

TRABAJO MONOGRÁFICO

**Homeomorfismos del plano:  
toda órbita periódica enlaza  
un punto fijo**

ALEJO GARCÍA

ORIENTADORA: DRA. JULIANA XAVIER

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY



UNIVERSIDAD  
DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY

He made a quick drop, slanting down on his  
back-swept wings, and then circled again.

ERNEST HEMINGWAY - The Old Man and the Sea

## Resumen

Sea  $f$  un homeomorfismo de  $\mathbb{R}^2$  que preserva orientación. Un conocido resultado de Brouwer afirma que si  $f$  tiene un punto periódico, entonces tiene también un punto fijo.

En esta monografía daremos un resultado más preciso: probaremos que para todo punto periódico  $z^*$  con período  $q \geq 2$ , existe un punto fijo  $z$  tal que el *número de vueltas* de  $z^*$  alrededor de  $z$  es no nulo, para cualquier isotopía de la identidad a  $f$ ; es decir, todo punto periódico gira alrededor de algún punto fijo. Este resultado fue probado por Patrice Le Calvez ([LC]) en el 2008, dando una respuesta afirmativa a la pregunta formulada por John Franks ([BF]) en el 1988.

## Abstract

Let  $f$  be an orientation-preserving homeomorphism of  $\mathbb{R}^2$ . A well known result from Brouwer states that if  $f$  has a periodic point, then it also has a fixed point.

In this monograph we give a more precise result: we are going to prove that for every periodic point  $z^*$  with period  $q \geq 2$ , there exists a fixed point  $z$  such that the *spinning number* of  $z^*$  around  $z$  is non-zero, for any isotopy from the identity to  $f$ ; namely, every periodic point rotates around a fixed point. This result was proved by Patrice Le Calvez ([LC]) in 2008, giving a positive answer to the question formulated by John Franks ([BF]) in 1988.

## Índice

1	Preliminares - notaciones y definiciones	5
2	Bosquejo del teorema	12
3	Espacios de homeos	14
4	Número de vueltas	17
5	Índices y transversalidad dinámica	20
6	Función dual	30
7	Descomposición dinámicamente transversal	33
8	Basta probarlo para $\#Fix(f) < \infty$	37
9	Casos base	40
10	El teorema es cierto para $f$ irreducible	41
11	También es cierto para $f$ reducible	46

# 1 Preliminares - notaciones y definiciones

## Superficies

Le llamaremos *superficie* a toda variedad topológica orientable de dimensión dos. Trabajaremos módulo homeomorfismos: diremos  $S$  es un *plano* si es homeomorfa a  $\mathbb{R}^2$ , y respectivamente diremos que es un *anillo* o una *esfera* si es homeomorfa a  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  o a  $S^2$ . Diremos que  $U \subset S$  es un *disco abierto* (o simplemente *disco*) si es homeomorfo a  $\{z \in \mathbb{R}^2 : |z| < 1\}$ , y es un *disco cerrado* si es homeomorfo a  $\{z \in \mathbb{R}^2 : |z| \leq 1\}$ . El teorema de clasificación de superficies nos dice que las superficies orientables sin borde están determinadas (módulo homeomorfismos) por su género y sus *pinchaduras*: si tomamos  $S = S_g \setminus X$ , donde  $S_g$  es la superficie cerrada de género  $g$  y  $X$  es un conjunto cerrado totalmente desconexo, entonces las pinchaduras de  $S$  serán los puntos de  $X$ . A lo largo de este trabajo sólo necesitaremos el caso en el que  $X$  es un conjunto de puntos aislados de  $S$  (eventualmente infinito).

Dada una superficie  $S$ , le llamaremos  $Homeo^+(S)$  al conjunto de homeomorfismos de  $S$  que preservan la orientación, con la topología  $C^0$ . Dada  $f \in Homeo^+(S)$ , denominaremos  $Fix(f)$  al conjunto de puntos fijos de  $f$ . Diremos que un disco  $D$  es *atractor* (respectivamente *repulsor*) de  $f$  si cumple  $f(\bar{D}) \subset \overset{\circ}{D}$  (respectivamente  $f^{-1}(\bar{D}) \subset \overset{\circ}{D}$ ). Diremos que un fijo  $z$  es un *pozo* (*fuelle*) de  $f$  si existe un disco  $D$  que contiene a  $z$ , que es atractor (repulsor) de  $f$ , y que además cumple  $\bigcap_{k \geq 0} f^k(D) = z$ , ( $\bigcap_{k \geq 0} f^{-k}(D) = z$ ).

## Curvas

A lo largo de este trabajo, una *curva*, *camino*, o *arco*  $\gamma$  en una superficie  $S$  será un mapa continuo  $\gamma : I \rightarrow S$ , donde  $I$  es un intervalo (frecuentemente haremos abuso de notación refiriéndonos por  $\gamma$  a la imagen en  $S$  de dicho mapa). Diremos que una curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$  es *cerrada* si cumple  $\gamma(0) = \gamma(1)$ , y la llamaremos *lazo* o *loop* en este caso.

Llamaremos *recta* (respectivamente *semirrecta positiva*, *semirrecta negativa*, *segmento*, *círculo*) de una superficie  $S$  a toda  $\phi$  encaje propio de  $\mathbb{R}$  (respectivamente  $[0, +\infty)$ ,  $(-\infty, 0]$ ,  $[0, 1]$ ,  $S^1$ ) en la superficie  $S$ , módulo reparametrizaciones que preserven la orientación. Nuevamente haremos abuso de notación, refiriéndonos por  $\phi$  a la imagen del encaje, con la orientación correspondiente.

Toda recta en  $\mathbb{R}^2$  tiene bien definida su *izquierda* y su *derecha*: el teorema de Schoenflies (ver [S]) nos dice que existe un homeo  $h$  de  $\mathbb{R}^2$  tal que  $h(\gamma(t)) = (0, t)$ . Definimos entonces  $L(\gamma) := h^{-1}((-\infty, 0] \times \mathbb{R})$ , y análogamente  $R(\gamma) := h^{-1}([0, +\infty) \times \mathbb{R})$ .

## Espacios de cubrimiento

Dadas dos superficies  $S$  y  $\tilde{S}$ , diremos que  $\tilde{\pi} : \tilde{S} \rightarrow S$  es una proyección de cubrimiento si todo punto  $z \in S$  tiene un entorno  $U$  del tipo *pila de discos*, es decir, tal que  $\tilde{\pi}^{-1}(U)$  es una unión disjunta de discos de  $\tilde{S}$  de forma que la proyección restringida a cada uno de esos discos es un homeomorfismo. En esta condiciones diremos que  $\tilde{S}$  es un *cubrimiento* de  $S$ , y será el *cubrimiento universal* si  $\tilde{S}$  es simplemente conexa, y sabemos en este contexto que  $\tilde{S}$  es única a menos de homeomorfismos (ver [H]).

En este trabajo nos interesará cubrir  $S^2$  con pinchaduras, en cuyo caso el cubrimiento universal será siempre un plano. En el caso particular en que  $S \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , tomaremos  $\tilde{S} = \mathbb{R}^2$  y la proyección de cubrimiento será  $\tilde{\pi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , dada por  $\tilde{\pi}(x, y) := (e^{-y} \cos(2\pi x), e^{-y} \sin(2\pi x))$ . Tendremos en ese caso la transformación de cubrimiento  $T \in \text{Homeo}^+(S)$ , definida por  $T(x, y) := (x + 1, y)$ .

## Isotopías

**Definición 1.1.** *Dados dos homeomorfismos  $f$  y  $f'$  de una superficie  $S$ , una isotopía  $I$  entre  $f_0$  y  $f_1$  es una familia  $(f_t)_{t \in [0,1]}$  de homeomorfismos tal que  $f_0 = f$ ,  $f_1 = f'$  y las funciones  $(z, t) \mapsto f_t(z)$  y  $(z, t) \mapsto f^{-1}(z, t)$  son continuas.*

Podemos pensar entonces a una isotopía como un camino  $\gamma$  en el espacio  $\text{Homeo}(S)$ , tal que  $\gamma(0) = f_0$  y  $\gamma(1) = f_1$ . Diremos que dos isotopías de  $f_0$  a  $f_1$  son *homotópicas* si lo son como curvas en  $\text{Homeo}(S)$ .

Si tenemos dos isotopías  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$ ,  $I' = (f'_t)_{t \in [0,1]}$  tales que  $f_1 = f'_0$ , podemos definir la composición  $I'I = (g_t)_{t \in [0,1]}$ , donde  $g_t(z) = f_{2t}(z)$  si  $t \leq \frac{1}{2}$ , y  $g_t(z) = f'_{2t-1}(f_1(z))$  si  $t \geq \frac{1}{2}$ . Dada  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  uno puede definir  $I^{-1} := (f_t^{-1})_{t \in [0,1]}$ , que va desde  $f_0^{-1}$  a  $f_1^{-1}$ .

Dada una isotopía  $I$  como en la Definición 1.1, y un punto  $z$  en la superficie  $S$ , definiremos  $I(z)$  la *trayectoria* de  $z$  con  $I(z) := (f_t(z))_{t \in [0,1]}$ .

Definiremos ahora una isotopía en la esfera  $S^2$  con buenas propiedades. Intuitivamente en el plano, una calesita centrada en  $O$  es una familia de homeos  $(R_t)_{t \in [0,1]}$  tal que  $R_t$  es la rotación de centro  $O$  y ángulo  $2\pi t$ . Como un homeo del plano es propio, podemos extender  $R_t$  a un homeo del mismo nombre en la esfera fijando  $\infty$ , de donde extendemos también la isotopía a  $S^2$ , fijando  $\infty$  para todo tiempo (basta imaginar que atravesamos la esfera con un palito de brochette por los puntos  $O$  e  $\infty$ , y le damos una vuelta).

Además, dados  $z, z' \in S^2$ , existe un homeo  $h_{z,z'}$  que preserva orientación y manda  $z$  a  $O$  y  $z'$  a  $\infty$ . Tenemos entonces:

**Definición 1.2.** En  $S^2$ , una calesita  $\mathcal{C}_{z,z'}$  de centro  $z$  y anticentro  $z'$  es una isotopía  $(c_t)_{t \in [0,1]}$  tal que  $c_t := h_{z,z'}^{-1} \circ R_t \circ h_{z,z'}$

Si identificamos  $S^2 \setminus \{z, z'\}$  con  $R^2 \setminus \{0\}$  mediante el homeo  $h_{z,z'}$ , y luego levantamos  $\mathcal{C}_{z,z'}$  al cubrimiento universal (que es un plano) podemos ver a  $\tilde{\mathcal{C}}_{z,z'}$  como una cinta transportadora que traslada todos los puntos un dominio fundamental hacia la derecha, a velocidad constante, esto es,  $\tilde{\mathcal{C}}_{z,z'} = (\tilde{f}_t)_{t \in [0,1]}$  con  $\tilde{f}_t(x, y) = (x + t, y)$ .

Supongamos ahora que tenemos  $U, U'$  dos entornos de  $z_0 \in S$ , y sea  $f : U \rightarrow U'$  un homeo que preserva orientación. Diremos que  $I := (f_t)_{t \in [0,1]}$  es una *isotopía local de  $f$  en  $z_0$*  si cumple las siguientes condiciones:

- Para todo  $t \in [0, 1]$ , se tiene que  $f_t$  es un homeomorfismo de un entorno  $U_t \subset U$  de  $z_0$  en un entorno  $U'_t \subset U'$  de  $z_0$ ;
- $U_t$  y  $U'_t$  varían de forma continua con  $t$ ;
- La función  $(z, t) \mapsto f_t(z)$  es continua en  $\{(z, t) \in S \times [0, 1] : z \in U_t\}$  (y análogamente para  $(z, t) \mapsto f_t^{-1}(z)$ );
- $f_0 = Id \upharpoonright_{U_0}$ ,  $f_1 = f \upharpoonright_{U_1}$ ;
- $f_t(z_0) = z_0$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

## Foliaciones

Una *foliación topológica orientada*  $\mathcal{F}$  en una superficie  $S$  es una partición de  $S$  en subvariedades de dimensión 1 tal que para todo  $z \in S$ , existe un entorno  $U_z$  y un homeomorfismo  $h : U_z \rightarrow (-1, 1) \times (-1, 1)$  que preserva orientación y manda  $\mathcal{F}$  en la foliación por rectas verticales, orientadas de arriba a abajo. En estas circunstancias, los elementos de la partición  $\mathcal{F}$  se llamarán *hojas* de la foliación,  $U_z$  será un *entorno trivializador* (o entorno tubular) y el mapa  $h$  se llamará *mapa trivializador*. Si  $\mathcal{F}$  es una foliación topológica orientada en una superficie  $S$ , llamaremos  $\phi_z$  a la hoja que pasa por  $z$ ,  $\phi_z^+$  a la semi-hoja positiva con origen en  $z$  (el futuro de  $z$  al "fluir" por  $\mathcal{F}$ ), y respectivamente llamaremos  $\phi_z^-$  a la semi-hoja negativa que pasa por  $z$ . Si tomamos  $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la proyección sobre la primera coordenada, diremos que  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$  es *positivamente transversal* a  $\mathcal{F}$  si para cada

$t_0 \in [0, 1]$ , existen  $U_{\gamma(t_0)}$  y  $h : U_{\gamma(t_0)} \rightarrow (-1, 1) \times (-1, 1)$  como definimos recién, de forma tal que  $\pi_1(h(\gamma(t)))$  sea estrictamente creciente. Pensado de forma intuitiva, estamos diciendo que  $\gamma$  atraviesa a  $\mathcal{F}$  de derecha a izquierda. Definimos de forma análoga el concepto de curva *negativamente transversal* a  $\mathcal{F}$ .

Una hoja  $\phi$  de la foliación será *errante* si existe un arco  $\gamma : (0, 1) \rightarrow S$  positivamente transversal a la foliación que pasa por  $\phi$ , no intersecta ninguna hoja cerrada, y no intersecta a ninguna hoja en más de un punto. La teoría de Poincaré-Bendixson nos dice que el flujo inducido por una foliación  $C^1$  en  $\mathbb{R}^2$  tiene solamente puntos errantes (ver [PM]). Este resultado se puede llevar a foliaciones topológicas de  $\mathbb{R}^2$ : solo tienen hojas errantes. Esto implica por ejemplo, que no puede existir un lazo  $\gamma$  positivamente transversal a la foliación (en caso contrario, la foliación tendría al menos una singularidad en la componente acotada de  $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ ).

Supongamos que  $S$  tiene una pinchadura aislada  $z$ . Diremos que  $z$  es un *pozo* (*fuelle*) de la foliación si existen un abierto  $U \subset S$  que tiene a  $z$  como pinchadura, y un homeo  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  que puede extenderse enviando  $z$  a 0, y que manda  $\mathcal{F} \upharpoonright_U$  a la foliación radial saliente (entrante).

En el caso en el que  $S$  es una esfera con finitas pinchaduras (es decir, el complemento de finitos puntos de una esfera  $S'$ ), podemos ver a  $\mathcal{F}$  como una foliación singular en la esfera, cuyas singularidades los finitos puntos que no están en  $S$ . Un resultado de Whitney nos dice que esta foliación topológica nos induce un flujo (ver por ejemplo [W], [W2]), luego dada  $\phi \in \mathcal{F}$ , podemos usar la dinámica de flujos en superficies para estudiar su  $\omega$ -límite  $\omega(\phi) := \bigcap_{z \in \phi} \overline{\phi_z^+}$  y su  $\alpha$ -límite  $\alpha(\phi) := \bigcap_{z \in \phi} \overline{\phi_z^-}$ .

Trabajaremos con  $\omega(\phi)$ , los resultados que damos son análogos para  $\alpha(\phi)$ . La teoría de Poincaré-Bendixson nos dice que si una hoja  $\phi$  no es cerrada, entonces es disjunta de su  $\omega$ -límite. Tenemos además que se cumple una de las tres siguientes:

1.  $\omega(\phi)$  es una singularidad,
2.  $\omega(\phi)$  es una hoja cerrada de  $\mathcal{F}$ ,
3.  $\omega(\phi)$  es un *cactus*: está formado por singularidades y hojas que unen dos singularidades (eventualmente iguales).

La hoja  $\phi$  está contenida en una componente conexa  $U$  de  $S' \setminus \omega(\phi)$ , que es simplemente conexa pues  $\omega(\phi)$  es cerrado y conexo (clasificación de superficies), de donde definiremos  $\text{Fill}(\omega(\phi))$  como  $S' \setminus U$ , que será un conjunto

cerrado, conexo y *relleno* (es decir, de complemento conexo). En el primero de los casos tenemos  $\text{Fill}(\omega(\phi)) = \omega(\phi)$ , y en los últimos dos tenemos  $\partial\text{Fill}(\omega(\phi)) = \omega(\phi)$ . Además en estos dos últimos,  $\text{Fill}(\omega(\phi))$  queda *de un lado* de la foliación: o bien para todos  $\phi' \subset \omega(\phi)$ ,  $z \in \phi'$  y  $U$  entorno tubular de  $z$ , los puntos de  $U$  que están a la izquierda de  $\phi'$  están en  $\text{Fill}(\omega(\phi))$  (al contrario de los que están a la derecha); o bien a la inversa. Esto nos dice que una y sólo una de las siguientes afirmaciones es verdadera en cada caso:

1. Todo arco con origen en  $z \in \text{Fill}(\omega(\phi))$ , positivamente transversal a  $\mathcal{F}$ , se queda por siempre en  $\text{Fill}(\omega(\phi))$ ,
2. Todo arco con origen en  $z \notin \text{Fill}(\omega(\phi))$ , positivamente transversal, vive siempre fuera de  $\text{Fill}(\omega(\phi))$ .

Remarcamos que si  $\omega(\phi)$  y  $\alpha(\phi)$  tienen intersección no vacía (comparten una hoja o una singularidad), entonces necesariamente son el mismo conjunto. Pero esto último solo puede ocurrir en el caso en que ambos sean la misma singularidad. Tenemos entonces:

**Observación 1.3.** *Dada  $\phi \in \mathcal{F}$ , o bien  $\omega(\phi)$  y  $\alpha(\phi)$  son disjuntos, o bien son la misma singularidad.*

Observamos además que  $\text{Fill}(\omega(\phi))$  -y análogamente  $\text{Fill}(\alpha(\phi))$ - contienen al menos una singularidad (nuevamente por Poincaré-Bendixson).

## Índices

Definiremos ahora tres tipos de índices alrededor de singularidades que nos serán útiles más adelante.

Supongamos que tenemos una superficie  $S$ ,  $z \in S$ ,  $U, U'$  dos entornos de  $z$  y  $f : U \rightarrow U'$  un homeo que tiene a  $z$  como punto fijo aislado. Podemos definir entonces el *Índice de Lefschetz* de  $f$  alrededor de  $z$ ,  $i(f, z)$  de la siguiente manera: comenzamos por asumir que  $z$  es el único fijo que tenemos en  $U$  (si no, reemplazamos  $U$  por un entorno de  $z$  más pequeño para que así sea), definimos  $D_r$  como el disco de centro 0 y radio  $r$ , y tomamos  $h : U \rightarrow D_1$  que preserva orientación y cumple  $h(z) = 0$ . Si tomamos  $r$  pequeño, tenemos que el mapa  $f_h = h \circ f \circ h^{-1}$  está bien definido (y tiene a  $z$  como único fijo). Sea entonces  $\gamma : S^1 \rightarrow D_r \setminus \{0\}$  cualquier lazo libremente homotópico a  $\partial D_r$ , esto es, una curvita que pega una vuelta alrededor del 0, orientada en sentido antihorario. Tomamos ahora el mapa  $g : S^1 \rightarrow S^1$ , con  $g(\theta) = f_h(\gamma(\theta)) - \gamma(\theta) / \|f_h(\gamma(\theta)) - \gamma(\theta)\|$ , y definimos a  $i(f, z)$  como el grado de este mapa. Podemos ver que no depende del lazo  $\gamma$  elegido pues

son todos (libremente) homotópicos en  $D_1 \setminus \{0\}$ , así como tampoco depende de la conjugación  $h$ . Observamos también que  $i(f, z) = i(f^{-1}, z)$  (basta ver que  $f^{-1}$  manda  $f(\gamma)$  en  $\gamma$ , con las orientaciones preservadas, y que el mapa antípoda preserva orientación en  $S^1$ ).

En un espíritu similar definiremos el índice  $i(I, z)$  de una isotopía local  $I$  de la identidad a  $f$ , introducido en [LR]. Comenzamos por tomar  $U$ ,  $h$  y  $r$  de la misma forma que lo hicimos en la última definición. Tenemos entonces que la isotopía  $(f_{h,t})_{t \in [0,1]}$ , definida como  $f_{h,t} = h \circ f_t \circ h^{-1}$  está de nuevo bien definida en  $D_r \setminus \{0\}$ . Levantamos la isotopía a  $\tilde{f}_{h,t}$  en el cubrimiento universal, comenzando en la identidad. Similarmente a la última definición, tomamos  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) = (1, 0)$ , y tal que  $\pi(\tilde{\gamma}) \subset D_r$  (siendo  $\pi$  la proyección de cubrimiento). Tomamos ahora el mapa  $\tilde{g} : [0, 1] \rightarrow S^1$  definido con  $\tilde{g}(t) = \tilde{f}_{h,1}(\tilde{\gamma}(t)) - \tilde{\gamma}(t) / \|\tilde{f}_{h,1}(\tilde{\gamma}(t)) - \tilde{\gamma}(t)\|$ . Observando que  $\tilde{g}(0) = \tilde{g}(1)$ , podemos cocientar para obtener un mapa de  $S^1$  en sí mismo. El grado de dicho mapa será entonces el índice que buscamos. De la misma forma que hoy, tenemos que no depende de la curva  $\tilde{\gamma}$  elegida ni del homeo  $h$ , y se cumple además que  $i(I, z) = i(I^{-1}, z)$ .

Definiremos por último el *índice de Poincaré-Hopf* de una foliación alrededor de una singularidad. Supongamos que tenemos  $\mathcal{F}$  una foliación topológica con una singularidad aislada  $z$ . Pensemos sin pérdida de generalidad que la superficie es  $\mathbb{R}^2$  y que la singularidad es  $z = 0$  (en caso contrario tomamos un homeo  $h$  de la misma forma que en los casos anteriores). Una vez más, tomemos  $\gamma : S^1 \rightarrow D_1 \setminus \{0\}$  libremente homotópica a  $\partial D_1$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Podemos cubrir ahora la imagen del lazo  $\gamma$  con finitos  $U_i$  entornos tubulares de la foliación. Para cada  $z \in U_i$  definimos  $\phi_{z,U_i}^+$  como la semi-hoja positiva de  $z$  para  $\mathcal{F} \upharpoonright_{U_i}$ . Podemos definir ahora un mapa continuo  $\bar{\phi} : \gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\bar{\phi}(z) \in \phi_{z,U_i}^+$ , para todo  $i$ ,  $z \in U_i$ . De forma análoga a como hicimos en las otras definiciones, definiremos  $i(\mathcal{F}, z)$  como el grado del mapa  $g : S^1 \rightarrow S^1$ , donde  $g(t) = \bar{\phi}(\gamma(t)) - \gamma(t) / \|\bar{\phi}(\gamma(t)) - \gamma(t)\|$ .

Vinculamos ahora el índice de  $f$  con el de una isotopía local  $I$ . Lo que probaremos es que de todas las clases de homotopía de isotopías locales de  $f$  en  $z_0$ , existe una que llamaremos *favorita* que codifica el índice de  $f$ , mientras que las otras no guardan información. Usaremos que si  $z_0$  es un fijo aislado para  $f$  y  $U$  es un entorno de  $z_0$  (que podemos tomar sin más fijos), entonces  $U \setminus z_0$  puede ser pensado como un anillo, donde  $z_0$  es precisamente uno de los fines, y le llamamos  $z_1$  al otro. La prueba del resultado a continuación puede ser encontrada en [LR].

**Proposición 1.4.** Sean  $U, U'$  entornos de  $z_0$  de una superficie orientable  $S$ ,  $f : U \rightarrow U'$  un homeo que preserva la orientación y que tiene a  $z_0$  como único punto fijo. Sea  $I$  una isotopía local de la identidad a  $f$ , y  $J$  una isotopía local, homotópica a  $C_{z_0, z_1}$ . Si  $i(f, z_0) \neq 1$ , entonces existe un único  $k_0 \in \mathbb{Z}$  tal que  $i(J^{k_0}I, z_0) = i(f, z_0)$ . Para los demás valores de  $k$  se tiene  $i(J^kI, z_0) = 0$ .

## 2 Bosquejo del teorema

Supongamos que tenemos un homeomorfismo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que preserva la orientación y que tiene al menos un punto periódico. Un conocido resultado de Brouwer afirma que entonces dicho homeomorfismo tiene también un punto fijo (ver [B]). El teorema que vamos a probar afirma que para cada punto periódico  $z^*$  de  $f$  (de período  $q$ ), existe un punto fijo  $z$  alrededor del cual  $z^*$  *está girando*. Un resultado análogo es fácil de probar para flujos, ya que si uno tiene una órbita  $\Gamma$  periódica en el plano, la componente acotada de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  tiene un punto fijo (Poincaré-Bendixson). Si  $f$  no es el tiempo 1 de un flujo, uno va a tener que formalizar la noción de *girar*, dado que una órbita periódica es un conjunto discreto.

Usando que todo homeo del plano es isotópico a la identidad (resultado que comentaremos más adelante pero que no probaremos) definimos para una isotopía  $I$  de la identidad a  $f$  el *número de vueltas por  $I$  de  $z^*$  alrededor de  $z$* , de la siguiente manera. Extendemos la isotopía  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  a los reales usando  $f_{t+1} = f_t \circ f$ . Luego definimos un mapa  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $g(t) = f_t(z^*) - f_t(z)$ . Es fácil ver que este mapa tiene período  $q$ , de donde normalizando y pasando al cociente obtenemos un mapa del círculo  $\mathbb{R}/q\mathbb{Z}$  en  $S^1$ . El grado de dicho mapa será el número de vueltas  $\nu_{I,z^*}(z)$ . Es fácil ver que este número depende solamente de la clase de homotopía de  $I$ , esto es, si dos isotopías son homotópicas, las vueltas que dan los periódicos alrededor de los fijos serán las mismas para las dos isotopías.

Para afirmar que  $z^*$  gira alrededor de  $z$  pediremos que el número de vueltas sea no nulo para cualquier isotopía de la identidad a  $f$ . Siendo que todo homeo del plano es propio, podemos extender cualquier isotopía  $I$  en el plano a una con el mismo nombre en la esfera haciendo que fije  $\infty$  para todo tiempo. Luego, dadas dos isotopías  $I, I'$  veremos que existe un único  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $I' \sim \mathcal{C}_{0,\infty}^k I$ , de donde  $\nu_{I,z^*}(z) = \nu_{I',z^*}(z) - kq$ . Definiremos entonces  $V_{f,z^*}(z) := \nu_{I,z^*}(z) \pmod{q}$ , que no depende de la isotopía elegida, y el teorema consiste en probar que dicho número es distinto de 0. Dicho de forma amigable, si tenemos un punto periódico  $z^*$  de período  $q$ , bastará encontrar un fijo  $z$  y una isotopía  $I$  de forma tal que  $z^*$  *enlace* a  $z$  un número de veces que no sea múltiplo de  $q$ . El objetivo del trabajo es probar el siguiente resultado:

**Teorema 2.1.** *Sea  $f$  un homeomorfismo del plano que preserva la orientación. Entonces, para todo  $z^*$  periódico de  $f$ , con período  $q \geq 2$ , existe un punto fijo  $z$  tal que  $V_{f,z^*}(z) \neq 0$*

Esto da una respuesta afirmativa a la pregunta realizada por J. Franks en [BF], la cual estuvo abierta durante 20 años, y que motivó la creación y desarrollo de técnicas para explicar la dinámica de homeomorfismos en superficies.

El itinerario para probar el Teorema 2.1 es el siguiente. En las secciones 3, 4 y 5 estudiamos estructuras que utilizamos más adelante; son secciones técnicas que allanan el terreno para lo que viene después. En la sección 6 definimos lo que llamaremos *función dual*, veremos como se vincula con el número de vueltas, y daremos un enunciado equivalente del Teorema 2.1 que la utiliza. En la sección 7 construiremos una *descomposición dinámicamente transversal* para un homeo  $f$ , y veremos qué resultados nos brinda sobre la dinámica de éste. La prueba en sí misma comienza en la sección 8, donde veremos que basta probar el Teorema para el conjunto de homeos  $f$  que tienen finitos puntos fijos, y clasificaremos esas  $f$  en dos casos que atacaremos separadamente, y que denominaremos *irreducible* y *reducible*. En el segundo de estos casos probaremos el Teorema de forma inductiva, por lo que en la sección 9 inicializamos la recurrencia, esto es, probamos el Teorema para los casos en los que  $f$  tiene exactamente 0, 1 o 2 puntos fijos. Por último, analizamos los casos donde  $f$  es irreducible y reducible, en las secciones 10 y 11 respectivamente.

### 3 Espacios de homeos

En esta sección vamos a dar propiedades útiles de algunos espacios de homeos, que usaremos más adelante. La prueba de varias de estas excede los contenidos de este trabajo, por lo que nos limitaremos a dar algunas ideas sobre las mismas.

Definimos  $\mathcal{H}_n$  como el espacio de homeos de  $S(0, n) := S^2 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$  que preservan orientación, y que fijan los  $n$  fines. Así,  $\mathcal{H}_1 = \text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$ ,  $\mathcal{H}_2$  actúa en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{z\}$ , y  $\mathcal{H}_n (n \geq 3)$  en la superficie hiperbólica de género 0 y  $n$  pinchaduras.

Es fácil ver que toda  $f \in \mathcal{H}_1$  es homotópica a la función identidad  $Id$ , basta mandar a todos los  $x \in \mathbb{R}^2$  hasta  $f(x)$  por el segmento que los une, parametrizado por longitud de arco. El paso difícil es probar que *homotópicos implica isotópicos*, es decir, que podemos llegar de la identidad a  $f$  por un camino de homeos, de donde concluimos que  $\mathcal{H}_1$  es arcoconexo. La prueba de esto se puede encontrar en [E].

Recordemos que una isotopía  $I := (f_t)_{t \in [0,1]}$  en una superficie  $S$  es una familia de homeomorfismos  $(f_t)_{t \in [0,1]}$  de  $S$  tales que las aplicaciones  $(z, t) \rightarrow f_t(z)$  y  $(z, t) \rightarrow f_t^{-1}(z)$  son continuas. Podemos además definir  $I^{-1} := (f_t^{-1})_{t \in [0,1]}$ . Así, diremos que dos isotopías  $I, I'$  de la identidad a  $f$  en  $S(0, n)$  son homotópicas si  $II'^{-1}$  es una curva contractible en  $\mathcal{H}_n$ .

Supongamos que tenemos  $f \in \mathcal{H}_1$  que fija  $z$  y una isotopía  $I$  de la identidad a  $f$ , siendo entonces  $(f_t(z))_{t \in [0,1]}$  el camino cerrado que describe  $z$  por la isotopía. Podemos construir entonces una nueva isotopía  $I_z$ , también de la identidad a  $f$ , que fije  $z$  para todo tiempo: basta definir la familia  $(g_t)_{t \in [0,1]}$  donde  $g_t$  es la traslación que manda  $f_t(z)$  a  $z$ , y luego definir  $I_z = (g_t f_t)_{t \in [0,1]}$ . Pensando a cada  $f \in \mathcal{H}_2$  como un homeo de  $\mathcal{H}_1$  que fija el origen, concluimos entonces que un homeo de  $\mathcal{H}_2$  es isotópico a la identidad, de donde  $\mathcal{H}_2$  es también arcoconexo.

Estudiaremos ahora los grupos fundamentales  $\pi_1(\mathcal{H}_2, Id)$  y  $\pi_1(\mathcal{H}_1, Id)$ , comenzando por el primero. Tomemos entonces una isotopía  $I$  de la identidad a la identidad. Recordando que podemos extenderla a una isotopía del plano que fija el origen, vemos que la aplicación  $z \rightarrow \nu_{I,O}(z)$  es una función continua definida en un conexo que toma valores enteros, de donde es constante, esto es, *todos los puntos dan la misma cantidad de vueltas alrededor del centro*. Este número, que depende exclusivamente de la isotopía elegida, será denominado  $\nu(I)$ . Veamos que define la clase de homotopía de la isotopía  $I$ . Es fácil ver que si dos isotopías  $I, I' \in \mathcal{H}_2$  son homotópicas, entonces  $\nu(I) = \nu(I')$ . La parte que no probaremos es la recíproca, que consiste en probar que toda  $I$  con  $\nu(I) = 0$  es homotópicamente nula en  $\mathcal{H}_2$ . Con ella,

y observando que  $\nu(\mathcal{C}_{O,\infty}) = 1$ , concluimos que  $\pi_1(\mathcal{H}_2, Id) \simeq \mathbb{Z}$ .

Usando esto último, probaremos que  $\pi_1(\mathcal{H}_1, Id) \simeq \mathbb{Z}$ . Para ello, nos basta pensar a  $\mathcal{H}_2$  dentro de  $\mathcal{H}_1$ , como los homeos del plano que fijan el origen  $O$ ; y luego construir un retracto por deformación de  $\mathcal{H}_1$  en  $\mathcal{H}_2$ , esto es, un mapa  $r : \mathcal{H}_1 \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}_1$  continuo, tal que si definimos  $r_t(f) = r(f, t)$  tenemos  $r_0 = Id$ ,  $r_1(\mathcal{H}_1) = \mathcal{H}_2$ , y  $r_t \upharpoonright_{\mathcal{H}_2} = Id$  para todo  $t$ . Construimos el retracto de la siguiente manera: comenzamos tomando el mapa  $p : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  tal que  $p(f) = f_O \circ f$ , donde  $f_O$  es la traslación que manda  $f(O)$  en  $O$ . Ahora podemos ir de  $f$  a  $p(f)$  de forma natural (y continua): basta definir la familia de traslaciones  $(p_t)_{t \in [0,1]}$  de forma tal que  $p_t$  es la traslación según el vector  $t(O - \vec{f}(O))$ . Definimos entonces  $r_t(f) = p_t \circ f$ , y tenemos así que  $r_0(f) = f$ ,  $r_1(f) = p(f)$ , y  $r_t \upharpoonright_{\mathcal{H}_2} = Id$ , que es lo que queríamos.

Hacemos ahora un breve análisis de  $\mathcal{H}_3$ . Vemos primero que es arcoconexo, es decir, que toda  $f \in \mathcal{H}_3$  es isotópica a la identidad. Para ello recordemos que ya lo tenemos en  $\mathcal{H}_2$ , y que un homeo de  $\mathcal{H}_3$  puede ser pensado como uno de  $\mathcal{H}_2$  que fija un punto  $z$ . Tomando ahora una isotopía  $I \subset \mathcal{H}_2$  de la identidad a  $f$ , podemos definir con  $I := \mathcal{C}_0^k I$  de forma tal que  $\nu(I') = 0$ . Luego  $(f'_t(z))_{t \in [0,1]}$  es una curva cerrada homotópicamente nula en el anillo abierto. Levantamos entonces esta isotopía en  $\tilde{I}' = (\tilde{f}'_t)_{t \in [0,1]}$  al cubrimiento universal de  $S(0, 2)$  (que es un plano) de forma que  $\tilde{f}_0 = Id$ . Tomando  $\tilde{z}$  levantado de  $z$ , y siendo que  $(\tilde{f}'_t(\tilde{z}))_{t \in [0,1]}$  es cerrada, podemos definir  $\tilde{I}'_{\tilde{z}}$  que fija  $\tilde{z}$  para todo tiempo: como hicimos antes, componemos  $\tilde{f}'_t$  con la traslación que manda  $(\tilde{f}'_t(\tilde{z}))$  en  $\tilde{z}$ . Observamos que  $\tilde{f}'_t(x + 1, y) = \tilde{f}'_t(x, y) + (1, 0)$ ; proyectamos entonces  $\tilde{I}'_{\tilde{z}}$  para obtener una isotopía  $I_z$  de la identidad a  $f$  que fija  $z$  para todo tiempo, por lo que está incluida en  $\mathcal{H}_3$ .

Veamos ahora que  $\pi_1(\mathcal{H}_3, Id)$  es trivial, es decir, que dada  $f \in \mathcal{H}_3$ , todas las isotopías de la identidad a  $f$  son homotópicas en  $\mathcal{H}_3$ . Observemos que podemos pensar a  $f$  como un homeo de  $\mathcal{H}_2$  que fija un punto  $z$ , así como podemos pensar una isotopía  $I$  de la identidad a  $f$  en  $\mathcal{H}_3$  como una isotopía en  $\mathcal{H}_2$  que fija el punto  $z$  para todo tiempo. Para probar lo que queremos, basta tomar  $f \in \mathcal{H}_2$  que fije un punto  $z$ , y dos isotopías  $I_0, I_1$  de la identidad a  $f$ , que fijen  $z$  para todo tiempo. Sabemos que estas dos isotopías son homotópicas en  $\mathcal{H}_2$ , pero necesitamos que lo sean en  $\mathcal{H}_3$ , es decir, que haya un camino  $(I_s)_{s \in [0,1]}$  desde  $I_0$  hasta  $I_1$ , por isotopías de la identidad a  $f$  que fijan  $z$  para todo tiempo. Sabemos que, fijando  $s$ , la trayectoria del punto  $z$ ,  $I_s(z)$ , es una curva cerrada homotópicamente nula, que además varía continuamente con  $s$ . Recuperamos entonces la construcción que hicimos en el párrafo anterior: tomamos la homotopía entre isotopías que tenemos, y la modificamos para cada valor de  $s$ , de modo que cada isotopía  $I_s$  fije  $z$  para

todo tiempo. Hemos probado que así que  $I_0$  e  $I_1$  son homotópicas en  $\mathcal{H}_3$ .

Dado  $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset S^2$  y una  $f$  que fija los puntos de  $X$ , denominaremos  $\mathcal{I}_X$  al conjunto de isotopías  $I$  de la identidad a  $f$  tales que  $X \subset \text{Fix}(I)$ . Observamos que el hecho de que  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_2$ , y  $\mathcal{H}_3$  sean arcoconexos, implica que dado  $f$  un homeo de la esfera con  $\#\text{Fix}(f) \geq 3$ , podemos construir una isotopía de la identidad a  $f$  que fije hasta 3 de ellos para todo tiempo: basta pensarlos como las pinchaduras y construir la isotopía en el complemento. Lo que hemos discutido en esta sección se resume entonces en la siguiente proposición:

**Proposición 3.1.**

1. Dado  $z \in \text{Fix}(f)$ , se tiene  $\mathcal{I}_z \neq \emptyset$ . Más aún, todas las  $I \in \mathcal{I}_z$  son homotópicas salvo componer con  $\mathcal{C}_{z,\infty}^k$
2. Dados  $z, z' \in \text{Fix}(f)$ , se tiene  $\mathcal{I}_{z,z'} \neq \emptyset$ . Más aún, todas las  $I \in \mathcal{I}_{z,z'}$  son homotópicas salvo componer con  $\mathcal{C}_{z,z'}^k$
3. Dados  $z, z', z'' \in \text{Fix}(f)$ , se tiene  $\mathcal{I}_{z,z',z''} \neq \emptyset$ . Más aún, todas las  $I \in \mathcal{I}_{z,z',z''}$  son homotópicas.

## 4 Número de vueltas

En esta sección definiremos con precisión el número de vueltas por  $f$  de un punto periódico  $z^*$  alrededor de un punto fijo  $z$ , y luego daremos dos resultados que utilizaremos más adelante: el primero afirma básicamente que este número se preserva por ciertas conjugaciones locales que preservan la orientación, y el segundo da una condición suficiente para que este número sea 0, inspirado en las líneas de Brouwer, que utilizaremos más adelante.

Recordamos que si tenemos  $f \in \text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$ , entonces es isotópico a la identidad, de donde podemos tomar  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  de la identidad a  $f$ . Extendemos esa isotopía a todo  $\mathbb{R}$  utilizando la relación  $f_{t+1} = f_t \circ f$ . Supongamos entonces que tenemos  $z$  fijo de  $f$ , y  $z^*$  periódico con período  $q \geq 2$ . Siendo que si fijamos  $t$  tenemos que  $f_t$  es un homeo, podemos definir el mapa  $g : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , dado por  $g(t) = f_t(z^*) - f_t(z) / \|f_t(z^*) - f_t(z)\|$ , que será  $q$ -periódico pues  $z^*$  tiene período  $q$ . Este mapa pasa entonces al cociente  $\bar{g} : \mathbb{R}/q\mathbb{Z} \rightarrow S^1$ , definiremos entonces el *número auténtico de vueltas*  $\nu_{I,z^*}(z)$  como el grado del mismo. Podemos hacer una construcción análoga si  $z'$  es fijo de  $f$  y hallar  $\nu_{I,z'}(z)$ . Remarcamos además que podemos hacer estos procesos en cualquier plano  $S$ , mandándolo a  $\mathbb{R}^2$  por un homeo que preserve orientación.

**Observación 4.1.** *Si recuperamos la construcción de la Sección 3 y a partir de  $I$  armamos  $I_z$  que fije  $z$  para todo tiempo -componiendo  $f_t$  con la traslación que lleva  $f_t(z)$  en  $z$ - entonces el correspondiente mapa  $g_z$  cumple  $g_z(t) = g(t)$ .*

Si tomamos dos isotopías  $I, I'$  de la identidad a  $f$  que sean homotópicas, entonces tendremos  $\nu_{I,z^*}(z) = \nu_{I',z^*}(z)$  -cambiaría continuamente pero solo toma valores enteros-, y la Proposición 3.1 nos dice que todas las isotopías de la identidad a  $f$  son homotópicas a  $I$ , a menos de componer con  $\mathcal{C}_{0,\infty}^k$ . Si componemos  $I$  con  $\mathcal{C}_{0,\infty}^k$  aparecen  $k$  vueltas nuevas cada vez que aplico la composición, de donde tenemos:

**Observación 4.2.** *Si tomamos  $I' \simeq \mathcal{C}_{0,\infty}^k I$ , entonces para cualquier  $z$  punto fijo de  $f$  se cumple  $\nu_{I',z^*}(z) = \nu_{I,z^*}(z) - kq$ .*

Definimos entonces  $V_{f,z^*}(z) = \nu_{I,z^*}(z) \pmod{q}$ , que es independiente de la isotopía de la identidad a  $f$  que hayamos tomado.

**Proposición 4.3.** *Sean  $S_0, S_1$  dos planos orientados,  $f_0 \in \text{Homeo}^+(S_0)$ ,  $f_1 \in \text{Homeo}^+(S_1)$ ,  $U_0, U_1$  discos de  $S_0$  y  $S_1$  respectivamente. Supongamos que tenemos:*

i Una conjugación  $h$  de los homeos entre los discos  $U_0$  y  $U_1$ , es decir  $h : U_0 \rightarrow U_1$  homeo tal que  $h(f_0(z)) = f_1(h(z))$  para todo  $z \in S_0$ , que además preserva orientación.

ii  $z_0$  fijo de  $f_0$  y  $z_0^*$  periódico de  $f_0$  con período  $q \geq 2$ , tales que  $z_0 \in U_0$  y  $O(z_0^*) \in U_0$ .

Entonces  $z_1 = h(z_0)$  es fijo de  $f_1$ ,  $z_1^* = h(z_0^*)$  es periódico de  $f_1$  con período  $q$ , y además se cumple  $V_{f_1, z_1^*}(z_1) = V_{f_0, z_0^*}(z_0)$ .

*Demostración.* Podemos asumir que  $S_0 = S_1 = \mathbb{R}^2$ . El hecho de que  $z_1$  sea fijo de  $f_1$  y  $z_1^*$  sea periódico de  $f_1$  se deduce directamente de que  $h$  es una conjugación. Veamos ahora que el número de vueltas se preserva.

Tomamos una isotopía  $I_0 = (f_t^0)_{t \in [0,1]}$  de la identidad a  $f_0$ , y detectamos con ella  $\nu_{I_0, z_0^*}(z_0) = k$ . La observación 4.1 nos permite asumir que la  $I_0$  fija  $z_0$  para todo tiempo, de donde  $\nu_{I_0, z_0^*}(z_0)$  coincide con el índice clásico de una curva (la trayectoria completa  $I_0^q(z_0^*)$ , a quien llamaremos  $\Gamma^*$ ) alrededor del punto  $(z_0)$ , es decir,

$$\nu_{I_0, z_0^*}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^*} \frac{1}{z - z_0} dz.$$

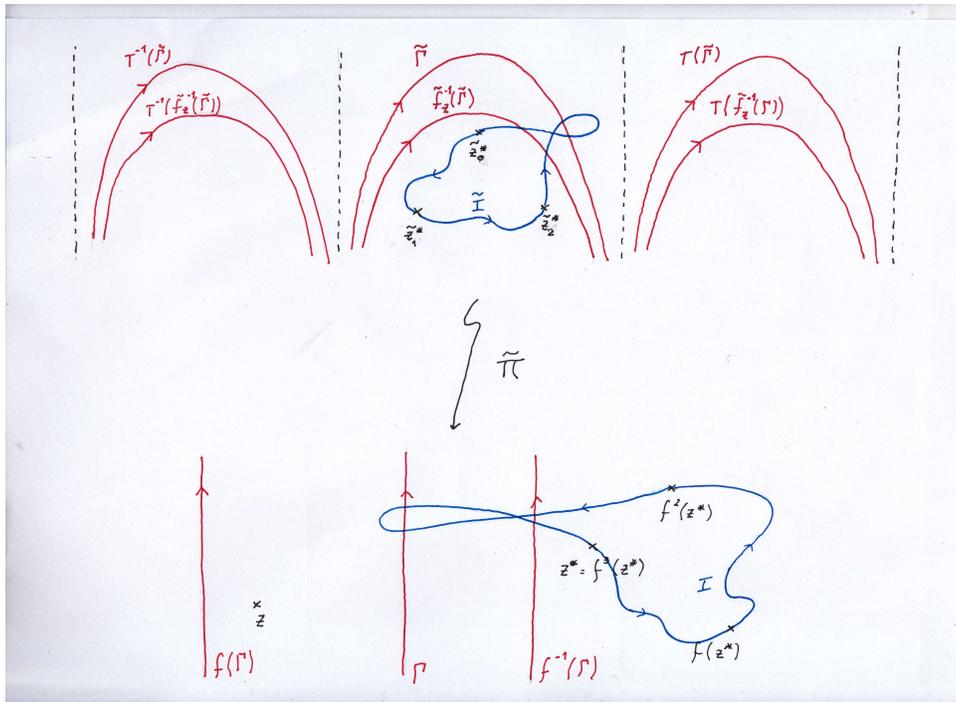
. Solo resta observar que  $h$  también conjugua las isotopías, es decir, podemos definir  $I_1 = (f_t^1)_{t \in [0,1]}$  dada por  $f_t^1(h(z)) := h(f_t^0(z))$ . Más aún, por la construcción que hicimos, el homeo  $h$  manda  $I_0^q(z_0^*)$  en  $I_1^q(z_1^*)$  preservando orientación, de donde el índice de la trayectoria  $I_1^q(z_1^*)$  alrededor de  $z_1$  debe ser también  $k$ , en particular valen lo mismo módulo  $q$ .  $\square$

**Proposición 4.4.** *Sea  $S$  un plano orientado,  $f \in \text{Homeo}^+(S)$  y los puntos  $z$  fijo y  $z^*$  periódico de  $f$ , de período  $q \geq 2$ . Supongamos que existe una recta  $\Gamma$  tal que  $z \in L(\Gamma)$ ,  $O(z^*) \subset R(\Gamma)$ , y que además cumple  $f(\Gamma) \subset L(\Gamma)$ ,  $f^{-1}(\Gamma) \subset R(\Gamma)$ .*

*Entonces  $V_{f, z^*}(z) = 0$ . Más aún, para todo fijo de  $z' \in R(\Gamma)$  fijo de  $f$ , y toda isotopía  $I$  de la identidad a  $f$ , se cumple  $\nu_{I, z'}(z) = 0$  sii  $\nu_{I, z^*}(z) = 0$ .*

*Demostración.* Podemos asumir que  $S = \mathbb{R}^2$ , y  $z = 0$ . Nos vamos al cubrimiento universal  $\tilde{S}$  del anillo  $A_z := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , (como lo construimos en la sección 1) y tomamos  $\tilde{\Gamma}$  un levantado de  $\Gamma$  con la orientación correspondiente, que será una recta en  $\tilde{S}$ . Además, como  $\tilde{\Gamma}$  es el levantado de una curva simple en  $A_z$ , no puede tener a su derecha dos copias del mismo punto, es decir, para todo  $z_0 \in R(\Gamma)$ , existe un único levantado  $\tilde{z}_0 \in R(\tilde{\Gamma})$ . Esto nos dice también que existe un único levantado  $\tilde{f}_z$  de  $f \upharpoonright_{A_z}$  tal que  $\tilde{f}_z(\tilde{\Gamma}) \subset L(\tilde{\Gamma})$ , y  $\tilde{f}_z^{-1}(\tilde{\Gamma}) \subset R(\tilde{\Gamma})$ .

Sabemos que  $z^*$  tiene un único levantado  $\tilde{z}_0^*$  en  $R(\tilde{\Gamma})$ , así como cualquier  $f^k(z^*)$  tiene un único levantado  $\tilde{z}_k^*$  en  $R(\tilde{\Gamma})$ . Sabemos además que, para cada  $k$ , existe un único levantado de  $f_k$  de  $f$  que manda  $\tilde{z}_k^*$  en  $\tilde{z}_{k+1}^*$ . Observamos que todos estos levantados deben cumplir  $\tilde{f}_k(\tilde{\Gamma}) \subset L(\Gamma)$ , y  $\tilde{f}_k^{-1}(\tilde{\Gamma}) \subset R(\Gamma)$ , de donde son iguales a  $\tilde{f}_z$ . Esto nos permite concluir que  $\tilde{z}_0^*$  será periódico para  $\tilde{f}_z$ . Luego basta con tomar una isotopía  $I$  que se levante en  $\tilde{I}$  de la identidad a  $\tilde{f}_z$ , y notar que cumple  $\nu_{I, z^*}(z) = 0$ . Observamos por último que si tomamos  $z' \in R(\Gamma)$ , tiene un único levantado  $\tilde{z}' \in R(\Gamma)$ , que será fijo para  $\tilde{f}_z$ , de donde concluimos que  $\nu_{I, z'}(z) = 0$ .



## 5 Índices y transversalidad dinámica

Vamos a comparar los tres índices que definimos en la Sección 1, una vez que hagamos esto vamos a poder hallar el que nos resulte más cómodo dependiendo de la información que tengamos para cada caso. En lo que resta de esta sección, consideraremos  $S$  una superficie orientable que tiene a  $z_0$  como pinchadura aislada,  $f$  un homeo de  $S$  isotópico a la identidad,  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  una isotopía de la identidad a  $f$ . Supondremos además dos condiciones

1. Para todo  $z \in \text{Fix}(f)$  la trayectoria de  $z$  por  $I$ , que es un lazo, es no homotópicamente trivial en  $S$ .
2. Existe un entorno de la pinchadura  $z_0$  que no tiene ningún fijo de  $f$ .

Tomamos  $\tilde{S}$  el cubrimiento universal de  $S$ , que es un plano. Levantamos  $I$  en  $\tilde{I} = (\tilde{f}_t)_{t \in [0,1]}$  de  $\tilde{S}$ . Si tomamos el levantamiento canónico, esto es,  $\tilde{f}_0 = \text{Id}$ , tenemos que  $\tilde{f}_1$  conmuta con las transformaciones de cubrimiento, y la condición 1. nos dice que no tiene ningún punto fijo. La *versión foliada equivariante del teorema de traslación de Brouwer* nos dice que existe una foliación topológica orientada  $\tilde{\mathcal{F}}$ , que es invariante por las transformaciones de cubrimiento y está formada por *líneas de Brouwer* para  $\tilde{f}_1$ : toda hoja  $\tilde{\phi}$  es una recta en  $\tilde{S}$  que separa  $\tilde{f}_1(\tilde{\phi}) \subset L(\tilde{\phi})$ , de  $\tilde{f}_1^{-1}(\tilde{\phi}) \subset R(\tilde{\phi})$ . En [LC2] se realiza la construcción de esta foliación, y se prueba además la siguiente propiedad equivalente: todo punto  $\tilde{z}$  tiene una curva que lo une con  $\tilde{f}_1(\tilde{z})$  y que es positivamente transversal a la foliación. Esto nos dice que  $\tilde{\mathcal{F}}$  es el levantado de una foliación  $\mathcal{F}$  que es dinámicamente transversal a  $I$ : la trayectoria de cualquier punto  $z$  es homotópica (a extremos fijos) a una curva positivamente transversal a la foliación.

Siendo que  $f$  es isotópica a la identidad, tenemos que fija las pinchaduras: sabemos que pinchaduras van en pinchaduras por  $f$ ; observamos que la identidad las fija, y al tener una deformación continua de la identidad a  $f$  en el intervalo  $[0, 1]$ , tenemos que deben permanecer fijas para todo tiempo. Podemos entonces extender  $f$  a un homeo de  $S \cup z_0$  (que tendrá el mismo nombre), teniendo a  $z_0$  como punto fijo aislado. Análogamente extendemos  $I$  a una que fija  $z_0$  para todo tiempo, y  $\mathcal{F}$  a una que tiene una singularidad en  $z_0$ . Tiene sentido entonces hablar de  $i(f, z_0)$ ,  $i(I, z_0)$  y  $i(\mathcal{F}, z_0)$ , que son los que compararemos en esta sección.

*A priori* parece mucho más conveniente calcular el índice de una foliación, que tiene rigidez, que el de una isotopía, donde los caminos se pueden cortar o entrelazar. Damos entonces un resultado en esta dirección.

**Proposición 5.1.** *Si  $S$  no es un plano, entonces  $i(\mathcal{F}, z_0) = i(I, z_0) + 1$ .*

**Lema 5.2.** *Podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $z_0 = 0$ .*

*Demostración.* Comenzamos por observar lo siguiente: si tomamos un pequeño anillo  $U$  que tiene a  $z_0$  como uno de sus fines, y una curva  $\gamma$  que genera  $\pi_1(U)$ , entonces esa curva es no trivial en  $S$ . Es clave en este paso la hipótesis que descarta que  $S$  sea un plano, es decir,  $S \neq S^2 \setminus \{z\}$ , ya que darle una vuelta a  $z$  es homotópico a no darle ninguna (desarmo la curva por detrás). Esto nos está diciendo que la transversalidad entre una dinámica entre una isotopía y una foliación no es un problema local.

El resto es tomar cubrimientos y cocientes de forma astuta: levantamos  $\gamma$  en  $\tilde{\gamma}$  del cubrimiento universal  $\tilde{S}$ , luego  $\tilde{\gamma}$  será una curva no cerrada puesto que  $\gamma$  no era trivial en  $S$ . Tenemos entonces que  $\tilde{\gamma}$  conecta  $\tilde{z}$  con  $\tilde{T}(\tilde{z})$ , siendo  $\tilde{T}$  una transformación de cubrimiento (nuevamente, no trivial). Podemos entonces tomar el anillo  $\hat{S} := \tilde{S}/\tilde{T}$  (siendo  $\tilde{\pi}$  la proyección de cubrimiento correspondiente) y tenemos que su grupo fundamental estará generado por  $\hat{\gamma} = \tilde{\pi}(\tilde{\gamma})$ .

La isotopía  $\tilde{I}$  y la foliación  $\tilde{\mathcal{F}}$  dinámicamente transversal a esta última, se proyectan respectivamente en  $\hat{I}$  y  $\hat{\mathcal{F}}$ , preservando la transversalidad dinámica. Tomamos  $\hat{\pi} : \hat{S} \rightarrow S$ , y definimos  $\hat{U}$  como la componente conexa de  $\hat{\pi}^{-1}(U)$  que contiene a  $\hat{\pi}^{-1}(\gamma)$ . Tomando  $\hat{z}_0$  como el fin del anillo  $\hat{U}$  correspondiente a  $z_0$ , es claro que podemos extender  $\hat{I}$  y  $\hat{\mathcal{F}}$  a  $\hat{S} \cup \hat{z}_0$ , fijándolo en ambos casos. Tenemos además que  $\hat{\pi}$  conjuga  $f$  y su correspondiente  $\hat{f}$ , esto es  $\hat{f} \upharpoonright_{\hat{U} \cap \hat{f}^{-1}(\hat{U})} \sim f \upharpoonright_{U \cap f^{-1}(U)}$ , induce además una conjugación local entre  $I$  e  $\hat{I}$ , así como entre  $\mathcal{F}$  y  $\hat{\mathcal{F}}$ , luego  $i(I, z_0) = i(\hat{I}, \hat{z}_0)$ ,  $i(\mathcal{F}, z_0) = i(\hat{\mathcal{F}}, \hat{z}_0)$ .  $\square$

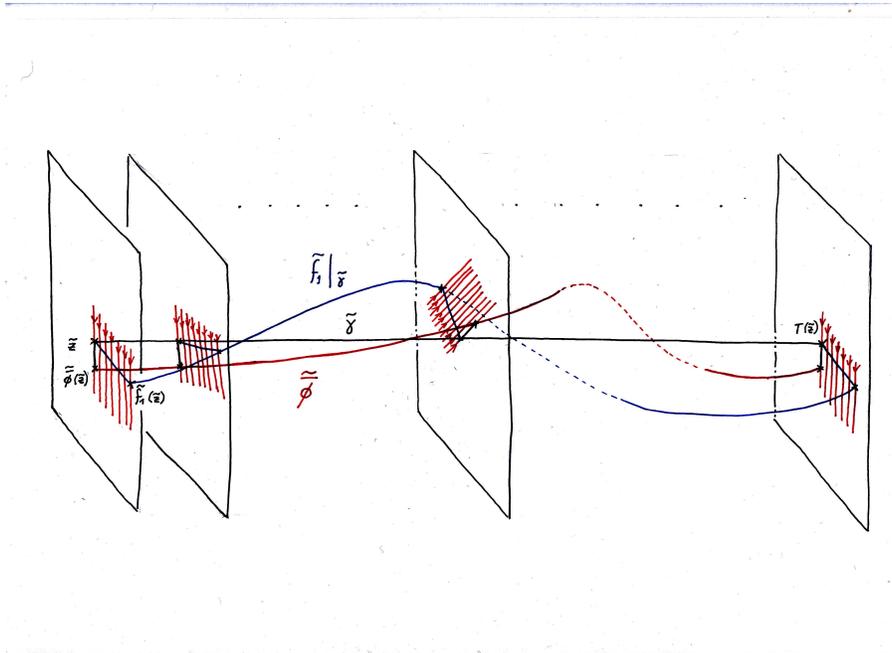
*Demostración de la Proposición 5.1.* Asumiendo entonces que estamos en un anillo  $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  con  $z_0 = 0$  como uno de sus fines, y recordando las definiciones que dimos para los índices de la isotopía y la foliación, razonamos de la siguiente manera. Nos vamos al cubrimiento universal  $\tilde{S}$ , y tomamos  $\tilde{\gamma}$  como el levantado de una curva  $\gamma$  libremente homotópica a  $\partial D_1$  en  $S$ , donde  $D_1$  es el disco de radio 1. Tenemos entonces que  $\tilde{\gamma}$  une  $\tilde{z}$  con  $\tilde{T}(\tilde{z})$ . Podemos cubrir  $\tilde{\gamma}$  con una familia de finitos  $\tilde{V}_i$  entornos tubulares de  $\tilde{\mathcal{F}}$ , y tomar un mapa  $\tilde{\phi} : \tilde{\gamma} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\tilde{\phi}(z) \in \tilde{\phi}_{z, U_i}^+$ . Si miramos el mapa  $\tilde{g}_1$ , con  $\tilde{g}_1(t) = \tilde{\phi}(\tilde{\gamma}(t)) - \tilde{\gamma}(t) / \|\tilde{\phi}(\tilde{\gamma}(t)) - \tilde{\gamma}(t)\|$ , tenemos que  $\deg(\tilde{g}_1) = i(\mathcal{F}, 0) - 1$ , ya que al cortar el anillo para ir al cubrimiento universal estamos *deshaciendo una vuelta* (recordar como definimos el índice de una foliación en la Sección 1). Por otro lado, si miramos la isotopía  $\tilde{I} = (\tilde{f}_t)_{t \in [0,1]}$  del cubrimiento universal,

y definimos el mapa  $\tilde{g}_2$  con  $\tilde{g}_2(t) = \tilde{f}_1(\tilde{\gamma}(t)) - \tilde{\gamma}(t) / \|\tilde{f}_1(\tilde{\gamma}(t)) - \tilde{\gamma}(t)\|$ , tenemos que  $\deg(\tilde{g}_2) = i(I, 0)$  (por definición).

Veamos entonces que estos dos mapas tienen el mismo grado, lo que concluirá la prueba. Sea  $\tilde{\delta}$  una curva positivamente transversal a  $\tilde{\mathcal{F}}$ , tal que  $\tilde{\delta}(0) = \tilde{z}, \tilde{\delta}(1) = \tilde{f}_1(\tilde{z})$ . Como  $\tilde{\mathcal{F}}$  no tiene singularidades, tenemos que el conjunto de hojas  $\tilde{O}_{\tilde{z}}$  que intersectan a  $\tilde{\delta}$ , no depende de la curva elegida, y es homeomorfo a  $[0, 1] \times \mathbb{R}$ . Luego el conjunto  $\tilde{O}_{\tilde{z}}$  es homeomorfo a  $([0, 1] \times \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ , y es contractible. Vamos a construir un fibrado que tiene a  $\tilde{\gamma}$  como base, y a  $\tilde{O}_{\tilde{z}}$  como la fibra por  $\tilde{z}$ . Tomamos

$$\tilde{E} = \{(\tilde{z}, \tilde{z}') \in \tilde{\gamma} \times \mathbb{R}^2 : \tilde{z}' \in \tilde{O}_{\tilde{z}}\},$$

y luego definimos  $\tilde{p} : \tilde{E} \rightarrow \tilde{\gamma}$ , con  $\tilde{p}(\tilde{z}, \tilde{z}') = \tilde{z}$ . Para ver que este fibrado es localmente trivial, observemos que podemos extender  $\tilde{\delta}$  en  $\tilde{\delta}'$  en cualquiera de sus vértices, de forma que siga siendo positivamente transversal a  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Si definimos  $\tilde{O}$  como el conjunto de hojas de  $\tilde{\mathcal{F}}$  que intersectan a  $\tilde{\delta}'$ , podemos pensar a  $\tilde{O}$  como  $[0, 1] \times \mathbb{R}$ . Existe (por continuidad), para cada  $\tilde{z} \in \tilde{\gamma}$ , un entorno  $\tilde{U}_{\tilde{z}}$  tal que  $\tilde{O}_{\tilde{z}'} \subset \tilde{O}$ , para todo  $\tilde{z}' \in \tilde{U}_{\tilde{z}}$ . Más aún, tenemos que  $\tilde{O}_{\tilde{z}'} = [\tilde{\alpha}(\tilde{z}'), \tilde{\beta}(\tilde{z}')] \times \mathbb{R}$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son funciones continuas que van al  $[0, 1]$ .



Tenemos entonces que  $(\tilde{E}, \tilde{p}, \tilde{\gamma})$  es un fibrado localmente trivial. Observamos que cualquier sección  $\tilde{r}$  induce de forma natural un mapa  $\tilde{r}$  de  $[0, 1]/0 \sim 1$  en  $S^1$ , mandando  $t$  en  $\tilde{r}(\tilde{\gamma}(t)) - \tilde{\gamma}(t) / \|\tilde{r}(\tilde{\gamma}(t)) - \tilde{\gamma}(t)\|$ , y cumple además que  $\tilde{r}(\tilde{z}) \neq \tilde{z}$  (de donde el mapa está bien definido). Como la base es  $[0, 1]$  y la fibra es contractible, el conjunto de las secciones es arcoconexo, y el grado del mapa  $\tilde{r}$  no depende de la sección elegida. Solo resta observar que  $\tilde{f}_1 \upharpoonright_{\tilde{\gamma}}$  y  $\tilde{\phi}$  son dos secciones del fibrado.  $\square$

La proposición 5.1 no es cierta si  $S = \mathbb{R}^2$ . Pensemos por ejemplo en  $f$  como el tiempo uno de un flujo en  $S^2$  que tiene a  $\infty$  como su única singularidad y tal que el flujo alrededor de  $\infty$  es como el de un dipolo magnético (ver figura), tomemos como isotopía  $I$  al camino por el flujo y como foliación  $\mathcal{F}$  la obtenida de integrar el campo de vectores ortogonales obtenido de rotar el que induce el flujo, 90 grados a la derecha en cada punto.

**Observación 5.3.** *Si  $S$  es un plano (en particular, homeomorfo a una esfera con una pinchadura que llamaremos  $\infty$ ), la fórmula de Poincaré-Hopf nos asegura que  $i(f, \infty) = 2$ ,  $i(\mathcal{F}, \infty) = 2$ .*

Recordemos que todas las otras isotopías de  $Id$  a  $f$  son homotópicas salvo componer con  $\mathcal{C}_{\infty,0}$ , y que de todas estas isotopías  $(\mathcal{C}_{\infty,0}^k I)_{k \in \mathbb{Z}}$  existe un único valor  $k_0$  tal que  $i(\mathcal{C}_{\infty,0}^{k_0} I, \infty) = i(f, \infty) - 1 = 1$ , y para todos los demás se tiene  $i(\mathcal{C}_{\infty,0}^k I, \infty) = 0$ . El problema radica en el camino que recorre  $z$  por la isotopía  $I$  es homotópico al que recorre por  $\mathcal{C}_{\infty,0}^k I$  para cualquier valor de  $k$  (recordemos que  $S$  es un plano). Ahora bien, aún siendo estos dos caminos homotópicos, tenemos que para hacer la homotopía entre ellos es necesario salirse de un pequeño entorno de  $\infty$  (si tomamos un pequeño entorno de  $\infty$  mirado en  $S^2$  y le quitamos  $\infty$ , obtenemos un anillo, de donde no pueden ser homotópicos los caminos en cuestión). Tenemos entonces que si  $\mathcal{F}$  es positivamente transversal a  $I$ , entonces también es positivamente transversal a  $\mathcal{C}_{\infty,0}^k I$ , para cualquier valor de  $k$ , (aún cuando estas isotopías no son homotópicas entre sí), pero no es *localmente dinámicamente transversal*. Diremos esto último de una pareja  $(I, \mathcal{F})$  si además de que toda curva por  $I$  tenga un representante homotópico positivamente transversal, podemos hacer homotopía manteniéndonos en un entorno de  $z_0$ .

Vincularemos ahora el índice de una función con el de una foliación (en las hipótesis del comienzo de la sección).

**Proposición 5.4.** *Si  $i(\mathcal{F}, z_0) \neq 1$ , entonces  $i(f, z_0) = i(\mathcal{F}, z_0)$ .*

*Demostración.* Para el caso en el que  $S$  es un plano, la Observación 5.3 no dice que ambos índices valen 2 (en particular son iguales). Si por el contrario  $S$  no es un plano, podemos proceder como lo hicimos en el Lema 5.2 y asumir que  $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $z_0 = 0$ . Como  $\mathcal{F}$  tiene a 0 como su única singularidad, y además  $i(\mathcal{F}, 0) \neq 1$ , tenemos que  $\mathcal{F}$  no contiene ninguna hoja cerrada (en caso contrario, tendría una singularidad de índice 1 en su interior). Razonando del mismo modo, vemos que no puede existir ninguna curva positivamente transversal a la foliación que o bien sea cerrada o bien intersekte a la misma hoja dos veces (en particular toda hoja de la foliación es errante, de donde es una recta). Razonamos ahora de forma análoga a como lo hicimos en la proposición 5.1: si tomamos una curva  $\delta$  positivamente transversal a la foliación, podemos definir  $O_z$  como la unión de las hojas que cortan a  $\delta$ , y luego tenemos  $P_z = O_z \setminus \{z\} \simeq ([0, 1] \times \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ . Tomando  $E = \{(z, z') \in \gamma \times \mathbb{R}^2 : z' \in P_z\}$ , y la proyección  $p(z, z') = z$ , obtenemos un fibrado localmente trivial con base  $\delta$ , y concluimos como en la proposición 5.1.  $\square$

**Corolario 5.5.** *Si  $i(f, z_0) = 1$ , entonces  $i(\mathcal{F}, z_0) = 1$ .*

**Recopilación:** - Veamos la información que tenemos hasta ahora sobre el comportamiento de los índices, para el caso en el que  $S$  no es un plano.

1. Si  $i(f, z_0) = 1$ , entonces el Corolario 5.5 y la Proposición 5.1 nos dicen que  $i(\mathcal{F}, z_0) = 1$ , y que  $i(I, z_0) = 0$ .
2. Si tenemos  $i(f, z_0) \neq 1$ , entonces por la proposición 5.4 tenemos dos casos posibles: o bien  $i(\mathcal{F}, z_0) = 1$ , en cuyo caso concluimos que  $i(I, z_0) = 0$ , o bien  $i(\mathcal{F}, z_0) = i(f, z_0)$ , y en ese caso tenemos  $i(I, z_0) = i(f, z_0) - 1$ , (el caso de nuestra isotopía *favorita*).

Vamos ahora al punto clave de esta sección. Hasta ahora sabemos que si tenemos  $f$  con  $i(f, z_0) \neq 1$  y tomamos una isotopía local  $I$  en  $z_0$  *favorita* para  $f$  (es decir,  $i(I, z_0) = i(f, z_0) - 1 \neq 0$ ), entonces al componerla con una calesita en un pequeño anillo  $U$  entorno de  $z_0$ , la nueva isotopía  $I'$  cumple  $i(I', z_0) = 0$ , de donde la nueva foliación dinámicamente transversal  $\mathcal{F}'$ , de existir, debe cumplir  $i(\mathcal{F}', z_0) = 1$ . La próxima proposición dice aún más: prueba que  $z_0$  es una fuente de la foliación si la calesita fue anti-horaria respecto a  $z_0$ , y un pozo en caso contrario, esto es, *el hecho de que todos los*

*puntos giren por la isotopía en sentido anti-horario (horario) empuja a la foliación hacia afuera (adentro).*

Fijemos entonces una isotopía local de la identidad en  $z_0$  homotópica a una calesita en un pequeño entrono de  $z_0$ , que denominaremos  $\mathcal{C}_{z_0}$ . Sea  $S'$  orientable con una pinchadura aislada  $z'_0$ , y sean  $f'$  e  $I'$  un homeo de  $S'$  y una isotopía de la identidad a  $f'$ , en las condiciones del comienzo de la sección. Supongamos además que la isotopía local  $I'$  en  $z'_0$  es conjugada a una isotopía local en  $z_0$ , que es a su vez homotópica a  $\mathcal{C}_{z_0}^k I$ . Consideremos ahora una foliación  $\mathcal{F}'$  dinámicamente transversal a  $I'$ . Supongamos además que ni  $S$  ni  $S'$  son planos, y recordemos que  $i(\mathcal{F}, z_0) \neq 1$ , pues  $I$  era una isotopía favorita. Tenemos entonces:

**Proposición 5.6.**

1.  $i(\mathcal{F}, z_0) = i(\mathcal{F}', z'_0)$ , si  $k = 0$ ;
2.  $z'_0$  es una fuente de  $\mathcal{F}'$ , si  $k > 0$ ;
3.  $z'_0$  es un pozo de  $\mathcal{F}'$ , si  $k < 0$ .

El primer resultado es fácil de chequear: si  $I'$  es homotópica a  $I$ , tenemos  $i(I', z'_0) = i(I, z_0) \neq 1$ , y luego la proposición 5.1 nos dice que  $i(\mathcal{F}', z'_0) = i(\mathcal{F}, z_0)$ . Probaremos entonces el segundo resultado, la prueba del tercero es análoga a la que haremos.

Razonando nuevamente como en el Lema 5.2, podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $S = S' = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , y que  $z_0 = z'_0 = 0$ . Recordamos que  $f$  y  $f'$  son conjugadas en un pequeño disco  $D_r$  de radio  $r$ , teniendo a 0 como único punto fijo aislado. Levantamos las isotopías  $I$  e  $I'$  a  $\tilde{I} = (\tilde{f}_t)_{t \in [0,1]}$  e  $\tilde{I}' = (\tilde{f}'_t)_{t \in [0,1]}$  del cubrimiento universal como lo hicimos en la Sección 1: es un plano en ambos casos. Si  $T$  es la transformación de cubrimiento que traslada todo un dominio fundamental a la derecha (y coincide con dar una vuelta en sentido anti-horario alrededor de 0), tomando  $\tilde{f}_0 = \tilde{f}'_0 = Id$ , tenemos que  $\tilde{f}'_1 = T^k \circ \tilde{f}_1$  (con  $k > 0$ ) en  $\pi^{-1}(\overline{D_r})$ , esto es,  $\mathbb{R} \times [-\log(r), +\infty)$ . Levantamos también  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}'$  en dos foliaciones  $\tilde{\mathcal{F}}$  y  $\tilde{\mathcal{F}}'$ .

La estructura de la prueba es la siguiente. Primero veremos que el hecho de que  $k$  sea mayor que 0, esto es, que las cosas por la isotopía  $I'$  giren *anti-horario*, implica que ninguna hoja  $\phi$  de la foliación  $\mathcal{F}'$  cumple  $\omega(\phi) = 0$ . Esta es la parte más técnica y tortuosa de la prueba. Una vez que tenemos esto, veremos que entonces necesariamente toda hoja en  $D_r$  sale de  $D_r$ . Luego utilizaremos esto para probar que el  $\alpha$ -límite de cualquier hoja en  $D_{r'}$  (con  $r'$  suficientemente pequeño) es el 0, de donde veremos que si hacemos *fluir* el

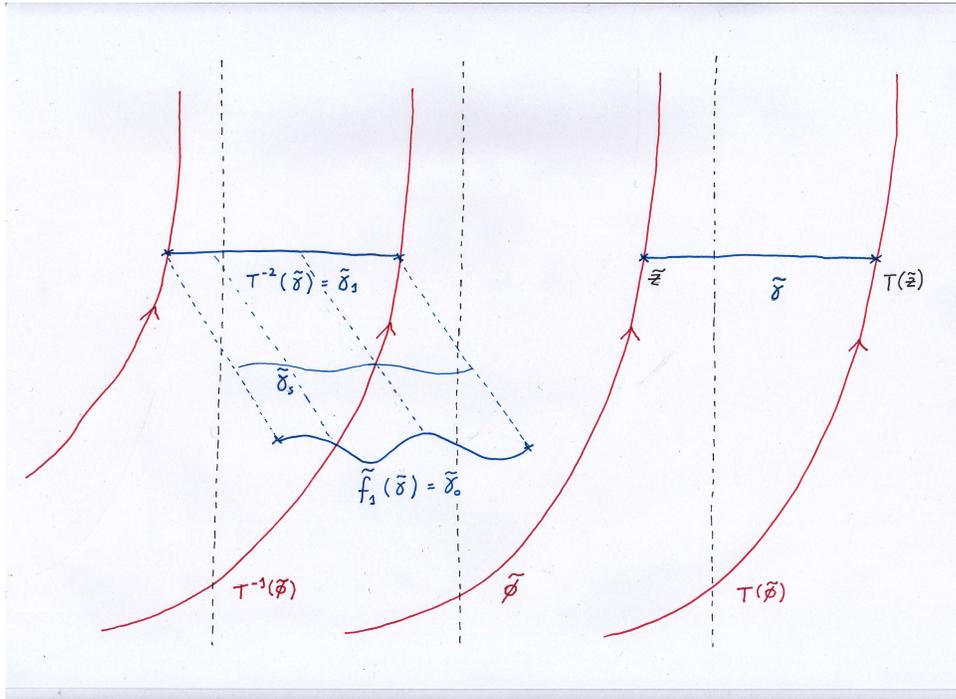
disco  $D_{r'}$  por la foliación, tenemos un anillo donde la foliación es conjugada a la radial.

**Lema 5.7.** *Si  $k > 0$ , no existe ninguna hoja  $\phi'$  de  $\mathcal{F}'$  tal que  $\omega(\phi') = \{0\}$ .*

*Demostración.* Supongamos por absurdo que existe una tal hoja. Recordando la Observación 1.3, tenemos dos opciones para su  $\alpha$ -límite: o bien es también el 0, o bien no contiene al 0. Separamos la prueba en estos dos casos. Recordemos que por la construcción de la foliación  $\mathcal{F}'$ , tenemos que si levantamos una hoja  $\phi$  a  $\tilde{\phi}$  del cubrimiento universal (levantando  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  como lo hicimos en la Sección 1), tenemos  $\tilde{f}'_1(L(\tilde{\phi})) \subset L(\tilde{\phi})$ ,  $\tilde{f}'_1^{-1}(R(\tilde{\phi})) \subset R(\tilde{\phi})$ .

*Caso A -  $\alpha(\phi)$  no contiene a 0.* Tenemos que  $T^{-1}(L(\tilde{\phi})) \subset L(\tilde{\phi})$ . Además, tenemos que

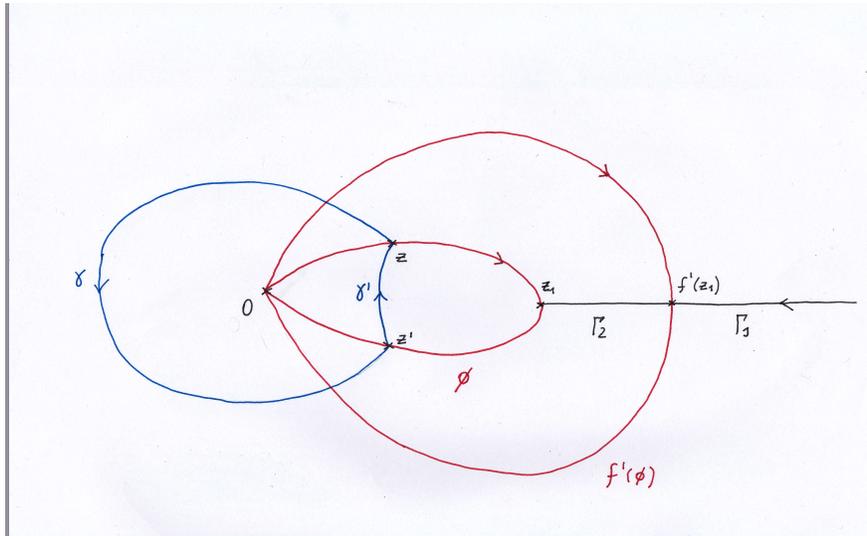
$$\tilde{f}_1(L(\tilde{\phi})) = T^{-k} \circ \tilde{f}'_1(L(\tilde{\phi})) \subset T^{-k}(L(\tilde{\phi})) \subset T^{-1}(L(\tilde{\phi}))$$



Esto nos dice que las cosas caen por  $\tilde{f}_1$ , lo suficiente a la izquierda como para que el índice de la isotopía  $i(I, 0)$  sea 0. Para ver esto, tomemos

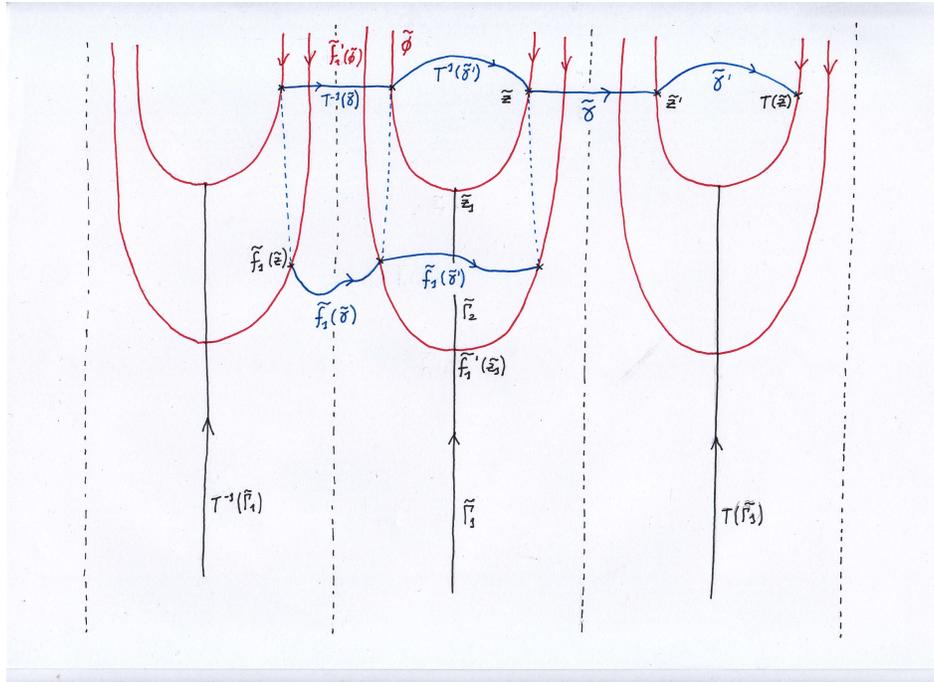
$\tilde{\gamma}$  un segmento de recta que una  $\tilde{z} \in \tilde{\phi}$  con  $T(\tilde{z})$ . Por la cuenta que hicimos encima, tenemos que  $\tilde{f}_1(\tilde{\gamma}) \subset L(\tilde{\phi})$ . Construimos ahora una familia de caminos  $(\tilde{\gamma}_s)_{s \in [0,1]}$  incluida en  $L(\tilde{\phi})$  que varíe continuamente, y tal que:  $\tilde{\gamma}_0 = \tilde{f}_1 \circ \tilde{\gamma}$ ,  $\tilde{\gamma}_1 = T^{-2} \circ \tilde{\gamma}$ ,  $\tilde{\gamma}_s(1) = T(\tilde{\gamma}_s(0))$  para todo  $s \in [0,1]$ . Fijado  $s$  tenemos que el mapa  $g(t) := \tilde{\gamma}_s(t) - \tilde{\gamma}(t) / \|\tilde{\gamma}_s(t) - \tilde{\gamma}(t)\|$  que va de  $[0,1]/0 \sim 1$  en  $S^1$  está bien definido, y su grado no depende de  $s$ . Sólo resta observar que vale 0 para  $s = 0$ , y vale  $i(I, 0)$  cuando  $s = 1$ . Pero esto es una contradicción, pues habíamos asumido que  $I$  era nuestra isotopía favorita, de donde debe cumplir  $i(I, 0) \neq 0$ .

*Caso B* -  $\alpha(\phi) = \{0\}$ . Como tenemos que  $\omega(\phi)$  también es 0, la hoja  $\phi$  divide a  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  en dos componentes conexas, una de las cuales es un disquito acotado. Supongamos que es la que está a la derecha de  $\phi$ . Como  $\mathcal{F}'$  es dinámicamente transversal a  $I'$ , tenemos que  $\overline{R(\phi)} \setminus \{0\} \subset f'(R(\phi))$ , esto es, el relleno de  $f'(\phi)$  contiene al relleno de  $\phi$ . Elegimos ahora un punto  $z_1 \in \phi$  y tomamos una semirrecta  $\Gamma_1$  contenida en  $L(f'(\phi))$ , que comience en  $\infty$  y termine en  $f'(z_1)$ . Podemos luego completarla en una semirrecta  $\Gamma_2$  con un segmento en la corona comprendida entre  $L(\phi)$  y  $R(f'(\phi))$ , que una  $f'(z_1)$  con  $z_1$ . Tomamos ahora  $z \in \phi_{z_1}^-$ , y  $z' \in \phi_{z_1}^+$ . Tomamos ahora dos arcos:  $\gamma \subset D_r$  incluido en  $L(\phi)$  (salvo los bordes), que una  $z$  con  $z'$  y sea disjunto de  $\Gamma_2 \cup f'^{-1}(\Gamma_2)$ ; y por otro lado  $\gamma' \subset D_r$  incluido en  $R(\phi)$  (nuevamente salvo los bordes) que vaya de  $z'$  a  $z$ . Observar que  $\gamma\gamma'$  es una curva que pega una vuelta anti-horaria alrededor del 0.



Levantamos  $\phi$  en  $\tilde{\phi} \in \mathcal{F}'$  del cubrimiento universal de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  (nuevamente como lo hicimos en la Sección 1), y llamamos  $\tilde{z}_1$  al levantado de  $z_1$  que está en  $\tilde{\phi}$ . Definimos  $\tilde{\Gamma}_2$  como el levantado de  $\Gamma_2$  que termina en  $\tilde{z}_1$ . Luego  $\tilde{\Gamma}_1 \subset \tilde{\Gamma}_2$  será el levantado de  $\Gamma_1$  que termina en  $\tilde{f}'_1(\tilde{z}_1)$ . El camino  $\gamma$  se levanta en  $\tilde{\gamma}$  que une  $\tilde{z}$  con  $\tilde{z}' \in T(\tilde{\phi})$ , y  $\tilde{\gamma}'$  que une  $\tilde{z}'$  con  $T(\tilde{z})$ . Ahora vamos a razonar como en el caso A, vamos a mostrar que  $\tilde{f}_1(\tilde{\gamma})$  y  $\tilde{f}_1(\tilde{\gamma}')$  caen suficientemente a la izquierda de  $\tilde{\gamma}$  y  $\tilde{\gamma}'$  como para que el índice de  $I$  sea 0, lo cual nos conduce nuevamente a una contradicción, de forma análoga al caso anterior.

Observamos que  $\tilde{\gamma}$  está incluida en  $R(\tilde{\Gamma}_2 \tilde{\phi}_{z_1}^+)$ , y que tanto  $\tilde{f}_1(\tilde{\gamma})$  como  $T^{-1}(\tilde{\gamma})$  están en  $L(\tilde{\Gamma}_2 \tilde{\phi}_{z_1}^+)$  (salvo eventualmente un borde de  $T^{-1}(\tilde{\gamma})$ ), de donde puedo construir una familia de caminos  $(\tilde{\gamma}_s)_{s \in [0,1]}$  de  $\tilde{f}_1(\tilde{\gamma})$  a  $T^{-1}(\tilde{\gamma})$  que varíe continuamente y esté incluida en la clausura de  $L(\tilde{\Gamma}_2 \tilde{\phi}_{z_1}^+)$  para todo  $s \in [0, 1]$ . De forma análoga, tenemos que  $\tilde{\gamma}' \subset R(\tilde{\Gamma}_1 \tilde{f}'_1(\tilde{\phi}_{z_1}^-))$ , mientras que los caminos  $\tilde{f}_1(\tilde{\gamma}')$  y  $T^{-1}(\tilde{\gamma}')$  viven en  $L(\tilde{\Gamma}_1 \tilde{f}'_1(\tilde{\phi}_{z_1}^-))$  (salvo eventualmente un borde de  $\tilde{f}_1(\tilde{\gamma}')$ ), de donde puedo definir una familia de caminos  $(\tilde{\gamma}'_s)_{s \in [0,1]}$  que una  $\tilde{f}_1(\tilde{\gamma}')$  con  $T^{-1}(\tilde{\gamma}')$ , que varíe continuamente y esté incluida en la clausura de  $L(\tilde{\Gamma}_1 \tilde{f}'_1(\tilde{\phi}_{z_1}^-))$ . La siguiente figura ilustra el caso  $k = 1$ .



Fijo  $s$ , tomamos ahora el mapa  $g(t) := \tilde{\gamma}_s \tilde{\gamma}'_s(t) - \tilde{\gamma} \tilde{\gamma}'(t) / \|\tilde{\gamma}_s \tilde{\gamma}'_s(t) - \tilde{\gamma} \tilde{\gamma}'(t)\|$ , que está bien definido de  $[0, 1]/0 \sim 1$  en  $S^1$ , y cuyo grado no depende de  $s$ . Resta observar que vale 0 cuando  $s = 0$ , y vale  $i(I, 0)$  cuando  $s = 1$ ; luego concluimos como en el caso  $A$ .  $\square$

*Remate.* Observamos que no puede haber hojas cerradas de  $\mathcal{F}'$  en  $\overline{D_r}$ . Si así fuera, siendo que 0 es el único fijo en  $D_r$  tenemos que esa hoja debe encerrar al 0, de donde concluimos  $i(f, 0) = 1$ , y luego con el Corolario 5.5 tendríamos que  $i(\mathcal{F}, 0) = 1$ , lo cual es nuevamente una contradicción. El teorema de Poincaré-Bendixson nos permite entonces afirmar que toda hoja en  $\overline{D_r}$  sale de  $\overline{D_r}$  en el futuro.

Veamos ahora que si tomamos  $r'$  suficientemente pequeño, entonces se cumple que  $\alpha(\phi_z) = 0$  para todo  $z \in D'_r \setminus \{0\}$ . Suponiendo lo contrario, usando nuevamente que no hay hojas cerradas en  $D_r$  podemos encontrar una sucesión de puntos  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$  tales que  $\phi_{z_n}^-$  sale de  $D_r$ . Sea  $z'_n \in \partial D_r$  el primer punto de  $\phi_{z_n}^-$  que está afuera de  $D_r$ . Tomando  $z'$  punto de acumulación de  $(z_n)$ , tendríamos que  $\phi_{z'}^+$  vive por siempre dentro de  $\overline{D_r}$ , lo cual es absurdo pues acabamos de probar que toda hoja en  $\overline{D_r}$  sale de  $\overline{D_r}$ . Recordando que la foliación nos induce un flujo topológico podemos hacer fluir el disco  $D'_r$  y obtener  $U = \bigcup_{z \in (D'_r \setminus \{0\})} \phi_z$ , donde la foliación será radial por como construimos  $U$ . Además podemos ver que  $U$  es un anillo: uno de sus fines es el 0, y el resto del complemento tiene solo una componente conexa ya que puede ser vista como intersección decreciente de cerrados conexos en la esfera. Luego, concluimos que  $U$  tiene género 0 y 2 pinchaduras, de donde es un anillo por el teorema de clasificación de superficies.  $\square$

## 6 Función dual

**Definición 6.1.** Sea  $\Gamma$  una curva cerrada en  $S^2$ . Tomando  $z_0 \in S^2 \setminus \Gamma$ , definimos una función dual  $\lambda_\Gamma : S^2 \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $\lambda_\Gamma(z) = \Gamma \wedge \gamma$ , donde  $\gamma$  es un camino de  $z_0$  a  $z$ , y  $\Gamma \wedge \gamma$  es el número de intersección algebraico entre  $\Gamma$  y  $\gamma$ .

Es fácil ver que esta función está bien definida para el caso en el que  $\Gamma$  es simple (Jordan), luego si tiene una autointersección basta pensarla como la concatenación de dos simples  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , y luego definir  $\lambda_\Gamma := \lambda_{\Gamma_1} + \lambda_{\Gamma_2}$ , y análogamente si tiene finitas autointersecciones.

Para casos más complejos, observamos que  $\Gamma$  es homóloga a 0 por vivir en  $S^2$ , de donde puede ser vista como el borde de una superficie  $S_\Gamma$ . Luego, para ver que la función dual está bien definida tenemos que probar que el número de intersección algebraico de cualquier lazo  $\gamma_0$  basado en  $z_0$ , con el lazo  $\Gamma$ , es 0. Supongamos que  $z_0$  está en la superficie con borde delimitada por  $\Gamma$  (el otro caso es análogo). Vamos recorriendo el lazo  $\gamma_0$  y observando qué sucede con el número de intersección. Cada vez que  $\gamma_0$  sale de  $S_\Gamma$  (atravesando el borde), el número aumenta en 1, y cada vez que entra a  $S_\Gamma$  (también atravesando el borde), el número disminuye en 1 (puede ocurrir a la inversa dependiendo de la orientación de  $\Gamma$ ). Como  $\gamma_0$  es un lazo, tenemos que la cantidad de veces que sale de  $S_\Gamma$  es igual a la cantidad de veces que entra, tenemos que  $\gamma_0 \wedge \Gamma = 0$ , que es lo que queríamos.

Como el argumento de recién funciona para cualquier lazo  $\gamma$ , tenemos lo siguiente:

**Observación 6.2.** Dados  $z, z' \in S^2 \setminus \Gamma$ , se cumple  $\lambda_\Gamma(z') - \lambda_\Gamma(z) = \Gamma \wedge \gamma$ , donde  $\gamma$  es cualquier camino de  $z$  a  $z'$ .

Tomemos  $f \in \text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$ , e  $I$  una isotopía de la identidad a  $f$ . Si tenemos  $z^*$  periódico de  $f$  de período  $q \geq 2$ , definimos  $\Gamma := I^q(z^*)$  la trayectoria completa de  $z^*$ , es decir,  $\Gamma = \prod_{1 \leq k \leq q} I(f^k(z^*))$ . Luego la función dual  $\lambda_\Gamma$  está bien definida en el conjunto  $\text{Fix}(I)$ , a menos de una constante. Llamaremos  $\lambda_{I, z^*}$  a la restricción de  $\lambda_\Gamma$  al conjunto  $\text{Fix}(I)$  (que tiene toda la información que nos interesa).

**Proposición 6.3.** Si  $z, z' \in \text{Fix}(I)$ ,  $\lambda_{I, z^*}(z') - \lambda_{I, z^*}(z) = \nu_{I|_{S^2 \setminus \{z\}}, z^*}(z')$ .

*Demostración.* Si  $z, z' \in \text{Fix}(I)$ , es fácil observar que  $\nu_{I|_{S^2 \setminus \{z\}}, z^*}(z')$  es igual al índice de  $\Gamma$  respecto a  $z$  en el plano  $S^2 \setminus \{z\}$ . Sólo resta ver que este índice coincide con  $\Gamma \wedge \gamma$ , siendo en este caso  $\gamma$  una semirrecta vertical orientada que termina en  $z$ .

A continuación damos un sencillo resultado que vincula el funcionamiento de la función dual con las calesitas.

**Proposición 6.4.** *Para  $I = \mathcal{C}_{z',z}^k$ , se cumple que  $\lambda_{I,z^*}(z) - \lambda_{I,z^*}(z') = -k$  para cualquier  $z^* \neq z$ ,  $z^* \neq z'$ .*

*Demostración.* Recordando la definición de  $\mathcal{C}_{z',z}$ , tomamos un homeo de  $S^2$  que preserve orientación, mande  $z$  en 0, y  $z'$  en  $\infty$ . Luego tomamos el cubrimiento universal de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  definido en la Sección 1. se tiene que  $\mathcal{C}_{z',z}^k$  traslada todos los puntos  $k$  dominios fundamentales hacia la izquierda, de forma que si  $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$  son las rectas verticales que separan dominios fundamentales, orientadas hacia arriba, y  $\Gamma$  es la trayectoria de  $z^*$ , se tiene  $\lambda_{I,z^*}(z) - \lambda_{I,z^*}(z') = \sum_{i \in \mathbb{N}} \Gamma \wedge \gamma_i = -k$ .

**Proposición 6.5.** *Supongamos que tenemos  $f \in \text{Homeo}(S^2)$ , y tomamos  $I, I'$  dos isotopías de  $\text{Id}$  a  $f$ , tales que  $I'$  es homotópica a  $\mathcal{C}_{z',z}^k I$  en  $\mathcal{I}_{z,z'}$ . Entonces se cumple que  $\lambda_{I',z^*}(z) - \lambda_{I',z^*}(z') = \lambda_{I,z^*}(z) - \lambda_{I,z^*}(z') - kq$ .*

*Demostración.* Podemos asumir sin pérdida de generalidad  $I' = \mathcal{C}_{z',z}^k I$ , ya que  $z, z' \in \text{Fix}(I)$ ,  $\lambda_{I,z^*}(z') - \lambda_{I,z^*}(z) = \nu_{I|_{S^2 \setminus \{z\}, z^*}}(z')$ , y este último número depende solo de la clase de homotopía de la isotopía que tomamos.

Veamos que para  $J := \mathcal{C}_{z',z}^k$ , se cumple  $\lambda_{J,z^*}(z) - \lambda_{J,z^*}(z') = -kq$ . Basta razonar como en la Proposición 6.4, tomar  $\tilde{z}^*$  levantado de  $z^*$  en el cubrimiento universal, y notar que  $\mathcal{C}_{z',z}^k$  traslada  $k$  dominios fundamentales a la izquierda para cada aplicación de  $\tilde{I}$ , y como estamos mirando la trayectoria completa de  $\tilde{z}^*$ , esto se repite  $q$  veces. Sólo resta observar que si componemos dos isotopías de  $\mathcal{I}_{z,z'}$ , entonces la diferencia de los valores que toma la función dual para la composición, es la suma de las diferencias para estas dos isotopías, lo que aplicado en este contexto nos dice

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{C}_{z',z}^k I, z^*}(z) - \lambda_{\mathcal{C}_{z',z}^k I, z^*}(z') &= \lambda_{I, z^*}(z) - \lambda_{I, z^*}(z') + \lambda_{\mathcal{C}_{z',z}^k, z^*}(z) - \lambda_{\mathcal{C}_{z',z}^k, z^*}(z') \\ &= \lambda_{I, z^*}(z) - \lambda_{I, z^*}(z') - kq. \quad \square \end{aligned}$$

Dada  $f$  en las hipótesis del Teorema 2.1, la extendemos en un homeo de  $S^2$  fijando  $\infty$ . En estas condiciones tenemos:

**Proposición 6.6.** *Para probar el Teorema 2.1 basta encontrar una isotopía  $I$  y dos puntos  $z, z' \in \text{Fix}(I)$  tales que  $\lambda_{I, z^*}(z') - \lambda_{I, z^*}(z) \notin q\mathbb{Z}$ .*

*Demostración.* Si  $z = \infty$  la proposición 6.3 concluye el argumento. Si por el contrario tenemos  $z \neq \infty, z' \neq \infty$ , tomamos  $I' \in \mathcal{I}_{z,z',\infty}$ , y la proposición 6.5 nos da  $\lambda_{I', z^*}(z') - \lambda_{I', z^*}(z) \notin q\mathbb{Z}$ , de donde o bien se cumple

$\lambda_{I',z^*}(z') - \lambda_{I',z^*}(\infty) \notin q\mathbb{Z}$  o se cumple  $\lambda_{I',z^*}(z) - \lambda_{I',z^*}(\infty) \notin q\mathbb{Z}$ , y concluimos como en el primer caso.

## 7 Descomposición dinámicamente transversal

En esta sección construiremos un objeto denominado *descomposición dinámicamente transversal*, que usaremos de aquí en adelante. Comenzamos por tomar  $f \in \text{Homeo}^+(S^2)$ , y supondremos que  $\#\text{Fix}(f) < \infty$ .

**Definición 7.1.** Diremos que  $I'$  es una extensión de  $I$  si  $\text{Fix}(I) \subset \text{Fix}(I')$  y además  $I'$  es homotópica a  $I$  en  $\mathcal{I}_{\text{Fix}(I)}$ . Diremos que  $I$  es una isotopía maximal si no tiene ninguna extensión.

**Proposición 7.2.** Supongamos  $\#\text{Fix}(f) = n \geq 3$ , y sea  $X = \{z_1, \dots, z_n\}$ , con  $z_1, \dots, z_n \in \text{Fix}(f)$ . Entonces una isotopía  $I \in \mathcal{I}_X$  es maximal si y solo si la trayectoria de cualquier  $z \in \text{Fix}(f) \setminus X$  es no homotópicamente trivial en  $S^2 \setminus X$ .

*Demostración.* La proposición 3.1 nos dice que todas las  $\mathcal{I}_X$  son homotópicas de donde tenemos el recíproco. El recíproco implica probar que si tenemos un punto fijo  $z$  tal que su trayectoria  $I(z)$  es homotópicamente trivial en  $S^2 \setminus X$ , entonces podemos modificar  $I$  de forma continua para que fije  $z$  para todo tiempo. La prueba de esto se encuentra en [BCL].  $\square$

La finitud de  $\text{Fix}(f)$  implica entonces que toda isotopía admite una extensión maximal. Podemos tomar entonces  $I$  maximal tal que  $\text{Fix}(I) \neq \emptyset$ : si  $f$  tiene algún punto periódico, entonces tiene al menos un fijo por Brouwer, y luego la proposición 3.1 nos dice que podemos fijar tres de ellos. Tomamos  $S := S^2 \setminus \text{Fix}(I)$  y levantamos la isotopía  $I$  en  $\tilde{I} := (\tilde{f}_t)_{t \in [0,1]}$  del cubrimiento universal  $\tilde{S}$ . Observar que el hecho de que  $I$  sea maximal implica que la trayectoria de cualquier  $z \in \text{Fix}(f) \setminus \text{Fix}(I)$  es no homotópicamente trivial en  $S^2 \setminus \text{Fix}(I)$  de donde  $\text{Fix}(\tilde{f}_1) = \emptyset$ . Utilizando [LC2] construimos una foliación  $\mathcal{F}$  en  $S$  por *líneas de Brouwer* (i.e. toda trayectoria por  $I$  tiene un representante homotópico a extremos fijos que es positivamente transversal a la  $\mathcal{F}$ ).

Tomando ahora  $z^*$  periódico, podemos tomar, para todo  $k \in \{0, \dots, q-1\}$  un camino  $\gamma_k$  de  $f^k(z^*)$  a  $f^{k+1}(z^*)$ , que sea homotópico a la trayectoria de  $f^k(z^*)$  y a su vez positivamente transversal a  $\mathcal{F}$ . Concatenando estos caminos obtenemos  $\Gamma$ , homotópico a la trayectoria completa de  $z^*$  por  $I$ . Podemos entonces tomar una función dual  $\lambda_\Gamma$  definida en  $S^2 \setminus \Gamma$ .

**Proposición 7.3.** Todo punto de autointersección  $z$  de  $\Gamma$  es de multiplicidad finita.

*Demostración.* Esto se debe a que  $\Gamma$  es positivamente transversal a  $\mathcal{F}$ . Tomemos  $z$  punto de autointersección de  $\Gamma$ , y tomemos  $U_z$  entorno tubular, homeomorfo a  $(-1, 1)^2$ . El tiempo mínimo que permanece un sub-arco de  $I(z) \cap U_z$  que pasa por  $z$  es mayor que 0, de donde solo una cantidad finita puede contener a  $z$ .  $\square$

Ahora, gracias a [LC2], ponemos a  $\Gamma$  en *posición genérica*, es decir, deshacemos todos sus puntos de intersección triple, y hacemos que todo punto de intersección doble sea adyacente a cuatro componentes conexas de  $S^2 \setminus \Gamma$ . Con esto logramos que la clausura de cada componente conexa del complemento de  $\Gamma$  sea un disco cerrado.

**Proposición 7.4.** *La función dual  $\lambda_\Gamma$  está localmente acotada.*

*Demostración.* Tomemos  $z$  en  $S = S^2 \setminus \text{Fix}(I)$ . Nuevamente nos apoyamos en la transversalidad dinámica: comenzamos por tomar  $U'_z$  un entorno tubular para  $z$ . *A priori* podría ocurrir que  $\Gamma$  entre infinitas veces a ese entorno, pero sabemos que si  $U_z \subset U'_z$  un entorno tubular suficientemente pequeño, de forma que  $d(\partial U_z, S^2 \setminus U'_z) = \delta > 0$ , entonces los sub-arcos de  $\Gamma$  que entran a  $U_z$  son finitos  $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq n}$ , nuevamente porque tienen un tiempo mínimo mayor que 0 en el que deben permanecer en  $U'_z$ .

Veamos entonces que  $\lambda_\Gamma$  está acotada en  $U_z$ . Para ello, basta observar que la máxima diferencia para la función dual que puede haber en dos puntos de  $U_z$  es precisamente  $n$ : la cantidad de sub-arcos de  $\Gamma$  que entran a  $U_z$ .  $\square$

Probaremos a continuación que la función dual dada por la curva  $\Gamma$  está acotada.

**Proposición 7.5.** *La función  $\lambda_\Gamma : S^2 \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$  está acotada.*

*Demostración.* Supongamos que no se cumple lo que queremos: podemos entonces tomar una sucesión de puntos donde la función dual tienda a  $\infty$ , es decir,  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tales que  $\lambda_\Gamma(z_{n+1}) > \lambda_\Gamma(z_n)$ , para todo  $n \geq 0$ . Sea  $U_n$  la componente conexa de  $S^2 \setminus \Gamma$  que contiene a  $z_n$ .

Sabemos que  $(z_n)$  tiene una subsucesión convergente a  $z$ , al poder ser vista como una sucesión en  $S^2$ . Recordemos que al ser  $\Gamma$  un conjunto compacto, se tiene que los puntos de  $X$  (fijos por la isotopía) están a una distancia positiva de la curva, de donde existe un entorno de cada uno de ellos donde la función dual es constante. Esto nos dice que  $z$  no es un punto fijo de la isotopía.

Observemos además que dado  $\varepsilon > 0$ , la cantidad de componentes conexas de  $S^2 \setminus \Gamma$  que tienen diámetro mayor que  $\varepsilon$ , es finita. Esto se debe a que el

borde de cada una de estas componentes mide al menos  $\varepsilon$ , y que cada pedazo de  $\Gamma$  es borde de dos componentes conexas de  $S^2\Gamma$ : concluimos entonces que el diámetro de  $U_n$  tiende a 0 cuando  $n$  se va a  $\infty$ . Esto nos permite afirmar que el punto  $z$  debe pertenecer a  $\Gamma$ , ya que si estuviera en el complemento, tendríamos que a partir de un cierto momento los puntos de la subsucesión estarían en la misma componente conexa de  $S^2\setminus\Gamma$  que  $z$ , de donde el valor de la función dual sería el mismo para todos ellos, lo cual es absurdo.

Tomemos entonces  $z \in \Gamma$ , siendo  $z$  un punto de acumulación de la sucesión  $(z_n)$ . Tenemos entonces que  $z$  está siendo acumulado por puntos donde la función dual tiende a  $\infty$ . Esto es absurdo ya que contradice la Proposición 7.4.  $\square$

Observamos que  $\lambda_\Gamma$  decrece a lo largo de las hojas de  $\mathcal{F}$ , puesto que  $\Gamma$  es positivamente transversal a  $\mathcal{F}$ . Tomando  $S_{<\lambda} = \{z \in S^2 / \lambda_\Gamma(z) < \lambda\}$ , el hecho de que  $\Gamma$  esté en posición genérica nos dice que  $S_{<\lambda}$  es una variedad con borde (eventualmente vacío si  $S_{<\lambda}$  es todo  $S^2$ ) cuyo borde es una unión disjunta de círculos formados por sub-arcos de  $\Gamma$ , de donde son positivamente transversales a  $\mathcal{F}$ .

**Definición 7.6.** *Llamaremos **descomposición dinámicamente transversal** definida para  $z^*$  a toda terna de la forma  $(I, \mathcal{F}, \Gamma)$  como la construida recién, con:*

- i*  $I$  isotopía maximal, tal que  $Fix(I) \neq \emptyset$ .
- ii*  $\mathcal{F}$  foliación de  $S^2 \setminus Fix(I)$  dinámicamente transversal a  $I$ .
- iii*  $\Gamma$  curva cerrada homotópica a la trayectoria completa de  $z^*$  en  $S^2 \setminus Fix(I)$ , positivamente transversal a la foliación, en posición genérica.

Remarcamos que en estas condiciones, la clausura de cualquier componente conexa de  $S^2 \setminus \Gamma$  es un disco cerrado, al que llamaremos *disco separador* de la dinámica de  $\mathcal{F}$ . Existen tres tipos de discos separadores: atractores, repulsores y sillas, identificables por la dinámica en su borde. El borde de una componente atractora  $U$  está formado por un conjunto de sub-arcos de  $\Gamma$  que tienen inducida la orientación de  $\Gamma$ . En este caso, para todo  $z \in \bar{U}$  se cumple que  $\phi_z^+ \setminus z \subset U$ . De forma análoga se detecta la dinámica de una componente repulsora. En ambos casos se tiene  $\sum_{z \in Fix(I) \cap D} i(\mathcal{F}, z) = 1$  por Poincaré-Hopf. Finalmente, el borde de una componente tipo silla se puede ver como  $\prod_{1 \leq i \leq 2n} \alpha_i$  donde  $\alpha_i$  es un conjunto de sub-arcos de  $\Gamma$ ; teniendo inducida la orientación de  $\Gamma$  si  $i$  es impar, y la opuesta si  $i$  es par. Observamos que en este caso  $\sum_{z \in Fix(I) \cap D} i(\mathcal{F}, z) = 1 - n$ .

Veamos algunas propiedades dinámicas que brinda la descomposición. En primer lugar, toda hoja cerrada  $\phi \in \mathcal{F}$  es disjunta de  $\Gamma$ . Es además el borde de dos discos, uno atractor y otro repulsor de  $f$ , esto se debe al comportamiento dual que tiene  $I$  (y luego  $f$ ) respecto del flujo inducido por  $\mathcal{F}$ : toda propiedad conservativa para  $\mathcal{F}$  tiene su análogo disipativo en  $f$ , y viceversa. Más aún, toda hoja no errante es disjunta de  $\Gamma$ : en caso contrario puedo separar a  $S^2$  en dos discos cerrados que se intersectan en su borde, y  $\Gamma$  solo puede ir de una de las componente a la otra (pero no volver) por ser positivamente transversal a  $\mathcal{F}$ . Razonando de forma análoga vemos que ocurre la mismo para toda hoja que peretenece al  $\omega$  o  $\alpha$ -límite de una hoja.

Dada  $\phi$  hoja no cerrada, como  $\mathcal{F}$  es dinámicamente transversal a  $I$ , podemos deducir que  $\text{Fill}(\omega(\phi))$  y  $\text{Fill}(\alpha(\phi))$  son dos cerrados conexos rellenos, que son o bien positivamente o bien negativamente invariantes para  $f$ .

## 8 Basta probarlo para $\#Fix(f) < \infty$

Veamos que basta probar el Teorema 2.1 para aquellos homeomorfismos  $f$  tales que  $\#Fix(f) < \infty$ . Tomemos  $f \in Homeo^+(\mathbb{R}^2)$ , fijemos  $z^*$  un punto periódico de  $f$  de período  $q$ , y supongamos que  $f$  tiene infinitos puntos fijos. Veremos que  $C_0$  cerca de  $f$ , existe un homeo  $f'$  con finitos fijos y tal que si el Teorema 2.1 es cierto para  $F'$ , entonces también lo es para  $f$ .

Sabemos que  $(Homeo^+(\mathbb{R}^2), C^0)$  es localmente contractible (ver [HD]), de donde  $f$  tiene un entorno  $\mathcal{U}_0$  que se retrae a  $f$  por una mapa continuo  $\Psi : \mathcal{U}_0 \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}_0$  que fija  $f$  para todo tiempo, es decir:

1.  $\Psi(f', 0) = f'$ ,  $\Psi(f', 1) = f$  para toda  $f' \in \mathcal{U}_0$
2.  $\Psi(f, t) = f$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

Observar que si miramos la trayectoria de  $f'$  por  $\Psi$  en  $\mathcal{U}_0$ , y definimos  $\psi_{f'}(t) = \Psi(f', 1 - t)$  obtenemos una isotopía  $\psi_{f'}$  de  $f$  a  $f'$ . Tomando  $I_f$  isotopía de la identidad  $f$ , llamamos  $I_{f'}$  a la obtenida luego de concatenarla con  $\psi_{f'}$ . Fijamos  $r > 0$  para que  $I_f^q(z^*)$  (la trayectoria completa) esté incluida en  $D_r$  (la bola de radio  $r$  centrada en el origen). Podemos además elegir  $r' > r$  tal que, para todo punto  $z \in \mathbb{R}^2 \setminus D_{r'}$ , su trayectoria  $I_f(z)$  esté incluida en  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D_r}$ .

**Observación 8.1.** *Si tomamos  $f' \in \mathcal{U}_0$ , con  $f'$   $\delta$ - $C_0$ -cerca de  $f$ , entonces la trayectoria de todo  $z \in \mathbb{R}^2$  por  $I_{f'}$  estará  $\delta$ -cerca de la trayectoria por  $I_f$ .*

Por esta observación existe  $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0$  tal que si  $f' \in \mathcal{U}_1$ , entonces  $I_{f'}(f^k(z^*))$  seguirá incluida en  $D_r$ , y además  $I_{f'}(z)$  seguirá incluida en  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D_r}$  para todo  $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D_{r'}}$ . Luego, si  $f' \in \mathcal{U}_1$  coincide con  $f$  en  $O(z^*)$ , se tiene que  $\nu_{I_{f'}, z^*}(z) = kq$  para todo  $z \in Fix(f') \cap (\mathbb{R}^2 \setminus D_{r'})$ , donde  $k$  es la cantidad de vueltas que da la curva cerrada  $I_{f'}(z)$  alrededor de  $D_r$ . Nos interesan entonces los puntos fijos que están dentro de  $\overline{D_{r'}}$  para obtener el teorema.

Nuevamente por la observación 8.1, dado  $z \in Fix(f') \cap \overline{D_{r'}}$ , existen  $\mathcal{U}_z \subset \mathcal{U}_1$  y  $U_z$  entorno de  $z$ , tales que si  $f' \in \mathcal{U}_z$  coincide con  $f$  en  $O(z^*)$  y  $z' \in Fix(f') \cap U_z$ , entonces  $\nu_{I_{f'}, z^*}(z') = \nu_{I_f, z^*}(z)$ . Dado que  $Fix(f) \cap \overline{D_{r'}}$  es un compacto (cerrado en un compacto), existen finitos  $(z_i)_{1 \leq i \leq m}$  tales que  $U_{z_i}$  lo cubren. Usando la compacidad de  $\overline{D_{r'}}$  vemos que si definimos  $X = \overline{D_{r'}} \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq m} U_{z_i}$  es también compacto y no tiene fijos de  $f$ , por lo que si tomamos  $f'$  suficientemente cerca de  $f$  tampoco tendrá fijos en  $X$ . Deducimos entonces que existe  $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1$  tal que si  $f' \in \mathcal{U}_2$ , debe cumplir  $Fix(f') \cap \overline{D_{r'}} \subset \bigcup_{1 \leq i \leq m} U_{z_i}$ . Luego, tomamos  $\mathcal{U}_3 := \mathcal{U}_2 \cap \bigcap_{1 \leq i \leq m} \mathcal{U}_{z_i}$ .

Veamos que para probar el teorema 2.1, nos basta encontrar  $f' \in \mathcal{U}_3$  con finitos fijos, que coincida con  $f$  en  $O(z^*)$ ; y un punto  $z' \in \text{Fix}(f')$  tal que  $\nu_{I_{f'}, z^*}(z') \notin q\mathbb{Z}$ . Lo hacemos de la siguiente manera: como los homeos que tienen finitos puntos fijos son densos en  $\text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$ , podemos tomar  $f_3 \in \mathcal{U}_3$  que tenga finitos puntos fijos (podrían ser 0 *a priori*). Luego, modifico  $f_3$  en una cadena de discos libres de la órbita por  $f$  de  $z^*$ , para obtener  $f' \in \mathcal{U}_3$ , que además coincida con  $f$  en la órbita de  $z^*$ . Observamos por un lado que  $f'$  tiene a  $z^*$  como punto periódico, de donde tiene un fijo; y por otro lado que la última perturbación que hicimos mantuvo invariante el conjunto de puntos fijos, puesto que la hicimos en una cadena de discos libres. Si probamos entonces que existe  $z' \in \text{Fix}(f')$  tal que  $\nu_{I_{f'}, z^*}(z')$ , tendremos que necesariamente  $z' \in \overline{D_{r'}}$ , de donde existe  $z' \in U_{z_j}$  para algún  $j$  entre 1 y  $m$ . Como  $f'$  está en  $\mathcal{U}_{z_j}$  tendremos entonces que  $\nu_{I_{f'}, z^*}(z_j) = \nu_{I_{f'}, z^*}(z') \notin q\mathbb{Z}$ , y habremos probado el teorema.

El teorema que queremos probar queda entonces reformulado en la siguiente sucesión de teoremas, para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

**Teorema 8.2.** ( $T_n$ ): *Sea  $f$  un homeomorfismo del plano que preserva la orientación y que tiene exactamente  $n$  puntos fijos. Entonces, para todo  $z^*$  periódico de  $f$ , con período  $q \geq 2$ , existe un punto fijo  $z$  tal que  $V_{f, z^*}(z) \neq 0$ .*

Recordamos que tomar un homeo  $f$  del plano que preserva orientación con  $n$  puntos fijos es equivalente a tomar uno de la esfera que tenga  $n + 1$  fijos, al que le pondremos el mismo nombre (extendemos fijando  $\infty$ ).

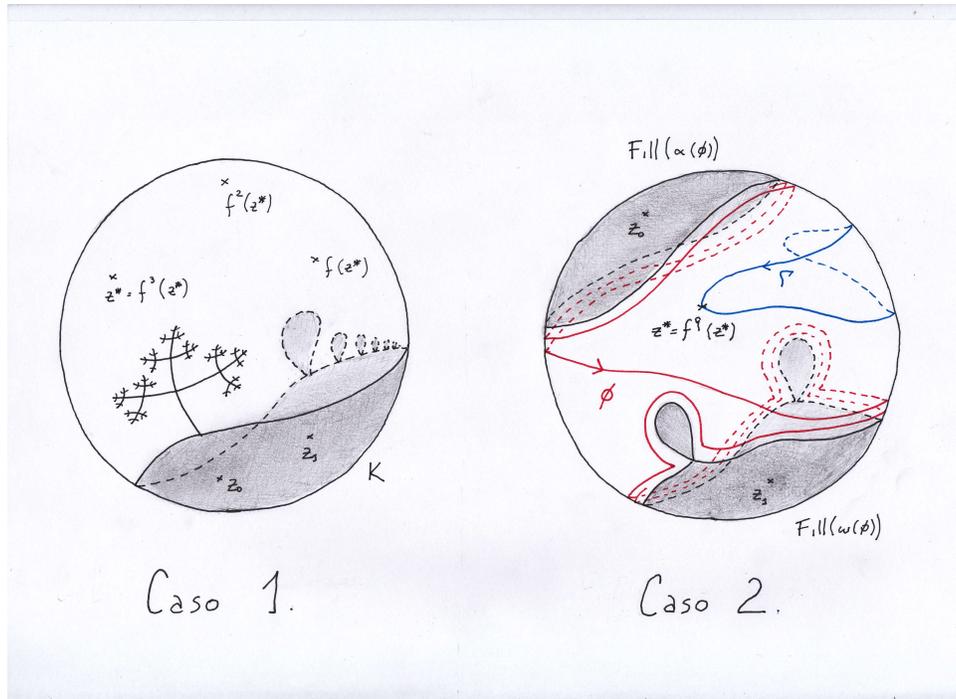
Diremos que  $f$  es *reducible* si cumple alguna de las siguientes condiciones:

1. *Contractible con dos fijos*: Existe un cerrado conexo  $K$  de complemento conexo, disjunto de  $O(z^*)$ , invariante por  $f$ , que contiene al menos dos puntos fijos ( $z_0$  y  $z_1$  en la figura).
2. *Fijos conectados*: Existe una isotopía maximal  $I \in \mathcal{I}_\infty$ , una descomposición dinámicamente transversal para  $z^*$  y una hoja no cerrada  $\phi \in \mathcal{F}$  tal que:

$$(a) \text{Fill}(\alpha(\phi)) \cap \text{Fill}(\omega(\phi)) = \emptyset,$$

$$(b) \Gamma \cap (\phi \cup \text{Fill}(\alpha(\phi)) \cup \text{Fill}(\omega(\phi))) = \emptyset.$$

(Recordar que en este caso, tanto  $\text{Fill}(\alpha(\phi))$  como  $\text{Fill}(\omega(\phi))$  contienen al menos un punto fijo,  $z_0$  y  $z_1$  en la figura.



En caso contrario, diremos que  $f$  es *irreducible*.

En las siguientes secciones se prueba entonces el teorema para el caso en el que  $f$  tiene finitos puntos fijos, separando en los dos casos que acabamos de detallar. Para el caso  $f$  reducible procederemos por inducción, por lo que damos a continuación la prueba de  $T_n$  para los casos donde  $n = 0, 1$  o  $2$ .

## 9 Casos base

Es un hecho conocido que un homeo del plano que preserva orientación y no tiene puntos fijos, tampoco tiene puntos periódicos (Brouwer), lo cual nos otorga  $T_0$ . Presentamos a continuación las pruebas de  $T_1$  y  $T_2$ . Recordemos que un homeo del plano es propio, y por lo tanto se extiende a uno de la esfera fijando  $\infty$ .

*Prueba de  $T_1$ :* Sea  $f \in \text{Homeo}^+(\mathbb{S}^2)$  con exactamente 2 puntos fijos  $z$  y  $\infty$ , y consideremos un punto periódico  $z^*$ . Tomemos  $I \in \mathcal{I}_{z,z'}$ , luego  $(I, \mathcal{F}, \Gamma)$  una descomposición dinámicamente transversal, y supongamos que  $\lambda_{I,z^*}(z) - \lambda_{I,z^*}(\infty) = kq$  (en caso contrario la proposición 6.3 concluye la prueba). Componiendo  $I$  con  $\mathcal{C}_{\infty,z}^k$  obtenemos una nueva isotopía  $I'$  tal que  $\lambda_{I',z^*}(z) - \lambda_{I',z^*}(z') = 0$  (Prop. 6.5), de donde si miramos el cubrimiento universal del anillo  $S^2 \setminus \{z, \infty\}$  y levantamos  $f$  en  $\tilde{f}$ , y  $z^*$  en  $\tilde{z}^*$ , tendremos que  $\tilde{z}^*$  es un punto periódico de  $\tilde{f}$ , de donde nuevamente por Brouwer encontramos un nuevo punto fijo  $\tilde{z}''$ , que se proyecta por  $\pi$  en un tercer punto fijo  $z''$ , lo cual es absurdo pues habíamos supuesto que eran exactamente dos.

*Prueba de  $T_2$ :* Sea  $f \in \text{Homeo}^+(\mathbb{S}^2)$  con exactamente 3 puntos fijos  $z$ ,  $z'$  y  $z''$  (alguno de ellos es  $\infty$ ) y consideremos un punto periódico  $z^*$ . Sea  $I \in \mathcal{I}_{z,z',z''}$ . Tomemos  $(I, \mathcal{F}, \Gamma)$  una descomposición dinámicamente transversal, y sean  $\lambda_+$  y  $\lambda_-$  respectivamente el máximo y el mínimo que toma la función dual. Estos valores no son iguales ya que la función  $\lambda_\Gamma$  toma al menos dos valores diferentes. Una componente conexa de  $S^2 \setminus \Gamma$  donde  $\lambda_{I,z^*}$  valga  $\lambda_+$  será repulsora, y análogamente será atractora si  $\lambda_\Gamma$  vale  $\lambda_-$  (recordar que la función dual decrece a lo largo de las hojas de  $\mathcal{F}$ ). Estas componentes tienen además un punto fijo en su interior, por Poincaré-Hopf (asumamos que son  $z$  y  $z'$ ). Tenemos entonces que  $\lambda_{I,z^*}(z) = \lambda_- < \lambda_+ = \lambda_{I,z^*}(z')$ . Observemos además que  $\lambda_{I,z''}(z') - \lambda_{I,z''}(z) = 0$ , dado que  $z''$  es un punto fijo de la isotopía  $I$ .

Supongamos entonces que  $\lambda_{I,z^*}(z') - \lambda_{I,z^*}(z) = kq$ , con  $k > 0$ . De forma análoga a la prueba de  $T_1$ , componiendo con  $\mathcal{C}_{z,z'}^k$  obtenemos una nueva isotopía  $I' \in \mathcal{I}_{z,z'}$  tal que  $\lambda_{I',z^*}(z') - \lambda_{I',z^*}(z) = 0$ . Yendo de nuevo al cubrimiento universal, encontramos  $\tilde{z}^{**}$  un punto fijo de  $\tilde{f}$ , que se proyecta entonces en  $z^{**}$  punto fijo de  $f$ , que además cumple  $\lambda_{I',z^{**}}(z') - \lambda_{I',z^{**}}(z) = 0$ . Deshaciendo la calesita que recién construimos para volver a obtener  $I$ , tendremos  $\lambda_{I,z^{**}}(z') - \lambda_{I,z^{**}}(z) = k \neq 0$ , de donde  $z^{**} \neq z''$ . Hemos encontrado así un cuarto punto fijo de  $f$ , lo que es de nuevo una contradicción, puesto que habíamos asumido que eran exactamente tres.

## 10 El teorema es cierto para $f$ irreducible

En esta sección vamos a probar el teorema para el caso en el que  $f$  es irreducible, es decir, no tiene *contractible con dos fijos* ni *fijos conectados*. Comenzamos la sección con tres lemas previos: usamos el primero en la prueba del tercero, y luego los últimos dos en la prueba del caso irreducible.

### Lemas previos

**Lema 10.1.** *Sea  $(I, \mathcal{F}, \Gamma)$  una descomposición dinámicamente transversal definida para  $z^*$ , y  $U$  una componente conexa de  $S^2 \setminus \Gamma$ . Sea además  $z \in U$  una fuente de  $\mathcal{F}$ , tal que  $i(f, z) \neq 1$ .*

*Entonces  $\mathcal{F} \upharpoonright_U$  es conjugado a la foliación radial saliente de  $D_1$ . En particular,  $z$  es el único fijo de  $I$  en la componente  $U$ .*

*Demostración.* Veamos que basta probar que toda hoja proveniente de  $z$  sale de  $U$ . Agregando esa hipótesis, tomemos  $U'$  un pequeño entorno abierto de  $z$  donde la foliación es radial. Tenemos que  $\partial U'$  es un lazo tal que todos sus puntos pertenecen a una hoja que tiene a  $z$  como su  $\alpha$ -límite. Razonando de forma idéntica al final del Lema 5.7, tenemos que  $U'' := \bigcup_{z' \in (U' \setminus \{z\})} \phi_{z'}$  es un anillo abierto, donde la foliación es conjugada a la radial por como lo construimos. Como toda hoja de  $U'$  sale de  $U$ , tenemos que necesariamente  $U \subset U''$ . Como  $\Gamma$  está en posición genérica, tenemos que  $\bar{U}$  es un disco cerrado, contiene a  $z$ , y acabamos de ver que está incluido en  $U''$ , donde la foliación es radial. Solo resta ver que la foliación es saliente en  $\partial U$  (el borde del disco). Es claro que en algún lugar del disco debe serlo, ya que las hojas de  $U'$  deben poder salir. Pero recordando que  $\Gamma$  positivamente transversal a la foliación, tenemos que debe ser saliente en todo el borde (de lo contrario negaríamos la transversalidad en algún punto). Podemos entonces conjugar la foliación en  $U$  a la radial en  $D_1$  viendo por qué punto de  $\partial U$  sale cada hoja.

Supongamos entonces por absurdo, que existe una hoja proveniente de  $z$  que vive siempre en  $U$ . Tenemos que  $\omega(\phi) \subset \bar{U}$ . Como  $\Gamma$  es positivamente transversal a la foliación, tenemos  $\omega(\phi) \cap \Gamma = \emptyset$ , de donde  $\omega(\phi) \subset U$ . Probaremos entonces que  $\omega(\phi)$  es necesariamente es una hoja cerrada de  $\mathcal{F}$ .

Recordando que  $z$  es fuente de  $\mathcal{F}$ , tenemos que  $z \notin \omega(\phi)$ . Luego  $\text{Fill}(\omega(\phi))$  es disjunto de  $\text{Fill}(\alpha(\phi)) = \{z\}$ . Siendo que  $f$  es irreducible, tenemos que  $\Gamma \cap (\phi \cup \text{Fill}(\alpha(\phi)) \cup \text{Fill}(\omega(\phi))) \neq \emptyset$ , de donde, como no tenemos *fijos conectados*, debe cumplirse  $\Gamma \subset \text{Fill}(\omega(\phi))$ . Más aún, siendo que  $\Gamma$  es disjunta de  $\omega(\phi) = \partial \text{Fill}(\omega(\phi))$ , tenemos que está incluida en el interior de  $\text{Fill}(\omega(\phi))$ . Recordando que  $\text{Fill}(\omega(\phi))$  es un cerrado conexo relleno, tenemos que su

complemento  $W := S^2 \setminus \text{Fill}(\omega(\phi))$  es un disco abierto que está incluido en  $U$ , así como su clausura  $\overline{W}$ .

Siendo que la foliación está formada por líneas de Brouwer de  $f$ , sabemos que  $\text{Fill}(\omega(\phi))$  es o bien positivamente o bien negativamente invariante por  $f$ . Supongamos lo primero sin pérdida de generalidad (el otro caso es análogo).

En ese caso,  $\overline{W}$  es un conjunto negativamente invariante por  $f$ , y el conjunto  $K := \bigcap_{k \leq 0} f^k(\overline{W})$  es un cerrado, conexo, invariante por  $f$  y disjunto de  $\Gamma$ . Si bien el complemento de  $S^2 \setminus K$  puede tener varias componentes conexas, sabemos que la que contiene a  $\Gamma$  es un disco abierto (por ser superficie simplemente conexa) e invariante por  $f$ , pues contiene a  $O(z^*)$ . Su complemento  $K'$  contiene a  $K$ , y es un cerrado invariante por  $f$  y disjunto de  $O(z^*)$ . Usando ahora que  $f$  no tiene *contractible con dos fijos*, concluimos que  $K'$  no puede contener más de un punto fijo de  $I$ , de donde  $z$  es el único fijo en  $K$ . Luego, Poincaré-Bendixson mediante, deducimos que  $\omega(\phi)$  es una hoja cerrada  $\phi'$  de  $\mathcal{F}$ .

Sólo resta observar que en esas circunstancias, el conjunto  $\overline{W}$  que habíamos definido es un disco cerrado con borde  $\phi'$ , que es entonces atractor o repulsor de  $f$ , y no contiene más fijos que  $z$  (nuevamente, por no haber *fijos conectados*). En cualquiera de los casos se concluye que  $i(f, z) = 1$ , lo cual es una contradicción.

**Lema 10.2.** *Sea  $(I, \mathcal{F}, \Gamma)$  una descomposición dinámicamente transversal. Toda componente conexa repulsora para  $\mathcal{F}$ , de  $S^2 \setminus \Gamma$ , contiene exactamente un punto fijo de  $I$ .*

*Demostración.* Consideremos  $U$  componente conexa repulsora, Poincaré-Hopf nos dice que tiene al menos un punto fijo en su interior. Usaremos la irreducibilidad de  $f$  para probar que no tiene más de uno.

La foliación  $\mathcal{F}$  induce un flujo topológico  $\Phi$  en  $S^2$  (ver [W], [W2]), cuyas singularidades son  $\text{Fix}(I)$ . “Fluimos. entonces  $U$  hacia atrás, esto es, tomamos  $K := \bigcap_{t \in \mathbb{R}^+} \Phi_{-t}(\overline{U})$ . Luego  $K$  es conexo por ser intersección decreciente de cerrados conexos, es relleno pues su complemento es unión creciente de discos, y es maximal invariante por  $\Phi$ . Observando que los puntos de  $\text{Fix}(I) \cap U$  están en  $K$ , basta probar que  $\text{Fix}(I) \cap K$  tiene un solo elemento. Supongamos por contradicción que tiene más de uno.

En ese caso,  $\partial K$  debe contener al menos una hoja  $\phi$ , ya que  $K$  es conexo y su borde no puede estar compuesto de puros fijos (sólo tengo finitos). Además, toda hoja  $\phi$  en  $\partial K$  debe ser cerrada o *casi cerrada* (es decir,  $\alpha(\phi) = \omega(\phi) = z_0 \in \text{Fix}(I)$ ). En caso contrario, siendo que  $\phi \cap \Gamma = \emptyset$

por construcción de  $K$ , estaríamos negando la irreductibilidad de  $f$ , ya que tendríamos *hijos conectados*.

Si  $\partial K$  contiene una hoja cerrada tenemos que  $K$  es un disco cerrado, que es positiva o negativamente invariante por  $f$  por transversalidad, luego tomando  $K' := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} f^{-k}(K)$ , tenemos que  $K'$  es un cerrado conexo relleno invariante por  $f$ , que no puede tener más de un fijo pues habría *contractible con dos fijos*.

El otro caso es que  $\partial K$  sean puras hojas *casi cerradas*, en cuyo caso todas comparitrían a  $z_0$  como su  $\alpha$  y  $\omega$ -límite. En ese caso  $K$  sería la suma cuña de discos cerrados  $D_i$  pegados por  $z_0$ , siendo  $\partial D_i$  completado por  $\phi_i$  hoja *casi cerrada*. Observando que cada  $D_i$  es positiva o negativamente invariante por  $f$  y razonando como recién, concluimos que cada  $D_i$  contiene un único punto de  $Fix(I)$ :  $z_0$ , que es entonces el único fijo en  $K$ .

**Lema 10.3.** *Sean  $I, I' \in \mathcal{I}_\infty$  dos isotopías maximales,  $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$  sus respectivas foliaciones dinámicamente transversales. Supongamos que existe un punto fijo  $z$  común a ambas isotopías tal que*

- .  $i(\mathcal{F}, z) \neq 1$ ,
- .  $\lambda_I(z) < \lambda_I(\infty)$ ,
- .  $\lambda_{I'}(z) = \lambda_{I'}(\infty)$ .

*Entonces existe  $z' \in Fix(I')$  tal que*

- .  $i(\mathcal{F}', z') \neq 1$ ,
- .  $\lambda_{I'}(z') < \lambda_{I'}(\infty)$ .

*Demostración.* Tomemos  $z^* \in Per(f)$  y consideremos  $(I', \mathcal{F}', \Gamma')$  una descomposición dinámicamente transversal. Sabemos que  $I'$  es homotópica a  $\mathcal{C}_{z, \infty}^k I$ , en  $\mathcal{I}_{z, \infty}$ , donde  $k > 0$  ya que  $\lambda_I(z) < \lambda_I(\infty)$  (ver Prop. 6.5). Ahora, la Proposición 5.6 nos dice que  $z$  es una fuente de  $\mathcal{F}'$ .

Siendo que  $i(\mathcal{F}, z) \neq 1$ , la Proposición 5.4 nos permite afirmar que  $i(f, z) = i(\mathcal{F}, z) \neq 1$ , de donde utilizamos el Lema 10.1 para ver que la componente conexa  $U$  de  $S^2 \setminus \Gamma'$  que contiene a  $z$  es un disco repulsor y no contiene más fijos. Definamos  $\lambda = \lambda_{I'}(z) = \lambda_{I'}(\infty)$ . Sabemos que el borde del disco  $U$  también es borde de una componente conexa  $M$  de  $S_{<\lambda}$ . Siendo que  $\infty$  no está en  $U$  ni en  $M$ , tenemos que el borde de  $M$  tiene dos o más componentes conexas. Tenemos por lo tanto al menos dos compommonetes repulsoras, donde la suma de los índices de los fijos es 1 en cada una de ellas. Por otro lado, si tomamos una componente donde la función dual toma su mínimo valor, tendremos una componente atractora, donde también la suma de los índices de los fijos es 1. Definimos entonces:

$\lambda_- \rightarrow$  Valor mínimo que toma la función dual en  $M$   
 $m_- \rightarrow$  Cantidad de componentes conexas de  $M$  donde la función dual toma el valor  $\lambda_-$   
 $m_+ \rightarrow$  Cantidad de componentes conexas de  $\partial M$

Tenemos que  $M$  es una esfera a la cual se le quitaron al menos dos discos abiertos, de donde la fórmula de Poincaré-Hopf nos dice por un lado que

$$\sum_{z' \in \text{Fix}(I') \cap M} i(\mathcal{F}', z') = 2 - m_+ \leq 0.$$

Pero además sabemos que las componentes donde la función dual toma el valor  $\lambda_-$  son atractoras, de donde

$$\sum_{z' \in \text{Fix}(I') \cap M, \lambda(z') = \lambda_-} i(\mathcal{F}', z') = m_- > 0.$$

Así, concluimos que existe  $z' \in \text{Fix}(I') \cap M$  tal que  $\lambda_- < \lambda_{I'}(z') < \lambda$ , y además  $i(\mathcal{F}', z') < 0$  (en particular menor a 1), como queríamos.

## Ahora sí, la prueba

**Proposición 10.4.** *Supongamos que  $f \in \text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$  irreducible, sea  $z^*$  punto periódico de  $f$ . Entonces existe un punto fijo  $z$  tal que  $V_{f, z^*}(z) \neq 0$ .*

*Demostración.* Tomemos  $z^* \in \text{Per}(f)$  de período  $q$ , y supongamos por absurdo que para todo  $z \in \text{Fix}(f)$  se cumple  $V_{f, z^*}(z) = 0$ . Partamos de una isotopía  $I$  de la identidad a  $f$ , y tomemos  $z_0 \in \text{Fix}(f)$  tal que  $\nu_{I, z^*}(z_0)$  sea máximo. Por hipótesis, sabemos que  $\nu_{I, z^*}(z_0) = k_0 q$ . Consideramos ahora una isotopía maximal  $I_0 \in \mathcal{I}_{\infty, z_0}$  que sea homotópica a  $\mathcal{C}_{\infty, z_0}^{k_0} I$ , y tomemos una descomposición  $(I_0, \mathcal{F}_0, \Gamma_0)$ . Siendo que solo trabajaremos con el punto periódico  $z^*$ , escribiremos ahora  $\nu_I$  en lugar de  $\nu_{I, z^*}$ , y análogamente para la función dual. Tenemos entonces que:

A .  $\lambda_{I_0}(z_0) - \lambda_{I_0}(\infty) = \lambda_I(z_0) - \lambda_I(\infty) - k_0 q = 0$  (Prop. 6.5),

B . Para todo  $z \in \text{Fix}(I_0)$ ,  $\nu_{I_0}(z) = \nu_I(z) - k_0 q$  (Obs. 4.2).

Tenemos entonces que  $\lambda_{I_0}$  vale lo mismo en  $z_0$  y en  $\infty$ , y recordando que  $\nu_{I_0}(z) = \lambda_{I_0}(z) - \lambda_{I_0}(\infty)$ , tenemos, usando B, que  $\nu_{I_0}(z) \neq 0$ , de donde

$\lambda_{I_0}(z) \leq \lambda_{I_0}(\infty)$  para todo  $z \in \text{Fix}(I_0)$ . Concluimos entonces  $\lambda_{I_0}$  toma en  $z_0$  y en  $\infty$  su valor máximo ( $\lambda_+$ ), de donde estos dos puntos se encuentran en componentes repulsoras de  $S^2 \setminus \Gamma_0$ . El Lema 10.2 nos dice además que estas componentes repulsoras son diferentes. Así, el borde de  $S_{< \lambda_+}$  tiene al

menos dos componentes conexas. Razonando de la misma forma que en el Lema 10.3, podemos encontrar  $z_1 \in \text{Fix}(f)$  tal que  $i(\mathcal{F}_0, z_1) < 0$  y  $\lambda_{I_0}(z_1) < \lambda_{I_0}(\infty) = \lambda_+$ . Por otro lado,

$$\begin{aligned} \lambda_{I_0}(z_1) - \lambda_{I_0}(\infty) &= \lambda_{I_0}(z_1) - \lambda_{I_0}(z_0) \\ &= \nu_{I_0}(z_1) - \nu_{I_0}(z_0) \\ &= \nu_I(z_1) - \nu_I(z_0) \end{aligned}$$

Como sabemos que  $\nu_I(z_1) \in q\mathbb{Z}$  y que  $\lambda_{I_0}(z_1) - \lambda_{I_0}(\infty) < 0$ , debe existir  $k_1 \in \mathbb{Z}^+$  tal que:

1.  $\lambda_{I_0}(z_1) - \lambda_{I_0}(\infty) = -k_1q$ ,
2.  $\nu_I(z_1) - \nu_I(z_0) = -k_1q$ , (en particular  $\nu_I(z_1) - \nu_I(z_0) < 0$ ).

*Ahora el proceso se repite:* Tomamos una isotopía maximal  $I_1 \in \mathcal{I}_{z_1, \infty}$  que sea homotópica a  $\mathcal{C}_{z_1, \infty}^{k_1} I_0$ , y luego una descomposición dinámicamente transversal  $(I_1, \mathcal{F}_1, \Gamma_1)$ . Dado que  $\lambda_{I_1}(z_1) = \lambda_{I_1}(\infty)$ , aplicamos nuevamente el Lema 10.3 para obtener  $z_2 \in \text{Fix}(f)$  tal que  $\lambda_{I_1}(z_2) < \lambda_{I_1}(\infty)$ ; nuevamente tendremos  $\nu_I(z_2) - \nu_I(z_1) = \nu_{I_1}(z_2) - \nu_{I_1}(z_1) = \lambda_{I_1}(z_2) - \lambda_{I_1}(\infty) < 0$ , de donde, como  $\nu_I(z_2) \in q\mathbb{Z}$ , concluimos que existe  $k_2 \in \mathbb{Z}^+$  tal que:

1.  $i(\mathcal{F}_1, z_2) < 0$ ,
2.  $\lambda_{I_1}(z_2) - \lambda_{I_1}(\infty) = -k_2q$ ,
3.  $\nu_I(z_2) - \nu_I(z_1) = -k_2q$ , (en particular  $\nu_I(z_2) - \nu_I(z_1) < 0$ ).

Iterando este razonamiento, y recordando que asumimos  $\nu_I(z) \in q\mathbb{Z}$  para todo  $z$  fijo de  $f$ , podemos construir una sucesión  $(z_n)_{n \geq 0}$  de puntos fijos de  $f$  tal que  $\nu_I(z_{n+1}) < \nu_I(z_n)$ , de donde  $(\nu_I(z_n))_{n \geq 0}$  es estrictamente decreciente, lo cual es absurdo pues habíamos supuesto que  $f$  tenía finitos puntos fijos.

## 11 También es cierto para $f$ reducible

**Proposición 11.1.** *Sea  $f \in \text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$  reducible con  $n$  puntos fijos, entonces para cada  $z^*$  periódico existe un fijo  $z$  tal que  $V_{f,z^*}(z) \neq 0$ .*

*Demostración.* Extendemos  $f$  en un homeo de la esfera  $S^2$  que fija  $\infty$ , quedando entonces  $n + 1$  puntos fijos en  $S^2$ . Vamos a proceder por inducción y suponer que el teorema 8.2 ( $T_n$ ) es verdadero si  $n' < n$ . Dividimos la demostración en dos secciones, una para cada caso de irreductibilidad. Reemplazaremos  $\nu_{I,z^*}$  por  $\nu_I$  (y análogamente  $V_{f,z^*}$  por  $V_f$ ) en los casos en que no haya ambigüedad sobre el punto periódico del que hablamos.

*Caso A - Contractible con dos fijos:* Suponemos que existe un cerrado conexo relleno  $K \subset S^2$ , que contiene al menos dos fijos de  $f$ , es invariante por  $f$  y es disjunto de  $O(z^*)$ . Tenemos entonces que aplicando la restricción de  $f$  al plano  $S^2 \setminus K$  nos quedan a lo sumo  $n - 1$  fijos, luego por la hipótesis inductiva, existe  $z \in S^2 \setminus K$  tal que  $V_{f|_{S^2 \setminus K}}(z) \neq 0$ . Distinguiamos ahora tres situaciones.

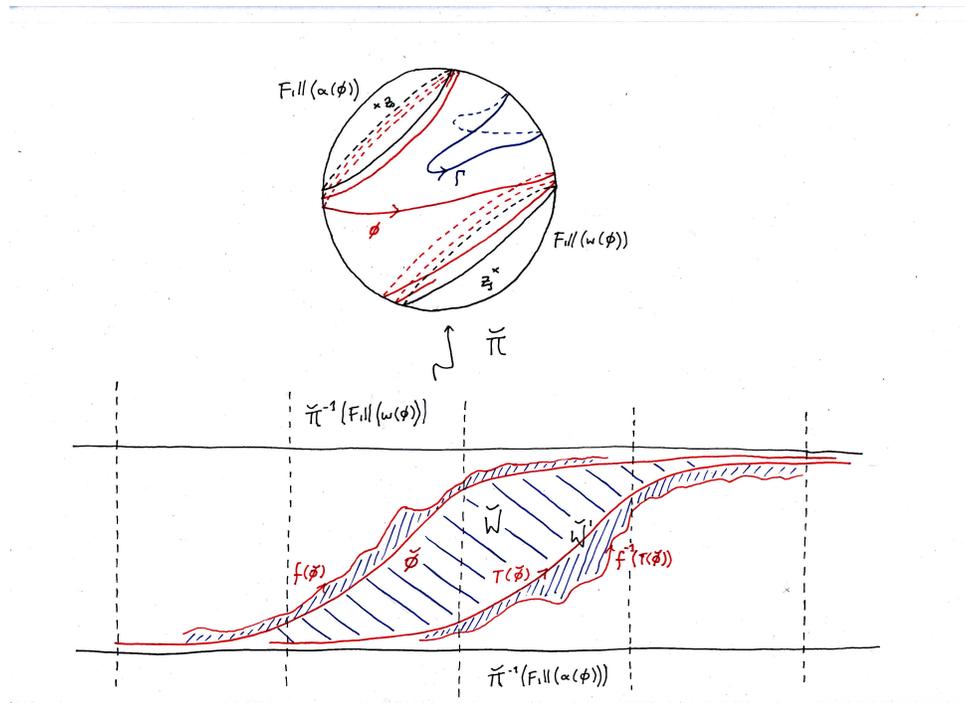
- i  $\infty \in K$ : Utilizamos la Proposición 4.3 para afirmar que podemos *colapsar el compacto  $K$* , es decir,  $V_{f|_{S^2 \setminus \infty}}(z) = V_{f|_{S^2 \setminus K}}(z) \neq 0$ , que es lo que buscamos.
- ii  $z = \infty$ : Fijamos  $z_0 \in \text{Fix}(f) \cap K$ , y razonando como en el caso anterior tenemos que  $V_{f|_{S^2 \setminus z_0}}(\infty) = V_{f|_{S^2 \setminus K}}(\infty) \neq 0$ . Luego, fijada  $I \in \mathcal{I}_{z_0, \infty}$ , concluimos observando que  $\nu_{I|_{\mathbb{R}^2}}(z_0) = -\nu_{I|_{S^2 \setminus z_0}}(\infty) \notin q\mathbb{Z}$ .
- iii  $z \neq \infty, \infty \notin K$ : Fijamos  $z_0 \in \text{Fix}(f) \cap K$  y una isotopía  $I \in \mathcal{I}_{z, z_0, \infty}$ . Sabemos entonces que  $\nu_{I|_{S^2 \setminus z_0}}(z) = \nu_{I|_{S^2 \setminus K}}(z) \notin q\mathbb{Z}$ . Deducimos entonces que  $\nu_{I|_{\mathbb{R}^2}}(z) - \nu_{I|_{\mathbb{R}^2}}(z_0) = \lambda_I(z) - \lambda_I(z_0) = \nu_{I|_{S^2 \setminus z_0}}(z) \notin q\mathbb{Z}$ . Esto nos dice que o bien  $\nu_{I|_{\mathbb{R}^2}}(z) \notin q\mathbb{Z}$  o bien  $\nu_{I|_{\mathbb{R}^2}}(z_0) \notin q\mathbb{Z}$ , de donde se concluye lo que queremos.

*Caso B - Fijos conectados:* Supongamos entonces que tenemos una isotopía  $I \in \mathcal{I}_\infty$  y una descomposición dinámicamente transversal  $(I, \mathcal{F}, \Gamma)$  definida para  $z^*$ . Tenemos en este caso una hoja no cerrada  $\phi \in \mathcal{F}$  tal que  $\text{Fill}(\omega(\phi)) \cap \text{Fill}(\alpha(\phi)) = \emptyset$  y además  $\Gamma \cap (\phi \cup \text{Fill}(\alpha(\phi)) \cup \text{Fill}(\omega(\phi))) = \emptyset$ . Llamaremos  $K_0$  y  $K_1$  a  $\text{Fill}(\alpha(\phi))$  y  $\text{Fill}(\omega(\phi))$ , respectivamente. Tomemos entonces  $z_0 \in \text{Fix}(I) \cap K_0, z_1 \in \text{Fix}(I) \cap K_1$ .

Comenzamos por levantar la isotopía  $I$  en una isotopía  $\check{I}$  del cubrimiento universal  $\check{M}$  del anillo  $S^2 \setminus \{z_0, z_1\}$ , de donde  $\mathcal{F}$  se levanta en  $\check{\mathcal{F}}$  foliación de  $\check{M} \setminus \text{Fix}(\check{I})$ . Para fijar la orientación podemos mandar este anillo a  $S^2 \setminus \{0, \infty\} \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  por un homeo  $h$  que preserve orientación tal que  $h(z_0) = \infty$  y  $h(z_1) = 0$ , luego tomar el cubrimiento universal como lo hicimos en la Sección 1 (subsección *Espacios de cubrimiento*). Si miramos el plano  $\check{M}$  tendremos entonces que  $z_1$  corresponde con el fin que quedó arriba, y la transformación de cubrimiento  $\check{T}(x, y) = (x + 1, y)$  coincide con el levantado de dar una vuelta antihoraria entorno a  $z_1$ .

Tomamos  $\check{\phi}$  levantado de  $\phi$ , y observamos que es topológicamente una recta, con  $\check{T}(\check{\phi}) \subset R(\check{\phi})$ . Luego  $\check{W} := R(\check{\phi}) \cap \check{T}(L(\check{\phi}))$  es un disco abierto, y una componente conexa de la preimagen de  $S^2 \setminus (K_0 \cup K_1 \cup \phi)$  por la proyección de cubrimiento  $\check{\pi}$ . Tomando  $\check{W}' := R(\check{f}(\check{\phi})) \cap L(\check{f}^{-1}(\check{T}(\check{\phi})))$ , notamos que  $\check{W}' \cap \text{Fix}(\check{I}) = \check{W} \cap \text{Fix}(\check{I})$ . Tenemos entonces:

**Observación 11.2.**  $\check{W}'$  tiene cada preimagen de  $\text{Fix}(f) \cap (S^2 \setminus (K_0 \cup K_1))$  y cada preimagen de  $\text{Fix}(I) \cap (S^2 \setminus (K_0 \cup K_1))$  exactamente una vez, siendo estas preimágenes a lo más  $n - 1$ .



En los próximos párrafos usaremos resultados relativos a la teoría de Espacios de Cubrimiento (ver [H] para más detalles). Sabemos que la isotopía  $\tilde{I} \downarrow_{\check{M} \setminus \check{Fix}(\check{I})}$  se levanta en  $\tilde{I}$  del cubrimiento universal  $\tilde{M}$  de  $\check{M} \setminus \check{Fix}(\check{I})$ . Llamamos  $\tilde{\pi}$  a la proyección de cubrimiento correspondiente, y  $\tilde{G}$  al grupo de automorfismos de cubrimiento. Fijamos  $\tilde{W}'$  una componente conexa de  $\tilde{\pi}^{-1}(\check{W}' \setminus \check{Fix}(\check{I}))$  y llamamos  $\tilde{H} \subset \tilde{G}$  al estabilizador de  $\tilde{W}'$ . Definimos ahora  $\widehat{M} := \tilde{M}/\tilde{H}$  y sea  $\widehat{\pi} : \tilde{M} \rightarrow \widehat{M}$  la proyección de cubrimiento. Tenemos así la siguiente cadena de cubrimientos:  $\tilde{M} \rightarrow \widehat{M} \rightarrow \check{M} \setminus \check{Fix}(\check{I}) \rightarrow S^2 \setminus \check{Fix}(I)$ . Remarcamos que la isotopía  $\tilde{I}$  se proyecta en una isotopía  $\widehat{I}$  de  $\widehat{M}$ .

Las componentes conexas de  $\partial\tilde{W}'$  no son compactas en  $\tilde{M}$  pues cada una de ellas es un levantamiento de  $f(\phi)$  o de  $f^{-1}(\phi)$ , de donde se deduce que  $\tilde{W}'$  es simplemente conexa. Este conjunto es el cubrimiento universal de  $\widehat{W}' := \tilde{W}'/\tilde{H}$ , siendo  $\tilde{\pi} \downarrow_{\tilde{W}'}$  la proyección de cubrimiento.

**Observación 11.3.** *Por la construcción, tenemos que  $\widehat{W}'$  tiene  $\pi_1$  libre en  $k \leq n - 1$  generadores, y es homeomorfo a la esfera con  $k + 1$  pinchaduras.*

**Lema 11.4.** *Se tiene que  $\widehat{W}'$  y  $\widehat{M}$  son homeomorfas. Más aún, el morfismo  $i_* : \pi_1(\widehat{W}', z) \rightarrow \pi_1(\widehat{M}, z)$  inducido por la inclusión es un isomorfismo.*

*Demostración.* Veamos que si tomamos  $z \in \widehat{W}'$ , entonces el morfismo en cuestión es isomorfismo. Esto es así por como construimos ambas superficies: supongamos que tenemos un lazo  $\gamma \in \widehat{W}'$  tal que  $[i(\gamma)]$  es trivial en  $\widehat{M}$ . Si tomamos entonces un levantado  $\tilde{\pi}^{-1}(i(\gamma))$  incluido en  $\tilde{W}'$ , tenemos que tiene que ser una curva cerrada para poder proyectarse en trivial por  $\widehat{\pi}$ , de donde la proyección también es trivial en  $\tilde{W}'$ . La sobreyectividad es más fácil: basta ver que si  $[\gamma_i]$  es un generador de  $\pi_1(\widehat{W}', z)$ , entonces  $[i(\gamma_i)]$  es un generador de  $\pi_1(\widehat{M}, z)$ . Obtenemos así que  $\widehat{W}'$  y  $\widehat{M}$  tienen el mismo género y la misma cantidad de pinchaduras, de donde son homeomorfas por clasificación de superficies.  $\square$

Tenemos además un homeo natural  $h : \check{W}' \setminus \check{Fix}(\check{I}) \rightarrow \widehat{W}'$ , tal que para todo  $\check{z} \in \check{W}' \setminus \check{Fix}(\check{I})$  se cumple  $h(\check{z}) := \widehat{\pi}(\tilde{z})$ , siendo  $\tilde{z}$  preimagen de  $\check{z}$  por  $\tilde{\pi}$ . Este homeo se puede extender a  $\bar{h} : \check{W}' \rightarrow \widehat{W}'$  fijando los  $k$  fines correspondientes a los fijos de la isotopía, siendo  $\widehat{W}'$  un disco abierto. Asimismo, la isotopía  $\widehat{I}$  se extiende a  $\widehat{I}$  del plano  $\widehat{M}$ , que también fija los fines. Tomamos  $\bar{f} := \bar{f}_1$  y observamos que  $\bar{h}(\check{f}(\check{z})) = \bar{f}(\bar{h}(\check{z}))$ , por como construimos  $h$ . Probaremos ahora un resultado que nos permitirá proceder de forma inductiva.

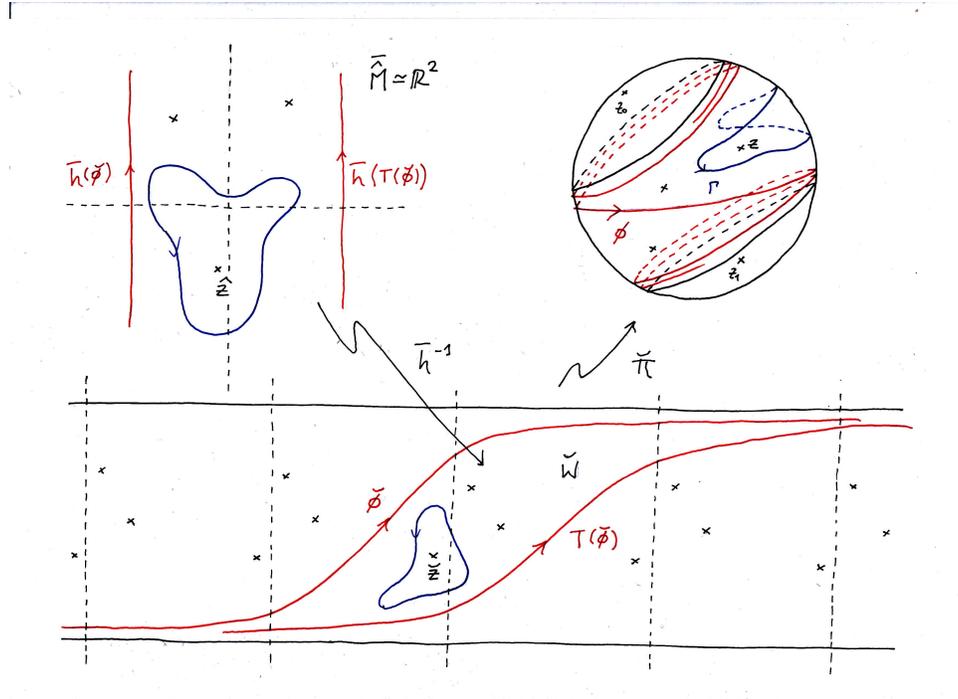
**Lema 11.5.** *Los puntos fijos de  $\bar{f}$  son las imágenes por  $\bar{h}$  de fijos de  $\check{f}$  que están en  $\check{W}$ . La cantidad de estos fijos es menor que  $n$ .*

*Demostración:* Es fácil ver que la imagen por  $\bar{h}$  de un fijo  $\check{z} \in \check{W}$  es un fijo de  $\widehat{f}$ . Para el recíproco, usaremos la transversalidad de las foliaciones. Observamos que  $\check{\mathcal{F}}$  se levanta en  $\widehat{\mathcal{F}}$ , dinámicamente transversal a  $\widehat{I}$ .

Tomemos  $\widehat{z} \in \text{Fix}(\widehat{f})$ . Si es fijo por  $\widehat{\mathcal{F}}$  entonces necesariamente es la imagen por  $\bar{h}$  de un punto  $\check{z} \in \text{Fix}(\check{I})$ , y ya tendríamos lo que buscamos; supongamos entonces que no. Basta mostrar que si tomamos un lazo  $\widehat{\gamma}$  homotópico la trayectoria de  $\widehat{z}$ , entonces  $\widehat{\gamma} \subset \widehat{W} = \bar{h}(\check{W})$ . El borde de  $\widehat{W}$  son dos rectas topológicas,  $\bar{h}(\check{\phi})$  y  $\bar{h}(\check{T}(\check{\phi}))$  respectivamente, que son hojas de  $\widehat{\mathcal{F}}$ . Luego, como  $\widehat{\gamma}$  es positivamente transversal a la foliación, no puede atravesar ninguna de esas dos hojas. Luego, o bien está incluida donde queremos, o bien está incluida en una componente conexa del complemento (que es además simplemente conexa). Pero lo segundo es imposible, porque  $\widehat{\gamma}$  es una curva cerrada, y la foliación no tiene singularidades en ninguna de esas dos componentes.

Para acotar la cantidad de fijos, basta observar que la extensión de  $f$  a  $S^2$  tenía  $n + 1$  fijos. En la construcción siguiente nos *olvidamos* de al menos dos de ellos:  $z_0$  y  $z_1$ . Luego, por la observación 11,2 tenemos a lo sumo  $n - 1$  fijos de  $\check{f}$  en  $\check{W}$ , de donde se concluye lo que queremos.  $\square$

*Usamos ahora la recurrencia:* La trayectoria completa de  $z^*$  por  $I$  es disjunta de  $K_0 \cup \phi \cup K_1$ . Levantando a  $\check{M} \setminus \text{Fix}(\check{I})$ , tenemos que el levantado de su trayectoria se queda siempre en una componente como  $\check{W}$  (no atraviesa ningún  $\check{T}^k(\check{\phi})$ , para ningún  $k \in \mathbb{Z}$ ). Luego  $\widehat{z}^*$  es periódico para  $\widehat{f}$ , y su trayectoria está incluida en  $\widehat{W}$ . La hipótesis de recurrencia nos dice que existe  $\widehat{z} \in \text{Fix}(\widehat{f})$  tal que  $V_{\widehat{f}, \widehat{z}^*}(\widehat{z}) \neq 0$ . Tomando  $\check{z} := \bar{h}^{-1}(\widehat{z})$ , la proposición 4.3 nos asegura que  $V_{\check{f}, \check{z}^*}(\check{z}) = V_{\widehat{f}, \widehat{z}^*}(\widehat{z}) \neq 0$ , de donde  $\nu_{\check{I}, \check{z}^*}(\check{z}) \notin q\mathbb{Z}$ .



Ahora que sabemos que  $\check{z}^*$  se enrolla alrededor de  $\check{z}$ , veamos que no deshace estas vueltas alrededor de ninguno de sus trasladados.

**Proposición 11.6.**  $\nu_{\check{I}, \check{z}^*}(\check{T}^k(\check{z})) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}^*$ .

*Demostración.* Lo haremos para  $k > 0$ , puesto que el otro caso es análogo. Tenemos por un lado que  $\{\check{z}\} \cup O(\check{z}) \subset R(\check{\phi})$ , y que  $\check{T}^k(\check{z}) \subset L(\check{\phi})$ . Además  $\nu_{\check{I}, \check{z}}(\check{T}^k(\check{z})) = 0$  (una trayectoria va siempre a la izquierda de la otra). Luego, como  $\check{\phi}$  es una línea de Brouwer, la Proposición 4.4 nos permite concluir lo que buscamos.  $\square$

Llamamos  $z \in S^2$  a la proyección de  $\check{z}$ . Tomamos una isotopía maximal  $I^0 \in \mathcal{I}_{z, z_0, z_1}$ , y la levantamos en  $\check{I}^0$  de  $\check{M}$ , que va de la identidad a  $\check{f}$ , pues fija  $\check{z}$ . Observemos además que  $\nu_{\check{I}^0, \check{z}}(\check{T}^k(\check{z})) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}^*$ . Deducimos entonces que  $\check{I}^0 \simeq \check{I}$ , y luego que  $\nu_{\check{I}^0, \check{z}}(\check{T}^k(\check{z})) = \nu_{\check{I}, \check{z}}(\check{T}^k(\check{z})), \forall k \in \mathbb{Z}$ .

Tomamos ahora una curva  $\gamma : (0, 1] \rightarrow M$  tal que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \gamma(t) = z_0$  y  $\gamma(1) = z$ , y consideramos el levantamiento que termina en  $\check{z}$ . Si miramos el valor de  $\lambda_{I^0, z^*}(z) - \lambda_{I^0, z^*}(z_0)$ , vemos que no es otra cosa que la cantidad de veces que  $(I^0)^q(z^*)$  atraviesa  $\gamma$ , contadas con signo, que es lo mismo que la

cantidad de veces que  $(\check{I}^0)^q(\check{z}^*)$  atraviesa  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \check{T}^k(\check{\gamma})$ , contadas con signo. Tenemos así  $\lambda_{I^0, z^*}(z) - \lambda_{I^0, z^*}(z_0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu_{\check{I}^0, \check{z}^*}(\check{T}^k(\check{z})) = \nu_{\check{I}, \check{z}^*}(\check{z}) \notin q\mathbb{Z}$ .

*Remate:* concluimos la prueba como en el primer caso de reductibilidad, recordando las Proposiciones 6.3 y 6.6:

- i Si  $z_0 = \infty$ , tenemos  $\nu_{I^0 \upharpoonright \mathbb{R}^2}(z) = \lambda_{I^0}(z) - \lambda_{I^0}(\infty) \notin q\mathbb{Z}$ . (Razonamos de forma análoga si  $z = \infty$ .)
- ii Si  $z \neq \infty$  y  $z_0 \neq \infty$  tomamos  $I^1 \in \mathcal{I}_{z, z_0, \infty}$ , y sabemos que existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $I^1$  es homotópica a  $\mathcal{C}_{z_0, \infty} I^0$  en  $\mathcal{I}_{z_0, \infty}$ . Tenemos entonces que  $\nu_{I^1 \upharpoonright \mathbb{R}^2}(z) - \nu_{I^1 \upharpoonright \mathbb{R}^2}(z_0) = \lambda_{I^1}(z) - \lambda_{I^1}(z_0) = \lambda_{I^0}(z) - \lambda_{I^0}(z_0) - kq \notin q\mathbb{Z}$ . De esta manera, o bien  $\nu_{I^1 \upharpoonright \mathbb{R}^2}(z) \notin q\mathbb{Z}$  o bien  $\nu_{I^1 \upharpoonright \mathbb{R}^2}(z_0) \notin q\mathbb{Z}$ , lo que concluye la prueba.  $\square$

## Referencias

- [B] L. E. J. Brouwer. *Beweis des ebenen Translationssatzes*. Math. Ann 72 (1912)
- [BF] P. Boyland, J. Franks. *Notes on Dynamics of surface homeomorphisms*. Informal Lecture Notes, Warwick. (1988)
- [E] D.B.A. Epstein. *Curves on 2-manifolds and isotopies*. The University of Warwick, Coventry, England. (1965)
- [HD] M.E. Hamstrom, E. Dyer. *Regular mappings and the space of homeomorphisms on a 2-manifold*. Duke Math. (1958)
- [LR] F. Le Roux. *Homomorphismes de surfaces : théoremes de la fleur de Leau-Fatou et de la varit stable*. Astrisque 292. (2004)
- [LC] P. Le Calvez. *Points priodiques des homomorphismes du plan et points fixes*. Société mathématique de France. (2008)
- [LC2] P. Le Calvez. *Une version feuilletée équivariante du théoreme de translation de Brouwer*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2005)
- [W] H. Whitney. *Regular families of curves*. Ann. of Math. 34 (1933)
- [W2] H. Whitney. *On regular families of curves*. Bull. Amer. Math. Soc. 47 (1941)
- [PM] J. J. Palis, W. D. Melo. *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*. Springer. (1982)
- [H] A. Hatcher. *Algebraic Topology* Cambridge University Press. (2002)
- [GP] V. Guillemin, A. Pollack. *Differential Topology*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall (1974)
- [S] A. Putman. *The generalized Schoenflies theorem*. Rice University, MS 136
- [BCL] F. Béguin, S. Crovisier, F. Le Roux. *Fixed point sets of isotopies on surfaces* arXiv:1610.00686v2 (2017)