita de hojas.

Vimos antes que  $\widehat{\mathcal{C}}$  tiene un entorno  $U$  en  $\widehat{\mathcal{W}}^s(\widehat{\mathcal{C}})$  que es difeomorfo al entorno  $p(U) \subset \mathcal{W}^s(\mathcal{C})$  (que contiene a  $\mathcal{C}$ ). Tomando algún entorno de la estabilidad suficientemente pequeño para estar contenido en  $U$ , podemos suponer que  $p(U)$  es un entorno de  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$  saturado por hojas centrales.

El orden del grupo de holonomía centro-estable de  $\mathcal{C}$  debe ser finito: alcanza definir un generador  $h$  en una transversal contenida en el entorno  $p(U)$  saturado. Todos los puntos deben ser periódicos (si no contradiría la compacidad de las hojas) y por lo tanto  $h$  es (por el teorema de Montgomery) un homeomorfismo periódico.  $\square$

**Teorema 5.10.** *Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo parcialmente hiperbólico, dinámicamente coherente, con foliación central compacta de dimensión 1. Supongamos que  $\dim E^s \leq 2$  y que  $\dim E^u \leq 2$ .*

*Entonces la longitud de las hojas centrales es uniformemente acotada en  $M$ .*

*Demostración.* Supongamos que el conjunto malo  $\mathcal{B}$  de puntos donde long no es localmente acotada es no vacío. Existe entonces  $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$  una hoja volumen recurrente. Para esta hoja  $\mathcal{C}$  o bien el grupo  $\text{Hol}^s(\mathcal{C})$  o bien  $\text{Hol}^u(\mathcal{C})$  no es finito. Al que corresponda lo notamos con  $\sigma$ .

Sea  $\partial\widehat{\mathcal{W}}^\sigma(\widehat{\mathcal{C}})$  el borde accesible de  $\widehat{\mathcal{W}}^\sigma(\widehat{\mathcal{C}})$ . Por la proposición 5.5,  $\partial\widehat{\mathcal{W}}^\sigma(\widehat{\mathcal{C}})$  es vacío, y por lo tanto  $\widehat{\mathcal{W}}^\sigma(\widehat{\mathcal{C}})$  está saturado por hojas centrales.

Esto implica (usando la proposición 5.4) que el grupo de holonomía  $\text{Hol}^\sigma\widehat{\mathcal{C}}$  es finito, y por lo tanto el grupo de holonomía centro-estable (o centro-inestable) de  $\mathcal{C}$  también lo será.

Si  $\dim E^\sigma = 1$ , para  $\sigma = s$  o  $\sigma = u$ , entonces no hace falta pasar al levantamiento. El grupo de holonomía centro-estable (o centro-inestable) será trivial: lo probamos para el caso de codimensión dos.

Usando el resultado de la proposición 4.2 obtenemos que el grupo de holonomía  $\text{Hol}(\widehat{\mathcal{C}})$  es finito.

La proposición 3.4 implica que existe un  $K, L > 0$  tal que si  $y \in p(V)$ , entonces

$$\text{vol}(W^c(y)) \leq K \text{vol}(\mathcal{C}) + L.$$

Pero esto es una contradicción, ya que  $\mathcal{C}$  era una hoja contenida en el conjunto malo. Concluimos que  $\mathcal{B}$  es vacío y que por lo tanto, el volumen de las hojas centrales es uniformemente acotado en  $M$ .  $\square$

## 6. El borde accesible es vacío

De ahora en más trabajaremos siempre asumiendo que  $\mathcal{C}$  es una hoja volumen recurrente. Sea  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$  su saturación estable y  $\widehat{\mathcal{W}^s(\mathcal{C})}$  como en la sección 5.2,  $\partial\widehat{\mathcal{W}^s(\mathcal{C})}$  su borde accesible.

Probaremos que bajo ciertas hipótesis, el borde accesible de  $\widehat{\mathcal{W}^s(\mathcal{C})}$  es vacío.

En la sección anterior probamos que esto implica que el grupo de holonomía centro estable de  $\mathcal{C}$  es finito. Haciendo lo mismo para  $\mathcal{W}^u(\mathcal{C})$  habremos probado que el volumen de las hojas centrales es uniformemente acotado.

Como antes, obviamos los  $\widehat{\cdot}$ .

### 6.1. El mapa de holonomía

En 5.4 probamos que si  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$  está saturado por hojas centrales, entonces podemos describir la holonomía central de  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$  mediante un mapa  $h : \mathcal{W}^s(p) \rightarrow \mathcal{W}^s(p)$  bien definido. Veremos primero el mapa  $h$  está bien definido, aunque  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$  no esté saturado por hojas centrales.

La prueba se basa en la proposición 2.11.

Sea  $y_0 \in \mathcal{W}^s(\mathcal{C})$  un punto tal que la hoja central por él no esté contenida en  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$ . Sea  $\mathcal{C}_{y_0}$  el arco central por  $y_0$ . Sea  $x = \mathcal{W}^s(y_0) \cap \mathcal{C}$ . Recordamos el mapa de proyección de holonomía

$$\mathcal{H}_{y_0 \rightarrow x} : \mathcal{C}_{y_0} \rightarrow \mathcal{C},$$

$$z \mapsto \mathcal{W}^s(z) \cap \mathcal{C}.$$

Dados dos puntos  $p$  y  $q$  en la misma hoja central, notaremos por  $(p, q)^c$  al arco orientado entre  $p$  y  $q$  contenido en la hoja central.

**Proposición 6.1.** *El mapa  $\mathcal{H}_{y_0 \rightarrow x} : \mathcal{C}_{y_0} \rightarrow \mathcal{C}$  es un cubrimiento con una cantidad numerable de hojas.*

*Demostración.* Sea  $\gamma \subset \mathcal{C}$  una curva tal que  $\pi_1(\mathcal{C})$  esté generado por  $[\gamma] \in \pi_1(\mathcal{C})$ .

Sea  $\epsilon > 0$  tal que  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C}, \epsilon)$  tenga estructura de fibrado con base  $\mathcal{C}$  y fibra placas estables por  $\mathcal{C}$ , para todo  $n \geq 0$ .

Como  $\mathcal{C}$  es volumen recurrente, podemos tomar una sucesión creciente  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $\text{long}(f^{n_k} \mathcal{C}) < C$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$  y un cierto  $C > 0$ .

Fijemos  $m > 0$ . La hoja  $\mathcal{C}$  y sus iterados tienen todos longitud menor o igual a  $C$ . Sea  $R = 2Cm$ . La proposición 2.11 dice que existe  $\delta > 0$  global en  $M$  tal que si  $d(x, z) < \delta$ , entonces el mapa de holonomía está definido a lo largo de la hoja por  $x$  durante longitud  $R$ . Por cómo elegimos  $R$  y  $\epsilon$ , esto último significa que si  $z \in \mathcal{W}^s(x, \epsilon)$  entonces la hoja central por  $z$  pasa al menos  $2m$  veces por  $\mathcal{W}^s(x, \epsilon)$  antes de salir del fibrado ( $m$  recorriendo  $\mathcal{C}$  en una dirección,  $-m$  en la contraria). Pero este razonamiento vale en  $M$ .

Para pasar a los correspondientes levantados, solamente notamos que  $\widehat{\mathcal{C}}$  y sus iterados tienen un entorno difeomorfo a un entorno de  $\mathcal{C}$  y sus iterados (respectivamente). Estos entornos pueden tomarse de tamaño uniforme; podemos tomar el  $\epsilon$  de antes.

Concluimos que existe  $\delta_m > 0$  tal que si  $z \in \mathcal{W}^s(f^{n_k}\mathcal{C}, \delta_m)$ , entonces la curva  $f^{n_k} \cdot \gamma^m$  levanta a  $(z, z_m)^c$  un segmento de  $\mathcal{W}^c(z)$  en  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C}, \epsilon)$ , para cualquier  $k \geq 0$ . Lo mismo vale para  $f^{n_k} \cdot \gamma^{-m}$ .

Ahora, sea  $m > 0$  e  $K > 0$  para que  $z = f^{n_K}(y_0) \in \mathcal{W}^s(f^{n_K}(\mathcal{C}), \delta_m)$ . Por el lema, las curvas  $f^{n_K} \cdot \gamma^m$  y  $f^{n_K} \cdot \gamma^{-m}$  levantan a segmentos centrales  $(z, z_m)^c$  y  $(z_{-m}, z)^c$  respectivamente.

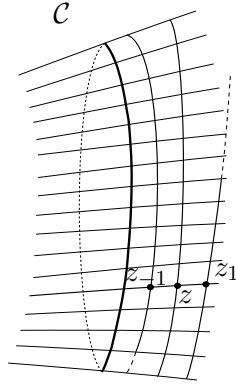


Figura 6.1: Fibrado por hojas estables sobre  $\mathcal{C}$  y el segmento central  $(z_{-1}, z_1)^c$

Volviendo por  $f^{-n_K}$  obtenemos que  $\gamma^m$  y  $\gamma^{-m}$  levantan por  $\mathcal{H}_{y_0 \rightarrow x}$  a arcos centrales  $(y_0, y_m)^c$  y  $(y_{-m}, y_0)^c$ . Podemos definir la sucesión  $\{y_m : m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{C}_{y_0}$ .

El difeomorfismo  $f$  preserva la orientación de cada hoja central, y por lo tanto las sucesiones  $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$  y  $(y_{-m})_{m \in \mathbb{N}}$  son monótonas en  $\mathcal{C}_{y_0}$ , por lo que podemos definir  $a = \lim_{m \rightarrow \infty} y_{-m}$  y  $\chi(a) = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m$ .

De la construcción de la sucesión  $\{y_m\}$  es claro que el mapa  $\mathcal{H}_{y_0 \rightarrow x} : (a, \chi(a))^c \rightarrow \mathcal{C}$  es un cubrimiento con una cantidad numerable de hojas.

**Afirmación.** *Se cumple que  $(a, \chi(a))^c = \mathcal{C}_{y_0}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $a \in \mathcal{W}^s(\mathcal{C})$  y sea  $n > 0$  tal que  $f^n(a) \in \mathcal{W}^s(f^n(\mathcal{C}), \epsilon)$ . Entonces existe un entorno de  $f^n(a)$  en  $\mathcal{C}_{f^n(a)}$  tal que contiene a lo más un punto de  $\mathcal{H}_{f^n(y) \rightarrow f^n(p)}^{-1}(f^n(p))$ , y por lo tanto  $f^n(a)$  no puede ser de acumulación de  $\mathcal{H}_{f^n(y) \rightarrow f^n(p)}^{-1}(f^n(p))$ , y por lo tanto  $a$  tampoco de  $(y_m)$ .

Por lo tanto  $a$  no está en  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$  y análogamente lo probamos para  $\chi(a)$ . Concluimos que  $(a, \chi(a)) = \mathcal{C}_y$ .  $\square$

Esto termina la prueba.  $\square$

De ahora en más fijamos el punto  $y_0$ , un punto cuya hoja central no está completamente contenida en  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$ .

Si  $X$  es el campo tangente a la foliación central, positivamente orientado, podemos considerar el flujo asociado, y la proposición anterior nos permite definir el siguiente mapa de holonomía:

$$h : \mathcal{W}^s(y_0) \rightarrow \mathcal{W}^s(y_0),$$

$$z \mapsto z_1,$$

el mapa de *primer retorno* a  $\mathcal{W}^s(y_0)$ .

Para ver que está bien definido, debemos considerar dos casos. El primero, cuando  $z$  es un punto en  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$  tal que  $\mathcal{C}_z = \mathcal{W}^c(z)$ ; en este caso el mapa  $\mathcal{H}_{z \rightarrow p} : \mathcal{W}^c(z) \rightarrow \mathcal{C}$  es un cubrimiento finito, y por lo tanto está bien definido el primer retorno.

Para puntos cuya hoja central no está completamente contenida en  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$ , definimos  $h(z) = z_1$ , siendo  $z_1$  como en la proposición.

Además, el mapa  $h$  así definido es continuo, ya que la foliación central es continua.  $h : \mathcal{W}^s(y_0) \rightarrow \mathcal{W}^s(y_0)$  es un homeomorfismo.

Ganamos si probamos que es un homeomorfismo periódico. Para esto, vemos que alcanza probar que el borde accesible es vacío (que  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$  está saturado por hojas centrales).

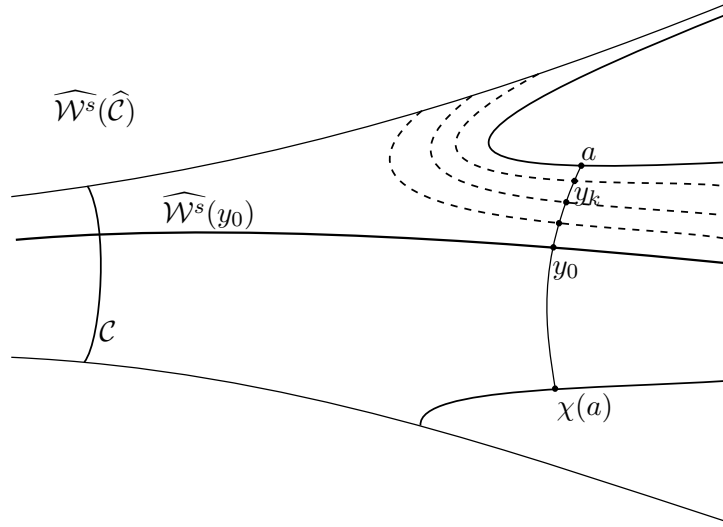


Figura 6.2: La sucesión  $\{y_m\}$

## 6.2. Estructura topológica $\widehat{\mathcal{W}}^s(y_0)$

Acabamos de ver que el punto  $y_0$  determina de forma única al punto  $a$  en  $\partial\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$ .

Para cualquier  $p \in \mathcal{W}^s(a)$  existe un  $\hat{p}$  de forma que el arco  $(p, \hat{p})^c$  está contenido en  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$ , y podemos considerar el punto  $\chi(p) \in \partial\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$  de forma tal que  $\mathcal{C}_{\hat{p}} = (p, \chi(p))^c$ .

Definimos el mapa  $\chi$  de esta forma,

$$p \mapsto \chi(p).$$

La continuidad de la foliación central nos asegura que dicho mapa es continuo.

**Proposición 6.2.** Si  $p \in \mathcal{W}^s(a)$ , entonces  $\mathcal{W}^s(\chi(a)) = \mathcal{W}^s(\chi(p))$  y el mapa

$$\mathcal{W}^s(a) \mapsto \mathcal{W}^s(\chi(a)),$$

$$p \mapsto \chi(p)$$

es un homeomorfismo.

*Demostración.* Es claro que el mapa es inyectivo.

Cada punto  $p \in \mathcal{W}^s(a)$  tiene un entorno  $V$  que es homeomorfo a  $V'$ , un entorno de  $\chi(p)$  en  $\mathcal{W}^s(\chi(p))$ .



Si  $y \in \mathcal{W}^s(a)$  y definimos  $\mathcal{U}_y = \{x \in \mathcal{W}^s(a) : \mathcal{W}^s(\chi(x)) = \mathcal{W}^s(\chi(y))\}$ , entonces cada  $\mathcal{U}_y$  es abierto y podemos escribir

$$\mathcal{W}^s(a) = \bigcup_{y \in \mathcal{W}^s(a)} \mathcal{U}_y,$$

una unión disjunta (si obviamos las repeticiones) de conjuntos abiertos. Como  $\mathcal{W}^s(a)$  es conexa, tiene que ser  $\mathcal{W}^s(a) = \mathcal{U}_a$ .

El mismo argumento prueba que el mapa  $p \mapsto \chi(p)$  es también sobreyectivo, y por lo tanto un homeomorfismo.  $\square$

Fijado  $y_0$  y por lo tanto  $a$ , definimos

$$\mathcal{V} = \bigcup_{x \in \mathcal{W}^s(a)} (x, \chi(x))^c.$$

El conjunto  $\mathcal{V}$  es abierto y es claro que es un fibrado trivial con base  $\mathcal{W}^s(a)$ , y cuyas fibras son arcos centrales de la forma  $(p, \chi(p))^c$ .

**Proposición 6.3.** *Dado un camino  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{W}^s(a)$  y un punto  $z_0 \in (\alpha(0), \chi(\alpha(0)))^c \cap \mathcal{W}^s(y_0)$  existe un único levantado  $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{W}^s(y_0)$  tal que  $\tilde{\alpha}(0) = z_0$  y  $\tilde{\alpha}(t) \in (\alpha(t), \chi(\alpha(t)))^c$ . Además, si  $\alpha$  es una curva cerrada, entonces  $\tilde{\alpha}$  también lo es.*

*Demostración.* La transversalidad de las foliaciones nos da la existencia y unicidad del levantado  $\tilde{\alpha}$ .

Supongamos que  $\alpha$  es un loop. Los puntos de intersección  $(\alpha(1), \chi(\alpha(1)))^c \cap \mathcal{W}^s(y_0)$  son los puntos  $(z_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ . Esto implica que  $\alpha(1)$  será  $z_k$  para algún  $k$ . Supongamos por un momento que  $k \neq 0$ .

Consideremos  $\beta$  el loop  $\tilde{\alpha} \cdot (z_k, z_0)^c$ . Como la foliación estable es transversalmente orientable, podemos perturbar  $\beta$  a un loop  $\hat{\beta} \subset \mathcal{V}$  transversal a la foliación estable.

El loop  $\hat{\beta}$  está contenido en  $\mathcal{V}_R = \cup_{p \in \mathcal{W}^s(a, R)} (p, \chi(p))^c$  para un  $R$  lo suficientemente grande. El conjunto  $\mathcal{V}$  es homeomorfo a un disco y por lo tanto  $\hat{\beta}$  es contractible en  $\mathcal{V}_R$ .

Por otro lado, existe un  $\hat{R}$  tal que la contracción ocurre en  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C}, \hat{R})$ . Deslizándolo a lo largo de la foliación central, podemos hacer una homotopía entre  $\hat{\beta}$  y  $\gamma^{|k|}$ , donde  $\gamma$  es un generador de  $\pi_1(\mathcal{C})$ . Esto también puede verse iterando por  $f$ ; existe un  $n$  que hace que  $f^n(\hat{\beta}) \subset \mathcal{W}^s(f^n(\mathcal{C}), \epsilon)$ , un fibrado con base  $\mathcal{C}$  y fibra placas estables, para todo  $n \geq 0$ .

Pero esto es absurdo, ya que  $\gamma$  no tiene potencias homotopicamente triviales. Concluimos que  $\tilde{\alpha}$  es un loop si  $\alpha$  lo es.  $\square$

Recordemos que  $y_0$  está fijo, y que cuando probamos que el mapa de holonomía está bien definido definimos la sucesión  $\{y_m\}_{m \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{W}^s(y_0)$  de iterados por  $h^s$  de  $y_0$ . Notamos por  $\mathcal{U}_k$  a la componente conexa de  $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}^s(y_0)$  que contiene a  $y_k$ . Cada  $\mathcal{U}_k$  es abierto en  $\mathcal{W}^s(y_0)$ .

**Lema 6.4.** *Cada  $z \in \mathcal{W}^s(y_0) \cap \mathcal{V}$  está en algún  $\mathcal{U}_k$ .*

*Demostración.* El punto  $z$  está en  $\mathcal{V}$ , y por lo tanto existe  $p \in \mathcal{W}^s(a)$  tal que  $\mathcal{C}_z = (p, \chi(p))^c$ . Si  $\alpha \subset \mathcal{W}^s(a)$  es un camino con  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha(1) = a$  y elegimos  $\tilde{\alpha}(0) = z$ , entonces  $\tilde{\alpha}$  es un camino en  $\mathcal{W}^s(y_0) \cap \mathcal{V}$ , que además cumple que  $\tilde{\alpha}(y) = y_k$  para un cierto  $k$ .

En consecuencia,  $z \in \mathcal{U}_k$ .  $\square$

**Lema 6.5.** *Los conjuntos  $\mathcal{U}_k$  son disjuntos dos a dos.*

*Demostración.* Primero observamos que si  $\mathcal{U}_k \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$  para algún  $k \neq j$ , entonces tiene que ser  $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}_j$ .

Si  $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}_j$  entonces podemos tomar  $\tilde{\alpha} \subset \mathcal{U}_k$  un camino con  $\tilde{\alpha}(0) = y_k$  y  $\tilde{\alpha}(1) = y_j$ . Proyectando  $\tilde{\alpha}$  sobre  $\mathcal{W}^s(a)$ , obtenemos  $\alpha$  un loop que levanta a  $\tilde{\alpha}$ , que no es un loop, lo cual es absurdo.  $\square$

**Lema 6.6.** *El mapa  $h^s : \mathcal{W}^s(y_0) \rightarrow \mathcal{W}^s(y_0)$  permuta los conjuntos  $\mathcal{U}_k$ , es decir, se cumple que  $h^s(\mathcal{U}_k) = \mathcal{U}_{k+1}$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .*

*Demostración.* Para todo  $k \in \mathbb{Z}$  tenemos que  $h^s(y_k) = y_{k+1}$ , y si  $z$  es un punto de  $\mathcal{U}_k$ , sea  $\tilde{\alpha} \subset \mathcal{U}_k$  un camino desde  $y_k$  hasta  $z$ . El camino  $h^s(\tilde{\alpha})$  es un camino en  $\mathcal{W}^s(y_0) \cap \mathcal{V}$  que conecta  $y_{k+1}$  con  $h^s(z)$ , y por lo tanto  $h^s(\mathcal{U}_k) \subset \mathcal{U}_{k+1}$ .

Para ver que la inclusión es en realidad una igualdad, alcanza tomar un punto  $z \in \mathcal{U}_{k+1}$  y un camino  $\tilde{\beta} \subset \mathcal{U}_{k+1}$ , de  $y_{k+1}$  a  $z$ . El camino  $h^{s-1} \cdot \tilde{\beta}$  une  $y_k$  con  $z_{-1} = H^{-1}(z)$ .  $\square$

Si  $z$  es tal que  $\mathcal{C}_z \neq \mathcal{W}^c(z)$ , podemos considerar  $(p, \chi(p))^c$  el arco central por  $z$  y un entorno  $V$  de  $p$  en  $\mathcal{W}^s(p)$ . El conjunto  $\{(y, \chi(y))^c : y \in V\}$  es un entorno abierto de  $z$ , y por lo tanto el conjunto  $\mathcal{K} = \{x \in \mathcal{W}^s(y_0) : \mathcal{W}^c(x) \subset \mathcal{W}^s(\mathcal{C})\}$  es cerrado en  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$ .

**Proposición 6.7.** *El borde de cada  $\mathcal{U}_k$  en  $\mathcal{W}^s(y_0)$  es un subconjunto de  $\mathcal{K}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $z \in \mathcal{W}^s(y_0)$  es un punto del borde de  $\mathcal{U}_k$  para algún  $k$ . Si  $z \notin \mathcal{K}$ , repitiendo el argumento anterior, podemos encontrar un entorno  $V \subset \mathcal{W}^s(y_0)$  de  $z$  tal que para todo  $y \in V$  se cumpla que  $\mathcal{C}_y \neq \mathcal{W}^c(y)$ . Su cumple por o tanto que  $V \subset \mathcal{V} \cap \mathcal{W}^s(y_0)$  y como  $V \cap \mathcal{U}_k \neq \emptyset$ , debe ser  $V \subset \mathcal{U}_k$ . Esto contradice que  $z$  esté en el borde de  $\mathcal{U}_k$ .  $\square$

**Observación 6.8.** *La hoja estable  $\mathcal{W}^s(y_0)$  no es necesariamente la unión de  $\mathcal{K}$  y los conjuntos  $\mathcal{U}_k$ . Podría existir  $z_0 \in \mathcal{W}^s(y_0)$ , con  $\mathcal{C}_{z_0} \neq \mathcal{W}^s(z_0)$  y tal que los bordes del arco central por  $z_0$  están en componentes del borde accesible distintas a  $\mathcal{W}^s(a)$  y  $\mathcal{W}^s(\chi(a))$ .*

Si  $z$  es un punto de  $\mathcal{K}$ , definimos  $\text{per}(z)$  como el grado del cubrimiento  $\mathcal{H}_{z \rightarrow x} : \mathcal{W}^c(z) \rightarrow \mathcal{C}$ . Se cumple que  $h^{\text{per}(z)}(z) = z$ , y por lo tanto (recordar que  $\mathcal{K} \subset \mathcal{W}^s(y_0)$ ) el homeomorfismo  $h|_{\mathcal{K}}$  es puntualmente periódico.

**Lema 6.9.** *Si  $z \in \partial\mathcal{U}_k$ , entonces  $z \in \partial\mathcal{U}_{k+n\text{per}(z)}$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .*

*Demostración.* Por un lado,  $h^{n\text{per}(z)}(z) = z$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Por otro lado,  $h^{n\text{per}(z)}(\mathcal{U}_k) = \mathcal{U}_{k+n\text{per}(z)}$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

### 6.3. La prueba

Esta es la última prueba de este trabajo. Es el único lugar donde usamos la hipótesis sobre la dimensión de los fibrados estable e inestable.

**Proposición 6.10.** *Sea  $f : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo parcialmente hiperbólico, dinámicamente coherente, con foliación central de dimensión uno y compacta, tal que  $\dim E^s \leq 2$  y  $\dim E^u \leq 2$ .*

*Entonces si  $\mathcal{C}$  es una hoja central volumen recurrente, el borde accesible de  $\widehat{\mathcal{W}^\sigma(\mathcal{C})}$ ,  $\sigma = s, u$  es vacío.*

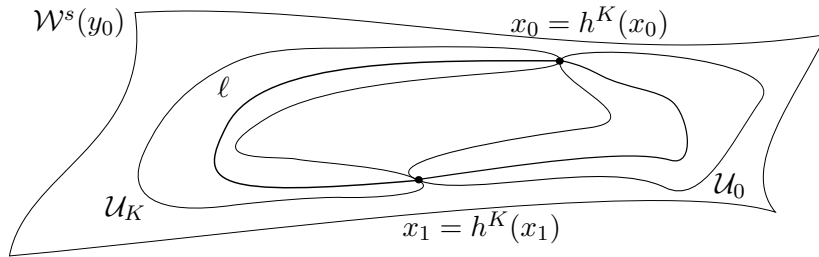
*Demostración.* Lo probaremos para  $\sigma = s$ . La prueba para  $\sigma = u$  es análoga.

Veamos primero el caso en el que  $\dim E^s = 1$ . Por un lado el conjunto  $A = \{y \in \mathcal{W}^s(\mathcal{C}) : \mathcal{W}^c(y) \subset \mathcal{W}^s(\mathcal{C})\}$  es abierto. Esto se debe a que la holonomía centro-estable es trivial (por ser de codimensión uno) y el Teorema de estabilidad de Reeb. El complemento de  $A$ , por otro lado, también es abierto: son los puntos cuya hoja central *se sale* de  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$ . Obtenemos que  $\mathcal{W}^s(\mathcal{C})$  es abierto y cerrado, por lo que no puede tener borde en  $\mathcal{W}^{cs}(\mathcal{C})$ .

Si la dimensión de el fibrado estable es dos, entonces procedemos como sigue.

Fijemos  $x = \mathcal{C} \cap \mathcal{W}^s(y_0)$ , y sea  $\alpha \subset \mathcal{W}^s(y_0)$  un loop por  $x$  e  $y_0$ . La intersección  $\mathcal{U}_0 \cap \alpha$  es unión de abiertos disjuntos de  $\mathcal{W}^s(y_0)$ ; sea  $(x_0, x_1)$  una de las componentes de la intersección.

Los puntos  $x_0$  y  $x_1$  están en  $\mathcal{K}$  y por lo tanto, si definimos  $K = \text{per}(x_0)\text{per}(x_1)$ , ambos quedan fijos por  $h^K$ . Vimos en la proposición 6.6 que  $h$  permuta los conjuntos  $\mathcal{U}_k$ , y por lo tanto  $h^K((x_0, x_1)) \subset \mathcal{U}_K$ , que es disjunto a  $\mathcal{U}_0$ .



Consideramos el loop  $\ell = [x_0, x_1] \cdot (h^K(x_0), h^K(x_1)) \subset \mathcal{W}^s(y_0)$ . Como  $\mathcal{W}^s(y_0)$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , el Teorema de Jordan (ver [H], proposición 2,B,1 (a)) nos dice que  $\ell$  separa  $\mathcal{W}^s(y_0)$  en dos componentes, una interior a  $\ell$  y una exterior.

Si  $p_1$  es un punto interior a  $\ell$  y a  $\mathcal{U}_0$ , y  $p_2$  interior a  $\ell$  y a  $\mathcal{U}_K$ , podemos considerar una curva interior a  $\ell$  que una  $p_1$  y  $p_2$ . Existe por lo tanto un punto  $p \in \partial\mathcal{U}_0$  interior a  $\ell$ . Usando el mismo argumento en el exterior de  $\ell$ , conseguimos un punto  $q \in \partial\mathcal{U}_0$ , exterior a  $\ell$ .

Ambos  $p$  y  $q$  son puntos de  $\mathcal{K}$ , y por lo tanto quedan fijos por  $h^{m\text{per}(p)\text{per}(q)}$ , para todo  $m \geq 1$ .

Fijemos  $s : [0, 1] \rightarrow \mathcal{W}^s(y_0)$  una curva que une  $p$  con  $q$  y que además cumple  $s((0, 1)) \subset \mathcal{U}_0$  y  $N = L\text{per}(p)\text{per}(q)$ , donde  $L$  es tal que  $N$  es distinto de 0 y de  $K$ .

La curva  $h^N(s)$  une  $p$  con  $q$  (uno de ellos exterior a  $\ell$  y uno de ellos interior) y por lo tanto  $h^N(s)$  tiene que cortar  $\ell$  en algún punto  $e$ . Se cumple que  $h^N(s) \subset \mathcal{U}_N$ , por lo que  $e$  es un punto en  $\mathcal{U}_N$ ; además  $e$  está en  $\ell$ , y  $\ell$  está contenida en  $\mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_K \cup \{x_0\} \cup \{x_1\}$ .

Pero esto es absurdo:  $\mathcal{U}_N$  es disjunto de  $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_K, \{x_0\}, \{x_1\}$ .

□

## Referencias

- [B] D. Bohnet. *Codimension-1 partially hyperbolic diffeomorphisms with a uniformly compact center foliation*, Journal of Modern Mathematics, **7** (2013), 565-604.
- [BB] D. Bohnet, C. Bonatti. *Partially hyperbolic diffeomorphisms with a uniformly compact center foliation: the quotient dynamics*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **36**, 4 (2016), 1067-1105.
- [BGHP] C. Bonatti, A. Gogolev, A. Hammerlindl, R. Potrie. *Anomalous partially hyperbolic diffeomorphisms III: abundance and incoherence*, arXiv:1706.04962v1, preprint.
- [BW] C. Bonatti y A. Wilkinson. *Transitive partially hyperbolic diffeomorphisms on 3-manifolds*, Topology **44** (2005) 475-508.
- [CLN] C. Camacho y A. Lins Neto. *Geometric theory of foliations*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA (1985). Traducido del portugués por Sue E. Goodman.
- [CC] A. Candel y L. Conlon. *Foliations I*, Graduate Studies in Mathematics, **23** American Mathematical Society, Providence, RI (2000).
- [C] P. Carrasco. *Compact dynamical foliations*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **35**, 8 (2015), 2474-2498.
- [CP] S. Crovisier, R. Potrie. *Introduction to partially hyperbolic dynamics*. School on Dynamical Systems, ICTP, Trieste (2015).
- [DW] D. Dolgopyat and A. Wilkinson. *Stable accessibility is  $C^1$ -dense*, Astérisque **287** (2003), 33-60.
- [dC] M. do Carmo. *Riemannian geometry*, Birkhäuser Boston (1992).
- [EMS] R. Edwards, K. Millett, D. Sullivan. *Foliations with all leaves compact*, Topology, **16** (1977), 13-32.
- [E] D. B. A. Epstein. *Periodic flows on three-manifolds*, Ann. of Math. (2), **95** (1972), 66-82.

- [EV] D. B. A. Epstein, E. Vogt. *A counterexample to the periodic orbit conjecture in codimension 3*, Ann. of Math. (2) **108** (1978), 539-552.
- [F] J. Franks, *Anosov diffeomorphisms*. Proceedings of Symposia in Pure Math. **14** (1970), 61–93.
- [G] A. Gogolev. *Partially hyperbolic diffeomorphisms with compact center foliation*, Journal of Modern Dynamics, (5), **4** (2011) 747-769.
- [H] A. Hatcher. *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002).
- [HHU<sub>1</sub>] F. Rodriguez Hertz, M. A. Rodriguez Hertz, R. Ures. *A non dynamical coherent example on  $\mathbb{T}^3$* , Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **33** no. 4 (2016) 1023-1032.
- [HHU<sub>2</sub>] F. Rodriguez Hertz, M. A. Rodriguez Hertz, R. Ures. *A survey of partially hyperbolic dynamics*, Amer. Math. Soc. **51** (2007), 35–87.
- [Hi] K. Hiraide. *A simple proof of the Franks-Newhouse theorem on codimension-one Anosov diffeomorphisms*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **21** (2001), 801-806.
- [Mn] R. Mañé. *Introducao à Teoria Ergódica*, IMPA, Projeto Euclides, Rio de Janeiro (1983).
- [M] D. Montgomery. *Pointwise periodic homeomorphisms*, Amer. J. Math., **92**(1970), 761-770.
- [Mu] J. R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley (1984).
- [N] S. E. Newhouse. *On codimension one Anosov diffeomorphisms*, Amer. J. Math., **92** (1970), 761-770.
- [S] D. Sullivan. *A counterexample to the periodic orbit conjecture*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **46** (1976), 5-14.
- [V] E. Vogt. *Foliations of codimension 2 with all leaves compact*, Manuscripta Math. **18** (1976), 187-212.