

TRABAJO MONOGRÁFICO

Estabilidad de las redes neuronales, una vista desde los sistemas dinámicos

Harold Selvaggi

Orientador:

Jorge Groisman
Facultad de Ciencias

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
MONTEVIDEO, URUGUAY

*Quiero agradecer a Jorge Groisman
por su apoyo y guía en la organización de este trabajo
y por ayudarme a fortalecer mis áreas de mejora.*

*También agradezco a Argimiro Arratia
por su valioso soporte computacional y por brindar
otro punto de vista a lo largo de esta monografía.*

Índice

Capítulo 1. Introducción	5
1. Estructura	9
Capítulo 2. Machine Learning	11
1. Introducción	11
2. Aprendizaje supervisado	11
3. Formalización del aprendizaje supervisado	12
4. Proceso de aprendizaje	13
5. Capacidad de un modelo y sobreajuste	15
6. Redes neuronales	15
Capítulo 3. Redes neuronales	17
1. Un poco de historia	17
2. Arquitectura de redes neuronales	19
3. Entrenamiento	20
4. Teoremas de aproximación	23
Capítulo 4. Estabilidad	27
1. Introducción	27
2. Lyapunov	28
3. Ecuaciones diferenciales lineales no autónomas	39
4. Teorema principal	46
5. Perturbaciones	51
Capítulo 5. Estabilidad en redes neuronales	59
1. Red recurrente	59
2. Discretización	60
3. Método de Euler	61
4. Estabilidad	63
Capítulo 6. Experimentos	67
1. Conclusiones	70
Bibliografía	75

CAPÍTULO 1

Introducción

La motivación de este trabajo monográfico es estudiar el artículo [23], el cual aborda el problema de guiar la definición de una arquitectura de redes neuronales utilizando fundamentos matemáticos. Este artículo adopta un enfoque basado en la teoría de sistemas dinámicos, con un énfasis particular en propiedades de estabilidad. Sin embargo, al igual que muchos otros estudios que emplean enfoques similares, tiende a presentar de manera imprecisa algunos de los teoremas más relevantes que utilizan. Una parte significativa del trabajo aquí presentado se dedica a formalizar uno de los teoremas más comunes en este tipo de artículos.

Antes de continuar, es importante enfatizar que trabajaremos con ecuaciones diferenciales no autónomas de la forma $\dot{x} = f(x, t)$. Asumiremos que estas ecuaciones cumplen con las condiciones del teorema de Picard, lo que nos garantiza la unicidad y existencia de las soluciones. Además, supondremos que dichas soluciones existen para todo tiempo futuro. Para motivar el desarrollo del resto del trabajo, expondremos el teorema principal utilizado en este y en muchos otros artículos tal como suele ser presentado en la literatura. Este teorema es fundamental pues permite analizar la estabilidad de sistemas no autónomos mediante el análisis de los autovalores del Jacobiano. Sin embargo, como demostraremos mediante un contraejemplo, este enunciado es insuficiente.

Teorema 0.1. *Las soluciones de una ecuación diferencial $\dot{x} = f(x, t)$ no autónoma son estables¹ cuando los autovalores de la matriz Jacobiana satisfacen:*

$$\max_{i=1,\dots,r} \operatorname{Re}(\lambda_i(J(t))) < 0$$

para todo $t \geq 0$.

En el contexto del teorema J se refiere a la matriz Jacobiana de f respecto a la coordenada espacial, evaluada en el punto de equilibrio que se está estudiando de la ecuación diferencial, esto sería $J_{x_0}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \right)$ siendo x_0 tal que $f(x_0, t) = 0$ para todo t . Es importante tener en cuenta que si bien el teorema no lo menciona explícitamente en los artículos está haciendo referencia a ecuaciones diferenciales no autónomas.

Como demostraremos a continuación, el Teorema 0.1 tal como está enunciado presenta deficiencias: la condición sobre los autovalores del Jacobiano, aunque necesaria,

¹Aunque en la literatura se menciona "estabilidad de las soluciones", técnicamente se refiere a la estabilidad del punto de equilibrio x_0 donde $f(x_0, t) = 0$ para todo $t \geq 0$.

no es suficiente para garantizar la estabilidad. A lo largo del capítulo de estabilidad estableceremos las condiciones adicionales requeridas, culminando en el Teorema 4.2, que proporciona un enunciado correcto y completo.

Ejemplo 0.1. *Se puede demostrar con un ejemplo simple (tomado de [25]) que el teorema 0.1 bajo esas hipótesis presenta algunas fallas, incluso en el caso lineal. Consideremos la siguiente ecuación diferencial no autónoma:*

$$(1) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2 t & 1 - \frac{3}{2} \cos t \sin t \\ -1 - \frac{3}{2} \cos t \sin t & -1 + \frac{3}{2} \sin^2 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

En esta ecuación diferencial, 0 es un punto de equilibrio y los valores propios son:

$$(2) \quad \lambda_1 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4} \quad \lambda_2 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{4}$$

Los cuales tienen partes reales estrictamente negativas para todo t . Sin embargo, las siguientes dos soluciones linealmente independientes se alejan del origen:

$$(3) \quad v_1(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix} e^{\frac{t}{2}} \quad v_2(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} e^{\frac{t}{2}1}$$

A lo largo del capítulo de estabilidad, vamos a dar un poco de claridad a que se refieren con la estabilidad del punto de equilibrio y el resto de hipótesis adicionales que van a ser necesarias para que el teorema sea válido al menos de la forma que se logró encontrar una prueba.

Es importante enfatizar que esta teoría es aplicable específicamente a arquitecturas de redes recurrentes y ResNets. En la parte experimental de este trabajo nos vamos a enfocar específicamente en su aplicación con redes recurrentes. Vamos a atacar un problema diferente al que plantea el artículo estudiado para el cual se puedan conseguir fácilmente datos públicos y de esta forma el experimento pueda ser fácilmente replicado por quien quiera hacerlo. Se abordará el problema de clasificación de imágenes de MNIST y lo vamos a hacer utilizando una arquitectura como la propuesta en [6].

Existen dos razones principales para abordar este problema en lugar del planteado en el artículo original. En primer lugar, no fue posible obtener los datos de entrenamiento del modelo presentado en [23]. En segundo lugar, las pruebas realizadas en dicho artículo sobre la estabilidad de su modelo requirieron simplificaciones que eliminaron deliberadamente la no autonomía del sistema. Como consecuencia, el análisis terminó enfocándose en una arquitectura distinta a la utilizada originalmente en el artículo. Por otro lado, la arquitectura propuesta en [6] impone ciertas restricciones a la red, lo que permite mantener la no autonomía y facilita la demostración de la estabilidad buscada.

¹Las soluciones se pueden obtener usando la teoría de Floquet. No obstante es fácil verificar que ambas son soluciones.

0.1. ¿Como llegamos a ecuaciones diferenciales? El artículo que se estudia se enfoca en comprender como la estabilidad afecta a las redes recurrentes. Para comprender un poco que es una red recurrente y como esto lleva a ecuaciones diferenciales podemos pensar en un modelo de machine learning cuyo objetivo es clasificar un texto como por ejemplo critica de una película en positiva, negativa o neutra (ver figura 0.1).

Como los textos pueden tener largos variables el enfoque que se toma con las redes recurrentes es de mantener un estado (h en la figura) que cumple el rol de memoria y resume todo lo importante que se observo en el texto hasta el final de la oración. El texto pasa por la red recurrente de izquierda a derecha de la misma forma que lo leería una persona y el estado se va actualizando con todo lo que debería ser relevante hasta ese punto. Una vez que se consumimos todo el texto el estado final se pasa por otra red neuronal generalmente una red densa que en la figura llamamos g . Esta red densa no hace mas que aproximar una función que va a ser continua excepto en un numero finito de puntos. El resultado final que nos da la clasificación de la critica a la película no es otra cosa que la composición $g \circ h$.

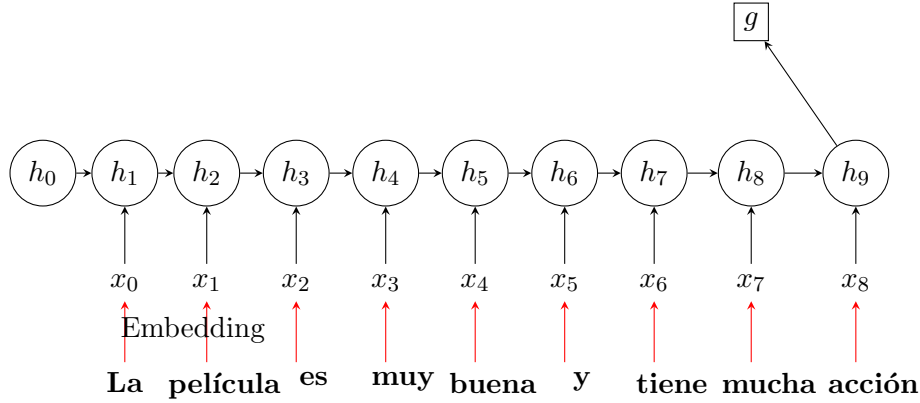


FIGURA 1. Red recurrente procesando una sentencia de texto

Dada la representación de la red recurrente vemos que

$$h_i = f(h_{i-1}, x_{i-1})$$

¹

y en el capítulo sobre estabilidad en redes neuronales veremos que esto se lo puede ver como la discretización de una ecuación diferencial de la forma:

$$h(t) = f(t, h, x(t))$$

Observación: Es comun en ciertas areas llamar al espacio de fase las ecuaciones diferenciales espacio de estado y por lo tanto llamar estado a h .

¹La mayoría del material usa la notación $h_i = f(h_{i-1}, x_i)$ en lugar de $h_i = f(h_{i-1}, x_{i-1})$ desplazando la entrada de la red un lugar. Al autor le parece menos confuso llevar ambos indices de la misma forma.

0.2. ¿Porque estudiar la estabilidad? Existen ciertas características que son intuitivamente deseables en el comportamiento de la red. ¿Qué ocurre si comenzamos con un estado inicial h_0 que no está cerca de un punto de equilibrio? Sería deseable que, en tales casos, el estado convergiera a algún punto de equilibrio, probablemente relacionado con una clasificación de las sentencias.

Consideremos ahora perturbaciones en la entrada. Si en la figura 0.1 reemplazamos “muy” por “bastante”, esperaríamos que la clasificación como crítica positiva se mantenga, pues el cambio semántico es mínimo.

Podemos comenzar a reflexionar sobre qué propiedades son relevantes para garantizar un buen comportamiento en el sentido del párrafo anterior. Supongamos que la red recurrente calcula una función h y que esta es continua. Además, si suponemos que g también es continua, su composición será continua. Sin embargo, esta propiedad no es suficiente, ya que la continuidad es una noción local y, al trabajar con datos secuenciales, el sistema puede desviarse significativamente en la dimensión temporal. Así, aunque el estado inicial esté muy cerca de un punto de equilibrio, a lo largo del tiempo las soluciones pueden terminar alejándose considerablemente.

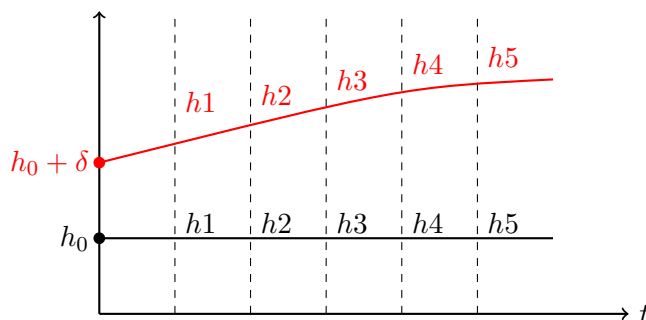


FIGURA 2. Soluciones continuas con condiciones iniciales muy parecidas

Sin embargo, con la estabilidad, las soluciones se mantendrán cercanas en el futuro, y con la estabilidad asintótica, convergerán hasta volverse prácticamente indistinguibles, como se observa en la figura 0.2. Este es precisamente el tipo de comportamiento deseado.

Para responder la segunda pregunta, se analizará el concepto de estabilidad entrada/estado al final del capítulo dedicado a la estabilidad.

Es importante entender que al demostrar estabilidad exponencial para la EDO, esto garantizará no sólo la convergencia de las soluciones al punto de equilibrio[20], sino también que, al realizar pequeños cambios en la entrada, la evolución del estado de la solución no se aleja demasiado del punto de equilibrio a futuro (esto lo probaremos mas adelante 5). Además de lo mucho que se aleje va a depender de que tan grande sea la perturbación, es importante entender que al perturbar la entrada lo que antes era un punto de equilibrio para una entrada en particular ahora puede no necesariamente serlo.

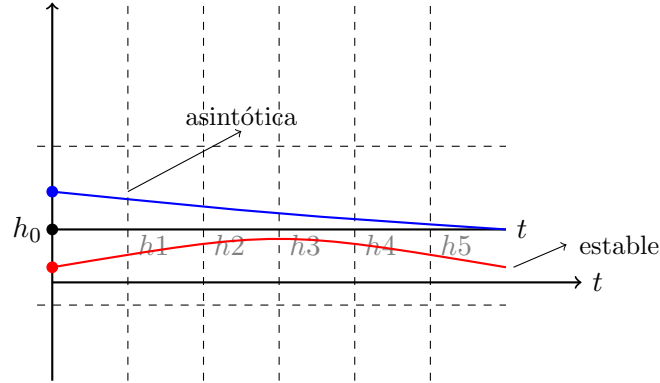


FIGURA 3. Soluciones estables y asintóticas

Esta última propiedad es realmente importante, ya que nos indica que la red puede tolerar ruido en la entrada y aún así proporcionar una respuesta razonable.

En una aplicación típica, el estado de la RNN se utiliza luego como entrada para una red densa o algún otro tipo de red neuronal, que se usa para realizar una clasificación u ofrecer otro tipo de respuesta dada la entrada inicial. La mayoría de las veces, esta segunda red es una función suave, lo cual garantiza que todo lo que necesitamos considerar es la estabilidad de la parte correspondiente a la RNN ya que la suavidad de la segunda red garantiza el buen comportamiento respecto a las perturbaciones.

1. Estructura

La monografía está dividida en cuatro partes luego de esta introducción. La primera parte, que está compuesta por los próximos dos capítulos, consiste en dar una visión general sobre machine learning y redes neuronales a muy alto nivel. La segunda parte, consiste en la teoría matemática necesaria para poder entender el artículo principal en el que se centra la misma al igual que varios de los artículos que están fuertemente relacionados.

La tercera parte consiste en aplicar los conceptos de estabilidad desarrollados para presentar algunos modelos de redes recurrentes que presenten dichas características de estabilidad. Se terminará con la última sección presentando los resultados experimentales de implementar dicha red neuronal y compararla con otros tipos de redes neuronales.

CAPÍTULO 2

Machine Learning

1. Introducción

En este capítulo vamos a dar una breve introducción a lo que es el aprendizaje estadístico, vamos a hablar de lo que es una función de pérdida o error, vamos a explicar brevemente que es el sobreajuste y finalmente vamos a contar que rol juegan las redes neuronales.

2. Aprendizaje supervisado

Un ejemplo de aprendizaje supervisado es la predicción del valor de una vivienda a partir de un conjunto de características, como la cantidad de metros cuadrados edificadas, la superficie total del terreno y el número de habitaciones. Basándose en estos datos, el objetivo es estimar el precio de la propiedad. A continuación, se presenta una tabla con un conjunto de datos de ejemplo:

Metros edificadas	Superficie total	Habitaciones	Precio
50	100	4	200.000
75	100	4	220.000
100	150	4	400.000

En términos generales, un modelo de aprendizaje supervisado se puede interpretar como una función matemática que toma las características disponibles como variables de entrada y su salida se interpreta como el valor de la variable que se quiere predecir. Existen diversas estrategias para construir estos modelos, que van desde ajustes polinomiales en múltiples variables hasta redes neuronales profundas.

En el ejemplo anterior, la variable que se intenta predecir puede tomar un conjunto continuo de valores, lo que define un problema de regresión. En otras situaciones, la variable a predecir pertenece a un conjunto discreto de categorías. Por ejemplo, en el Capítulo 1 se analizó la tarea de clasificar críticas de películas como "positivas" o "negativas", lo cual corresponde a un problema de clasificación.

El problema que se resuelve en la parte experimental de esta monografía es de este tipo, pero en este caso orientado a imágenes. Por lo tanto no se va a poner énfasis en ninguno de los otros tipos de aprendizaje mas que mencionarlos.

3. Formalización del aprendizaje supervisado

Para poner el aprendizaje supervisado en terminos un poco mas formales, las características de las que hablamos en la seccion anterior, cantidad de metros cuadrados edificadas, superficie total del terreno y el número de habitaciones las vamos a representar utilizando un vector numérico en $X \in \mathbb{R}^3$ tal que $X = (m, e, h)$ donde m es la cantidad de metros cuadrados edificadas, e la cantidad de metros cuadrados totales del terreno y h la cantidad de habitaciones. También vamos a manejar otra variable Y que va a ser el precio de la casa.

Un conjunto formado por pares de estos dos vectores $\{(X_i, Y_i)\}$ donde $(X_i, Y_i) \in \mathbb{R}^4$ forman el conjunto de entrenamiento. El objetivo es predecir el valor de Y en función del valor de X . Hay que observar que en general tanto X como Y son variables aleatorias y en general no es posible encontrar una relación perfecta entre X e Y . Esto se debe a que pueden existir características que sean mejores predictores de el valor de Y que no se estén teniendo en cuenta o que incluso no se sepa de su existencia. También podría suceder como en la mayoría de los casos prácticos que no sea posible medir de forma perfecta los valores de X .

Lo mejor que se puede lograr en general es tomar la decisión en base al valor de $Y = E(Y|X = x)$ o $Y = \operatorname{argmax}_y P(Y = y|X = x)$ dependiendo de los valores posibles que pueda tomar Y . Lo que tiene sentido ya que habría de esperarse que el valor que en general se aleje menos del valor real sea la esperanza condicional. Para más información se puede ver [11].

Supongamos que $X \in \mathbb{R}^n$ y $Y \in \mathbb{C}$, donde $\mathbb{C}$ es un conjunto finito y una función $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, de forma que dado el valor de X nos da la predicción del valor de Y será llamada función de clasificación. Un ejemplo de este escenario es el presentado en la introducción.

En general se pueden tener muchos clasificadores diferentes para un mismo problema y es necesario tener una forma de evaluar que clasificador es mejor. Con este objetivo si se esta tratando un problema de clasificación se podría tomar como error a $L(g) = P(g(X) \neq Y)$, la probabilidad de que el clasificador cometa un error. En otros casos Y puede tomar un continuo de valores, en ese escenario se puede ver de forma similar que la mejor predicción que se puede hacer es $Y = E(Y|X = x)$ y este problema se conoce como regresión.

La función de error no solamente es útil al momento de decidir entre un conjunto de clasificadores. Para encontrar el mejor clasificador muchas veces se presenta un modelo paramétrico como por ejemplo un polinomio de grado máximo m , donde las variables son las diferentes características. En este caso se busca encontrar los valores de los coeficientes que dan lugar al clasificador con menor error. Muchos métodos numéricos utilizan la función de error con algoritmos de minimización para encontrar los mejores parámetros dados los datos.

Como se mencionó al principio, existen otros casos como por ejemplo aprendizaje no supervisado donde se tienen valores de la variable aleatoria X pero no existe una

variable Y que estemos tratando de predecir sino que queremos extraer algún otro tipo de información a partir de los datos. Un ejemplo de esto podría ser descubrir grupos de personas a quienes le gusten ciertos géneros de películas en base a algún conjunto de datos. De esta forma se estaría generando una predicción de los géneros que le gusta a un usuario en base a otros datos. No obstante en estos casos los grupos obtenidos no siempre tienen por qué tener un significado tan claro.

En el caso de aprendizaje por refuerzo se quiere obtener un modelo que tome ciertas decisiones pero la retroalimentación de si la decisión fue o no la correcta es algo que no sucede hasta mucho tiempo más tarde. Ejemplos de este tipo puede ser un juego de ajedrez, donde un movimiento que pueda parecer malo en un cierto momento tenga efectos que uno no se esperaría mas adelante en el juego. Otro ejemplo con el que podemos estar muy familiarizados es el de una aspiradora robot que barre el piso de nuestra casa y esta tratando de hacerlo de la forma mas rápida posible. En todos estos casos en general no podemos saber qué tan bien se desempeñó el modelo en base a sus acciones inmediatas sino hasta el final de la tarea.

Independientemente del tipo de problema, un modelo de aprendizaje estadístico dará como resultado una función $f : A \rightarrow B$ en base a un conjunto de datos de entrenamiento. Se suele asumir sobre el conjunto de datos de entrenamiento que cada muestra es idénticamente distribuida e independiente.

Los modelos pasan por al menos dos etapas, aprendizaje y producción. Se asume que el conjunto de funciones que un modelo puede dar como salida cuando es entrenado es tal que no incluye todas las funciones existentes sino un conjunto bien definido. Generalmente este conjunto de funciones está especificado paramétricamente y el proceso de aprendizaje se encarga de encontrar los parámetros óptimos para obtener la función que minimiza cierta medida de error.

La limitación del conjunto de funciones tiene dos partes. Por un lado computacionalmente no es realmente posible expresar todas las funciones, si pensamos en los polinomios de grado n , sus coeficientes solo se pueden representar con cierto grado de precisión y no es posible representar cualquier conjunto de coeficientes. Por otro lado *The No Free Lunch Theorem* nos dice que un modelo que pudiera dar como salida cualquier función existente seria necesariamente malo en algún problema. Al conjunto de funciones que puede seleccionar un modelo se le suele llamar espacio de hipótesis.

En la etapa de producción simplemente pasamos un ejemplo por la función y la salida es el valor de regresión o clasificación dado por el modelo de aprendizaje estadístico.

4. Proceso de aprendizaje

En esta etapa, los datos obtenidos se dividen generalmente en tres conjuntos: entrenamiento, test y validación. El conjunto de validación nunca es examinado y se le utiliza solamente una vez que el modelo terminó de entrenar para tener una idea de que tan bien o mal va a funcionar el modelo cuando se enfrente a datos nuevos. El conjunto de entrenamiento es lo que ve el modelo y se utiliza para minimizar la función de error

y encontrar los parámetros óptimos. Finalmente el conjunto de test sirve como un intermediario que nos permite hacernos una idea de como podría estar evolucionando la pérdida del modelo cuando se ponga frente a otro conjunto de datos obtenidos partiendo de la misma distribución. Esto se suele reportar periódicamente durante el proceso de entrenamiento para tener una idea de la tendencia del modelo. Al observar la gráfica del error cometido en este conjunto y en el de entrenamiento se puede detectar de forma temprana problemas de sobreajuste o subajuste a los datos.

El conjunto de entrenamiento esta formado por pares $\{(x_i, y_i)\}$ donde x_i, y_i son variables aleatorias que están dadas por distribuciones de probabilidad $P(x_i)$ y $P(y_i|x_i)$. Esto junto con una función de perdida y un algoritmo de optimización es lo que hará que se obtenga la parametrización que minimice el error. Esto seria:

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmin}_{\theta} \{L(f_{\theta}(x_i), y_i)\}$$

Lo que debe leerse como $\hat{\theta}$ es el valor de θ que minimiza la expresion $L(f_{\theta}(x_i), y_i)$.

La función de perdida será dependiente del problema que se intente resolver, en general se trata de que sea una función suave de forma que sea más fácil de tratar y aplicar muchos de los algoritmos de optimización conocidos.

El clasificador podrá elegir de un conjunto H de funciones posibles que llamaremos clase de hipótesis. Dada la salida del clasificador $h : X \rightarrow Y$ se define el error como la esperanza de la función de perdida $L : Y \times Y \rightarrow R$ en las predicciones del clasificador. Esto es:

$$L_{D,f} = E(L(f(x), y))$$

donde típicamente $L(y, y) = 0$ y $L(z, y) \geq 0$.

En general como no se tiene acceso a todos los ejemplos del espacio muestral lo que se tiene es una aproximación a la perdida que se da por:

$$\hat{L}_{D,f} = \frac{1}{n} \sum_{x \in T} L(f(x), y)$$

De acuerdo a la ley de los grandes números en el limite esto converge a la esperanza que queríamos calcular.

De la misma forma que x_i, y_i son variables aleatorias, la pérdida $L_{D,f}(h)$ también lo será. Esto quiere decir que hay cierta probabilidad $\delta > 0$ de obtener una muestra no representativa. Llamaremos a $1 - \delta$ el parámetro de confianza de la predicción. También definimos una tolerancia para el error del modelo de aprendizaje $\epsilon > 0$. Diremos que el modelo es exitoso si $L_{D,f} < \epsilon$ y en caso contrario que falló en aprender.

Es importante ver que no se espera que el error sea 0 ya que es posible que la función que intentamos aproximar en realidad no sea parte del espacio de hipótesis y por lo tanto tendremos que conformarnos con obtener una función que no difiera mucho de lo mejor que se puede lograr con el espacio de hipótesis seleccionado.

5. Capacidad de un modelo y sobreajuste

Se define la capacidad de un modelo intuitivamente como el tamaño del conjunto de funciones donde este puede elegir; mientras más grande sea el conjunto se suele decir que tiene mayor capacidad.

Al momento de optimizar en el espacio de hipótesis existe un parámetro que realmente minimiza el problema θ y un parámetro $\hat{\theta}$ que es obtenido por el optimizador. Tenemos que $\hat{\theta} = g(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ y por lo tanto $\hat{\theta}$ es una variable aleatoria. Se define el sesgo de un estimador como

$$\text{bias}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

Otro estimador de interés es la varianza $\text{Var}(\hat{\theta})$, esto nos da una idea de que tanto pueden variar los parámetros cuando se calculan con diferentes conjuntos de entrenamiento.

Un modelo se dice que sobreajusta los datos cuando su capacidad de predicción sobre los datos de entrenamiento en comparación con nuevas muestras es muy diferente. Esto puede suceder en casos donde se tienen muy pocos datos de entrenamiento y el modelo tiene mucha capacidad. A modo de ejemplo se podría estar tratando de encontrar un predictor para datos que siguen una forma lineal respecto a una variable observable y el modelo que usamos permite polinomios de muy alto grado. En este caso se podría estar ajustando el ruido en los datos y esto hacer que al ver nuevos ejemplos el modelo se comporte muy mal.

6. Redes neuronales

El espacio de funciones utilizadas para aproximar $f : X \rightarrow Y$ puede estar dado como una familia paramétrica de formas muy diferentes. Podemos pensar en un clasificador muy restrictivo imponiendo condiciones como por ejemplo que se trata de un modelo lineal y diciendo que $\hat{f}(x) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{i=n} \beta_i x_i$, donde será necesario encontrar los valores apropiados de β_i para minimizar el error.

En lo que sigue de esta monografía nos va a interesar trabajar exclusivamente con modelos donde el espacio de funciones está restringido exclusivamente a redes neuronales. Como se observará mas adelante esto nos ofrece ciertas garantías de lo que se puede llegar a hacer, como lo expresan los diferentes teoremas de aproximación universal.

CAPÍTULO 3

Redes neuronales

En este capítulo se va a hacer una introducción al funcionamiento operacional de las redes neuronales de una forma un tanto informal. Esto va a permitir que mas adelante se traten los temas matemáticos relacionados a las redes neuronales.

1. Un poco de historia

Las redes neuronales tienen sus raíces en la década de los 40 (ver [4] para más información), cuando se estudiaban los mecanismos biológicos que rigen el funcionamiento del cerebro. En estos estudios, se describe una neurona como una entidad compuesta por tres partes: las dendritas, el cuerpo y el axón. Las dendritas se encargan de recibir las señales enviadas por otras neuronas. Todas estas señales convergen en el cuerpo de la neurona, y si la suma de estas señales es lo suficientemente grande, se propaga a través del axón, enviando una señal a otras neuronas.

En 1962 se creó la primera versión de neurona sintética que utiliza la mayoría de las técnicas que siguen hasta hoy día, esta se conoce como perceptrón y fue creado por Rosenblatt. Esta se basaba en los principios biológicos descritos anteriormente. Podemos visualizar las dendritas recibiendo señales de entrada x_i , el cuerpo de la neurona sumando todas las entradas y emitiendo una posible señal de salida. En este caso, la entrada total a la neurona está dada por:

$$a = \sum_{i=0}^N w_i x_i$$

Debido a que tomando combinaciones lineales de combinaciones lineales solamente se pueden aproximar funciones lineales se utiliza alguna función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no lineal que se aplica a la combinación lineal anterior. Con este fin existen varias funciones que se utilizan a las que se llama funciones de activación.

1.1. Funciones de activación. Hay algunas funciones de activación que no necesariamente son derivables e incluso algunas que no son continuas como pasa con algunas de las siguientes.

Heaviside

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Signum

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

ReLU

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Luego tenemos otras funciones de activación continuas con las que es un poco más fácil aplicar los algoritmos de optimización como descenso de gradiente.

TanH

$$f(x) = \text{TanH}(x)$$

Sigmoid

En la capa de salida es una función muy útil para modelar una probabilidad que dicierne entre dos opciones. La salida de f se suele interpretar como la probabilidad de una clase concreta.

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Softmax

Este tipo de activación es muy útil en la capa de salida cuando se quiere dar una salida categórica que puede ser de k clases diferentes, en este caso $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ y la suma de todas las coordenadas de $f(a)$ termina siendo 1 para dar lugar a una probabilidad.

$$f_i(x) = \frac{e^{x_i}}{\sum_j e^{x_j}}$$

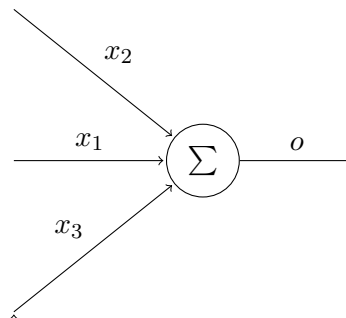


FIGURA 1. Perceptrón

2. Arquitectura de redes neuronales

La arquitectura de una red neuronal se define como la organización, interconexiones existentes, funciones de activación y los diferentes tipos de neuronas que forman la red. Parte del material de esta sección se puede ver en [4].

2.1. Redes densas. Una red densa está formada por una colección de neuronas que se agrupan en capas y hay conexiones de una capa a la siguiente. Una neurona estará representada por una función de la forma $f(W \cdot x + b)$ donde $W \in \mathbb{R}^n$ y $x, b \in \mathbb{R}^n$ y f es una función de activación.

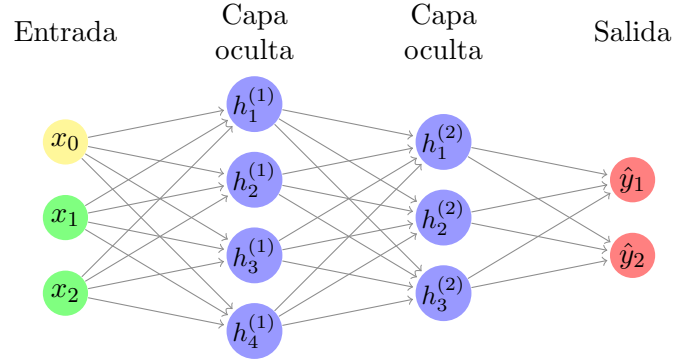


FIGURA 2. Red densa

Como se puede ver en la Figura [2] las neuronas se pueden colocar en paralelo para poder tener salidas en dimensión mayor a 1 y sus salidas también pueden ser entrada a otros perceptrones que estén delante de ellos. Todos los perceptrones que están en la misma vertical se dice que están en la misma capa, en el caso de tener m perceptrones en una capa y que todos estén usando la misma función de activación se lo puede expresar matemáticamente como $f(Wx + b)$ donde $W \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $x, b \in \mathbb{R}^n$ y f es una función que se aplica entrada a entrada.

En este caso en concreto, para que una red densa funcione correctamente, es necesario calcular las diferentes matrices W al igual que los b para que la red produzca salidas esperadas para las diferentes entradas. Esto se logra a través de un proceso de optimización conocido como propagación hacia atrás.

2.2. Redes convolucionales. Las redes convolucionales surgieron como una mejor alternativa para el procesamiento de imágenes, en cierta forma esto se debe a ciertas propiedades de invarianza por traslaciones. Las imágenes en general se representan como una matriz de $N \times M$ puntos en un formato *RGB* (rojo, verde y azul) donde cada color se representa por un número entre 0 y 255. Si quisiéramos entrenar una red densa con una sola capa donde se utiliza una única neurona, se estarían necesitando un mínimo de $N * M * 3$ pesos en la matriz W . Una imagen de baja calidad hoy día podría constar de $1024 \times 768 = 786432$ píxeles en total por lo que se necesitarían al menos 3 veces

esa cantidad de pesos para poder procesarla y además con dicha configuración no se obtendrían buenos resultados.

Una red convolucional puede representarse como una matriz cuadrada de números, típicamente de dimensiones entre 3 y 11. Estas matrices se utilizan de forma que se realiza una operación de convolución (discreta) sobre la imagen para dar como resultado una nueva representación de la imagen original. Al igual que en las capas densas se suelen apilar varias capas convolucionales que van reduciendo las dimensiones de la imagen resultante. En la última capa muchas veces se suele encontrar una red densa que se encarga de realizar una categorización de la imagen de entrada.

La dimensión de la imagen resultante luego de una convolución generalmente se reduce ya que los píxeles de los bordes se pierden en el proceso ya que la convolución no sale del área de la imagen. Si se aplica una convolución de 3×3 sobre una imagen de 15×10 el resultado va a ser una imagen de 13×8 ya que la convolución no sale de los confines de la imagen al calcularse.

Muchas veces se utilizan elementos adicionales como cambiar el paso, es decir que la convolución no se mueva un paso a la vez sino que de saltos. Otros métodos son agregar un borde de píxeles de color $(0, 0, 0)$ para que la imagen resultante tenga las mismas dimensiones que la original.

2.3. Redes recurrentes. Las redes recurrentes son útiles para tratar con datos secuenciales. Se puede pensar por ejemplo una cadena de texto donde se ha aplicado alguna transformación de cada palabra a algún valor numérico el cual puede alimentarse de forma secuencial a la red recurrente (ver figura 3). La función que transforma las palabras en valores numéricos generalmente es conocida como *embedding*.

Estas redes también se pueden utilizar para construir traductores de texto entre diferentes idiomas utilizando más de una salida. Como el número de palabras de una traducción no tiene que ser igual en el idioma destino la cantidad de salidas no tiene necesariamente que coincidir con la cantidad de entradas. Para esta tarea es muy común utilizar una arquitectura conocida como *encoder-decoder*.

3. Entrenamiento

Para entrenar una red neuronal se considera a la red como un grafo computacional, donde los nodos son las neuronas y las aristas del grafo son las conexiones entre las mismas. Los cálculos realizados por una neurona fluyen a través de las aristas hasta llegar a las neuronas que están conectadas.

La matriz de pesos que conectan las neuronas de la capa i con las de la capa $i + 1$ vamos a llamarle a sus entradas w_{jk}^i donde j y k son las correspondientes neuronas en la capa i e $i + 1$ respectivamente. Tengamos en cuenta que no todas las capas tienen porque tener la misma cantidad de neuronas por lo tanto las matrices W^i no tienen porque ser cuadradas. Se puede ver [2] para más detalles.

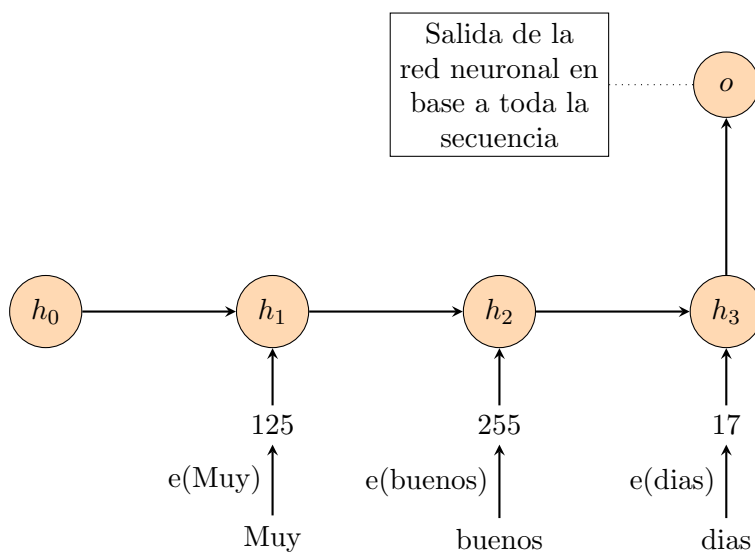


FIGURA 3. Red recurrente

El proceso de entrenamiento consiste en encontrar los pesos w_{jk}^i para todas las matrices de forma que el error cometido por la red neuronal al observar una nueva entrada sea el más pequeño posible. Para lograr esto se utiliza una técnica llamada descendiente por el gradiente que consiste en una aplicación de la regla de la cadena para propagar los errores desde la salida hacia las entradas e ir ajustando los pesos en el camino.

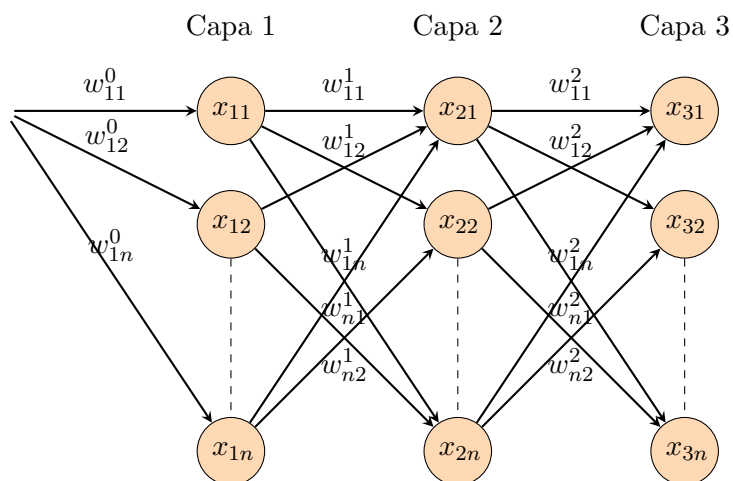


FIGURA 4. Red densa con detalles

Para poder hacer esto se tienen que seguir los siguientes pasos:

- Calcular todas las activaciones de la red, lo que se conoce como propagar hacia adelante las entradas.

- Calcular el error en la capa de salida
- Propagar el error hacia atrás para luego poder actualizar los pesos
- Calcular la parte del error que le corresponde a cada peso
- Actualizar los pesos

Vamos a llamar L a la función de error que se aplica para comparar la salida esperada con la salida ofrecida por la red neuronal. Vamos a calcular como se deberían actualizar los pesos de la red para minimizar el error.

La combinación lineal antes de la activación para la capa k es:

$$s_j^{(k)} = \sum_i w_{ij}^{(k)} z_j^{(k-1)} + b_j^{(k)}$$

ahora la salida de la capa k luego de la activación:

$$z_j^{(k)} = f^{(k)}(s_j^{(k)})$$

como lo que queremos minimizar es el error L en función de los pesos $w_{ij}^{(k)}$ calculamos las derivadas parciales del error respecto a los pesos.

$$\frac{\partial L}{\partial w_{ij}^{(k)}} = \frac{\partial L}{\partial s_i^{(k)}} \frac{\partial s_i^{(k)}}{\partial w_{ij}^{(k)}} = \frac{\partial L}{\partial s_i^{(k)}} z_j$$

si llamamos

$$\frac{\partial L}{\partial s_i^{(k)}} = \delta_i^{(k)}$$

tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial w_{ij}^{(k)}} = \delta_i^{(k)} z_j$$

Esto nos dice que el peso $w_{ij}^{(k)}$ debe actualizarse en la dirección decreciente de la función de forma que:

$$w_{ij}^{(k)} = (w_{ij}^{(k)} - \delta_i^{(k)} z_j) * \epsilon$$

donde ϵ es una constante que se usa para ver cuanto moverse en la dirección hacia el mínimo ya que estamos resolviendo el problema de forma numérica. Lo que ahora queda por hacer es calcular cuanto vale $\delta_i^{(k)} z_j$ en las diferentes capas.

$$\begin{aligned} \delta_i^{(k)} &= \frac{\partial L}{\partial s_i^{(k)}} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial s_j^{(k+1)}} \frac{\partial s_j^{(k+1)}}{\partial s_i^{(k)}} = \sum_j \delta_j^{(k+1)} \frac{\partial s_j^{(k+1)}}{\partial s_i^{(k)}} \\ \delta_i^{(k)} &= \sum_j \delta_j^{(k+1)} \frac{\partial f^{(k)}}{\partial t}(s_i^{(k)}) w_{ij}^{(k+1)} \end{aligned}$$

Como $\delta_i^{(n)}$ es conocido en la capa de salida ahora podemos calcular hacia atrás todas las actualizaciones a los pesos de la red.

4. Teoremas de aproximación

Para resolver el problema de aprendizaje se va a tratar de aprender una función $z = f(x)$ tal que $f \in \mathbb{S}$ un espacio de funciones. El algoritmo de aprendizaje va a dar como resultado una función $g \in \mathbb{U}$ donde queremos que $\mathbb{U} \subset \mathbb{S}$. Cuando decimos que las redes neuronales son un aproximador universal estamos diciendo que el espacio $\mathbb{U}$ es denso en $\mathbb{S}$.

Es posible probar la densidad de las redes neuronales con una única capa oculta en el contexto de funciones $C(I_n)$, $L^1(I_n)$ y $L^2(I_n)$, donde $I_n \subset \mathbb{R}^n$ es el cubo unidad. Para ver más detalles sobre esta parte ver [5].

Definición 4.1. Una función σ es discriminatoria en L^2 si existe una medida $\mu \in L^2(I_n)$ tal que $0 \leq \sigma \leq 1$ y:

$$\int_{I_n} \sigma(Wx + b) d\mu(x) = 0$$

para todo $W \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$

Definición 4.2. Una función se llama sigmoideal si verifica que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sigma(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma(x) = 1$

Lema 4.0.1. Sea U un subespacio lineal de S espacio vectorial normado y sea $s \in S$ tal que $dist(s, U) \geq \delta$ para algún $\delta > 0$, donde $dist$ es una metrica. Entonces existe un funcional lineal $L : S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- $|L| \leq 1$
- $L(u) = 0$ para todo $u \in U$
- $L(s) = \delta$

DEMOSTRACIÓN: Sea $T = \{t : t = u + \lambda s, u \in U, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Sea $L : T \rightarrow \mathbb{R}$ definido como $L(u + \lambda s) = \lambda \delta$.

$L(u_1 + \lambda_1 s + u_2 + \lambda_2 s) = (\lambda_1 + \lambda_2) \delta = L(u_1 + \lambda_1 s) + L(u_2 + \lambda_2 s)$
por lo tanto L es lineal. Además $L(s) = \delta$ y $L(u) = 0$ para todo $u \in U$.

Solo falta ver que $L(t) \leq |t|$.

$$|s + \frac{u}{\lambda}| \geq \delta$$

$$1 \geq \frac{\delta}{|s + \frac{u}{\lambda}|} = \frac{\lambda\delta}{|\lambda s + u|}$$

$$|\lambda s + u| \geq \lambda\delta$$

luego tenemos que:

$$L(u + \lambda s) = \lambda\delta \leq |\lambda s + u|$$

por lo tanto $L(t) \leq |t|$.

Finalmente por el teorema de Hahn-Banach este funcional se puede extender a todo S de forma que siga cumpliendo las propiedades anteriores. $\square$

Esto se traduce a que si U es un subespacio lineal que no es denso, entonces hay un funcional lineal que vale 0 en U pero que no es el funcional lineal nulo en todo el espacio.

Teorema 4.1. *Sea σ una función discriminatoria en L^2 . Entonces las sumas finitas*

$$G(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \sigma(w_j^T x + b_j)$$

donde $w_j \in \mathbb{R}^n$ y $b_j \in \mathbb{R}$ es densa en $L^2(I_n)$.

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probarlo por absurdo. Sea U el subespacio lineal formado por las funciones $G(x)$, por [4.0.1] existe un funcional lineal $L \in L^2(I_n)$ tal que $L \neq 0$ y $L|_U = 0$. Por el teorema de Riez existe $g \in L^2(I_n)$ tal que

$$L(f) = \int_{I_n} f(x)g(x)dx$$

y $|L| = |g|$, además $L|_U = 0$ por lo que

$$\int_{I_n} G(x)g(x)dx = 0$$

para todo $G \in U$; en particular

$$\int_{I_n} \sigma(w^T x + b)g(x)dx = 0$$

como σ es discriminatoria se tiene que $g = 0$ por lo que $|L| = |g| = 0$ entonces U es denso. $\square$

Observación: Se puede probar que algunas funciones de activación como por ejemplo la función de Heavyside así como la función logística son discriminatorias.

También es posible hacer pruebas similares para otros espacios de funciones como algunas de las más tradicionales. Para los detalles ver [5].

Teorema 4.2 (Cybenko 1989). *Sea σ una función sigmoideal continua. Entonces las sumas finitas*

$$G(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \sigma(w_j^T x + b_j)$$

donde $w_j \in \mathbb{R}^n$ y $b_j \in \mathbb{R}$ es densa en $C(I_n)$.

CAPÍTULO 4

Estabilidad

1. Introducción

El objetivo de este capítulo es estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio de las ecuaciones diferenciales no autónomas y en particular, formas de probar cuando un punto de equilibrio es asintóticamente estable, exponencialmente estable o simplemente estable.

La estabilidad de un punto de equilibrio esta relacionada a que soluciones que comienzan suficientemente “cerca” se van a mantener “cerca” para todo tiempo a futuro. La estabilidad asintótica además va a garantizar no solo que las soluciones se van a mantener “cerca” sino que además van a tender a ser indistinguibles en el futuro. En el caso de la estabilidad exponencial las soluciones se van a acercar al punto de equilibrio pero la diferencia con la estabilidad asintótica va a estar dada por la velocidad a la que se van a acercar.

Todos los esfuerzos van a estar centrados en probar el teorema principal sobre estabilidad que enunciamos a continuación.

Teorema 1.1. *Sea $f : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^2$ y $\dot{x} = f(x, t)$, donde $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ y supongamos que 0 es un punto de equilibrio, esto es $f(0, t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Además supongamos que f esta en las condiciones del teorema de Picard y las soluciones existen para todo tiempo futuro. Sea $J(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=0}$, el Jacobiano de f . Si ahora pedimos que:*

- $\operatorname{Re} \lambda_i(J(t)) \leq -\sigma < 0$ para todo $t \geq 0$ donde $\sigma > 0$
- $\|J(t)\| < c$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$
- $\left\| \frac{\partial J(t)}{\partial t} \right\| < b$ para todo $t \in I$.
- $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \frac{\|f(h, t) - J(t)h\|}{\|h\|} = 0$

Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que 0 es asintóticamente estable para $\dot{x}(t) = f(x(t), \epsilon t)$.

Para esto procedemos de la siguiente forma. Vamos a comenzar en la sección de estabilidad dando las definiciones de los diferentes tipos de estabilidad y probando una extensión de los teoremas de Lyapunov para el caso no autónomo.

En la sección sobre ecuaciones diferenciales lineales no autónomas se va a probar un teorema muy importante que nos va a permitir estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio a partir de la estabilidad de la linealización de la ecuación diferencial. Al final de esa sección se va a dar una prueba del teorema principal de este capítulo.

En la última sección se va a probar que sucede con la estabilidad exponencial de los puntos de equilibrio cuando la ecuación diferencial tiene la forma $\dot{x} = f(t, x, u(t))$ y el punto de equilibrio existe para una función $u(t)$ particular pero ahora consideramos $\dot{x} = f(t, x, u(t) + \epsilon(t))$. Esto es de interés porque en la práctica, si la entrada $u(t)$ es algo que se está midiendo a través de sensores, las mediciones pueden contener ruido y no siempre que se presente el mismo escenario se va a obtener la misma forma para $u(t)$. También podría pasar que se estén observando dos cosas muy similares. En ambos casos sería bueno obtener la misma respuesta.

2. Lyapunov

Cuando estudiamos ecuaciones diferenciales autónomas, nos ayudamos con las funciones de Lyapunov y sus teoremas sobre estabilidad. En este contexto, dada una ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x(t))$$

donde $x(t) \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, en las condiciones del teorema de Picard y además asumiendo que las soluciones existen para todo tiempo futuro. (La existencia de las soluciones para todo tiempo futuro al igual que estar en las condiciones de Picard lo vamos a asumir durante todo el capítulo.).

Recordando algunas cosas que vamos a asumir conocidas ya que se suelen ver en cursos de ecuaciones diferenciales. Se puede probar que x_0 es un punto de equilibrio **estable** si es un punto crítico de f y además existe una función de Lyapunov V que cumple:

- $V : W \rightarrow \mathbb{R}$, donde V es una función continua y $W \subset U$ es un entorno abierto de x_0 .
- $V(x_0) = 0$ y $V(x) > 0$ para todo $x \neq x_0$ en W (en realidad es suficiente que x_0 sea un mínimo local estricto de V).
- $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ para todo $x(t)$ solución de la ecuación diferencial en U (la derivada de V a lo largo de las trayectorias es no positiva).

Si somos más estrictos y exigimos que $\dot{V}(x(t)) < 0$ para todo $x(t)$ en W , entonces x_0 será **asintóticamente estable**.

La mayoría de los temas tratados en esta sección están tratados de una forma más profunda en su versión más elemental en [24] y de una forma un poco más avanzada en [20].

El trabajo se va a centrar en estudiar la estabilidad de ecuaciones diferenciales no autónomas de la forma:

$$\dot{x} = f(t, x)$$

donde $x(t) \in U$ y $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo no acotado y $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, en las condiciones del teorema de Picard y asumiendo que las soluciones existen para todo tiempo futuro.

Vamos a ver que existen teoremas similares a los de Lyapunov para ecuaciones diferenciales no autónomas, con la diferencia de que se tiene más cuidado y requerimientos sobre las funciones V .

A los conceptos de estabilidad que se pueden analizar en el caso autónomo se van a sumar los mismos con el término uniforme cuando el tipo de estabilidad no es dependiente del tiempo en el que inicia la evolución de la solución.

En las siguientes definiciones x_0 va a ser el punto de equilibrio de $\dot{x} = f(t, x)$ es decir $f(t, x_0) = 0$ para todo t , $y(t)$ va a ser otra solución de la ecuación diferencial con condición inicial $y(t_0) = y_0$.

Definición 2.1 (Punto de equilibrio estable). Un punto de equilibrio se dice estable si para todo $\epsilon > 0$ y t_0 existe $\delta(t_0, \epsilon) > 0$ de forma que cuando $\|y_0 - x_0\| < \delta(t_0, \epsilon)$ se tiene que $\|y(t) - x_0\| < \epsilon$ para todo $t \geq t_0$ donde $y(t)$ es la solución tal que $y(t_0) = y_0$.

Definición 2.2 (Punto de equilibrio uniformemente estable). Un punto de equilibrio se dice uniformemente estable si para todo $\epsilon > 0$ y t_0 existe $\delta(\epsilon) > 0$ de forma que cuando $\|y_0 - x_0\| < \delta(\epsilon)$ se tiene que $\|y(t) - x_0\| < \epsilon$ para todo $t \geq t_0$ donde $y(t)$ es la solución tal que $y(t_0) = y_0$.

Observación: Notar que la diferencia con la definición anterior es exclusivamente que δ no depende del tiempo inicial.

Definición 2.3 (Punto atractor). Un punto x_0 se dice atractor si para todo t_0 existe $\delta(t_0) > 0$ de forma que cuando $\|y_0 - x_0\| < \delta(t_0)$ se tiene que $\|y(t) - x_0\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ donde $y(t)$ es la solución tal que $y(t_0) = y_0$.

Definición 2.4 (Punto atractor uniforme). Un punto x_0 se dice atractor uniforme si para todo t_0 existe $\delta > 0$ de forma que cuando $\|y - x_0\| < \delta$ se tiene que $\|y(t) - x_0\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ donde $y(t)$ es la solución tal que $y(t_0) = y_0$.

Definición 2.5 (Estabilidad asintótica). Un punto x_0 es asintóticamente estable si es estable y además es un atractor.

Definición 2.6 (Estabilidad exponencial). El punto x_0 es exponencialmente estable si existen constantes $r, a, b > 0$ tales que $\|x(t) - x_0\| < a\|x(t_0) - x_0\|e^{-bt}$ para todo $x \in B(x_0, r)$, $t \geq t_0$ con $x(t_0) = x_0$.

Observación: Notar que la diferencia entre la estabilidad asintótica y la exponencial se da por la velocidad de convergencia al punto de equilibrio. La estabilidad exponencial implica la estabilidad asintótica pero el recíproco no necesariamente es cierto.

¿Qué sucede cuando estudiamos una ecuación diferencial de este tipo comparado a cuando era autónoma?. Primero que nada las funciones V que utilizábamos antes solamente dependían de la variable espacial, pero en este contexto pueden llegar a tener una dependencia temporal.

Observación: Siempre estamos pidiendo que las soluciones existan para todo tiempo futuro ya que las condiciones de estabilidad utilizadas tienen condiciones sobre las soluciones para todo tiempo futuro. Esto tiene sentido ya que al mantenerse como mínimo cerca del punto de equilibrio las soluciones no se escaparían de ningún compacto espacialmente y por el teorema de escape de compactos van a tener que hacerlo por la coordenada temporal.

Sea $V : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde I es un intervalo no acotado de $\mathbb{R}$ y U es un abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene el punto de equilibrio que vamos a estar analizando. Lo primero que podemos ver es que la derivada de Lyapunov o derivada a lo largo de las orbitas tiene un término adicional referente a la derivada temporal de V .

$$\nabla_x V(t, x) \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial t} = \dot{V}(t, x(t))$$

$$\nabla_x V(t, x) f(t, x(t)) + \frac{\partial V}{\partial t} = \dot{V}(t, x(t))$$

Antes de probar los equivalentes a los teoremas de Lyapunov para el caso no autónomo se necesita definir lo que es una función localmente definida positiva, negativa y otras cosas mas en este contexto.

Observación: Con objetivo de no repetir mucho algunas propiedades vamos a llamar funciones de clase K a una función $\phi : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}_+$ continua, estrictamente creciente y que $\phi(0) = 0$, si además permitimos que $a = \infty$ entonces diremos que es una función de clase K_∞ . También vamos a llamar funciones de clase L a una función $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continua, estrictamente decreciente y que $\phi(0) < \infty$ con $\phi(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$.

Se puede ver que la composición de funciones de clase K al igual que sus inversas continúan siendo funciones de clase K .

Con el objetivo de motivar la utilidad de las funciones de clase K y L vamos a ver que las funciones que conocemos como localmente definidas positivas (las del caso autónomo) espacialmente siempre las podemos acotar superior e inferiormente por funciones de clase K . No obstante otra razón para utilizarlas tiene que ver con la posibilidad de encontrar bolas donde la función V fuera de las mismas sea estrictamente mayor que dentro independientemente del tiempo. Estas funciones nos permiten hacer demostraciones similares a las del caso autónomo permitiendo poner cotas a la función V en una bola centrada en el punto de equilibrio.

De aquí en mas siempre vamos a trabajar con el punto de equilibrio siendo 0 ya que cualquier punto de equilibrio se puede llevar a cero efectuando un cambio de variables. Esto va a simplificar muchos de los cálculos que vamos a hacer. Si suponemos que $\dot{x} = f(t, x)$ tiene un punto de equilibrio en x_0 entonces $\dot{y} = f(t, y + x_0)$ tiene un punto de equilibrio en 0. Al mismo tiempo este cambio de variables se puede ver que no tiene ningún efecto sobre los valores de las derivadas de f .

Teorema 2.1. Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y definida positiva ¹, $B_r = B(0, r) \subset D \subset \mathbb{R}^n$ que contiene un entorno de 0. Entonces existen funciones $\phi_1 : [0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ y $\phi_2 : [0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ de clase K tal que $\phi_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \phi_2(\|x\|)$ para todo $x \in B_r$.

DEMOSTRACIÓN: La prueba va a consistir de 3 partes. Vamos a encontrar una función α que va a ser creciente pero no necesariamente estricta. Luego, vamos a probar que es continua y finalmente vamos a encontrar una función que va a ser estrictamente creciente, continua y menor que α

1) Vamos a ver la existencia de una función creciente

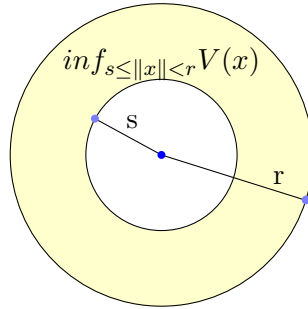
Sea $\alpha(s) = \inf_{s \leq \|x\| < r} V(x)$ y $\beta(s) = \sup_{0 \leq \|x\| < s} V(x)$. Esto lo podemos hacer porque $V(0) = 0$ y además es continua. Vamos a hacer la prueba para α siendo similar la prueba para β

Veamos que α es creciente:

Si $s < k$ entonces $\{x : k \leq \|x\| < r\} \subset \{x : s \leq \|x\| < r\}$ luego $\inf_{s \leq \|x\| < r} V(x) \leq \inf_{k \leq \|x\| < r} V(x)$ y por lo tanto α es creciente aunque no necesariamente de forma estricta.

2) Ahora veamos que α es continua:

Esto resulta simplemente porque V es continua y el ínfimo de una función continua es continuo.



3) Ahora hay que construir ϕ_1 para que sea estrictamente creciente.

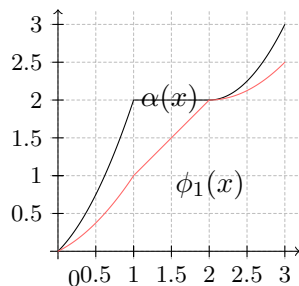
α tiene que ser estrictamente positiva en un entorno de O , porque $V > 0$ cuando $s \neq 0$ y además V es continua.

¹Aquí definida positiva se debe interpretar como en los cursos de ecuaciones diferenciales donde $V(X) > 0$ para todo $x \neq 0$ y $V(0) = 0$

Ahora definimos ϕ_1 recursivamente: por lo anterior sabemos que existe $a > 0$ tal que α es creciente estricta en $[0, a)$. En este intervalo definimos en $[0, a]$:

$$\phi_1(s) = \frac{\alpha(s)}{2}.$$

De aquí inmediatamente tenemos que $\phi_1(s) < \alpha(s)$ en $[0, a]$.



Ahora supongamos que ϕ_1 está definida en $[0, b)$. Tenemos dos casos.

1) Si α es constante en $[b, c)$ y llamamos $l = \lim_{x \rightarrow b^-} \phi_1(x)$ y $k = \lim_{x \rightarrow c^-} \alpha(x)$ se define:

$$\phi_1(x) = l + \frac{k-l}{c-b}(x-b),$$

de donde $\phi_1(x) \leq \alpha(x)$ en $[b, c)$.

2) Si α es estrictamente creciente en $[b, c)$, se define:

$$\phi_1(x) = l + \frac{k-l}{2(c-b)}(x-b),$$

y nuevamente se tiene que $\phi_1(x) \leq \alpha(x)$ en $[b, c)$.

Luego:

$$\phi_1(\|x\|) \leq \alpha(\|x\|) \leq V(x).$$

Procediendo de la misma forma para β se prueba que existe ϕ_2 donde $\phi_1(\|x\|) \leq \alpha(\|x\|) \leq V(x) \leq \beta(\|x\|) \leq \phi_2(\|x\|)$

□

Observación: Es claro que recíprocamente si una función $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ continua con $B_r = B(0, r) \subset D \subset \mathbb{R}^n$ donde $V(0) = 0$ es tal que existen funciones $\phi_1 : [0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ y $\phi_2 : [0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ de clase K tal que $\phi_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \phi_2(\|x\|)$ para todo $x \in B_r$ entonces necesariamente V es definida positiva en $B(0, r)$.

Dada la observación anterior ahora se pueden definir las funciones definidas positivas y definidas negativas en el contexto no autónomo. En las definiciones que siguen I va a ser un intervalo no acotado superiormente y D va a ser un conjunto conexo y acotado en $\mathbb{R}^n$. Además estas funciones van a ser definidas respecto a 0 (lo que quiere decir que $V(0) = 0$) ya que como dijimos antes vamos a trabajar siempre con 0 como punto de equilibrio. En el caso realmente general deberíamos considerarlas respecto a un punto x_0 genérico respecto al que queremos estudiar las propiedades de estabilidad.

Un detalle importante a tener en cuenta es que en las definiciones que siguen sobre funciones definidas positivas vamos a ver que solamente se pide una cota inferior por funciones de clase K. En el teorema anterior fue posible encontrar una cota tanto superior como inferior por el hecho de que el tipo de estabilidad es independiente del tiempo. Esto quiere decir que en los teoremas siempre vamos a pedir adicionalmente la cota superior cuando estemos tratando de probar la estabilidad en el sentido uniforme y solamente la cota inferior cuando el tipo de estabilidad no sea uniforme.

Esta parte esta presentada con más detalles en [24]. En [20] la presentación es más breve y se omiten algunos detalles.

Definición 2.7. Función localmente definida positiva

Vamos a decir que una función $V : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde $D \subset \mathbb{R}^n$ es localmente definida positiva si:

- V es continua
- $V(t, 0) = 0$ para todo $t \in I$.
- Existe $\epsilon > 0$ y $\alpha : [0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}_+$ de clase K tal que $\alpha(\|x\|) \leq V(t, x)$ para todo $t \geq 0$ y para todo $x \in B_\epsilon$.

Observación: Si bien no se ha puesto de forma explícita el dominio de la función α la misma tiene que estar definida al menos en algún conjunto que incluya a $[0, \epsilon)$. También hay que tener presente que no son funciones cuyo dominio es $\mathbb{R}^n$ sino que son funciones cuyo dominio esta en $\mathbb{R}$.

Definición 2.8. Función localmente definida negativa

Vamos a decir que una función $V : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde $D \subset \mathbb{R}^n$ es localmente definida negativa si $-V$ es localmente definida positiva.

Definición 2.9. Función decreciente

Vamos a decir que una función $V : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde $D \subset \mathbb{R}^n$ es decreciente si existe $r > 0$ y una función $\beta : B(0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ de clase K tal que para todo $t \in I$ se tiene que $V(t, x) \leq \beta(\|x\|)$ para todo $x \in B(0, r)$.

Observación: Vamos a decir que la función es definida positiva o definida negativa cuando $B_r = \mathbb{R}^n$.

Observación: Es claro que una función $V : I \times D \rightarrow \mathbb{R}$ es localmente definida positiva si localmente se tiene que existe una función $W : D \rightarrow \mathbb{R}$ localmente definida positiva en el sentido autónomo donde $W(x) < V(t, x)$ en un entorno de 0 para cualquier tiempo. Esto queda claro por el teorema 2.1 ya se tiene $\phi_1(\|x\|) \leq W(x) \leq V(t, x)$ donde ϕ_1 es una función de clase K.

Para analizar la estabilidad de una ecuación diferencial no autónoma, vamos a utilizar la misma técnica que se usa para las autónomas. Es decir vamos a ver el comportamiento

de la derivada de V a lo largo de las trayectorias de las soluciones. Si suponemos que $x(t)$ es una solución en particular vamos a tener:

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \nabla_x V(t, x) \frac{\partial x}{\partial t}(t)$$

Esto es la derivada de Lyapunov de V . En el caso autónomo se tenía:

$$\dot{V}(x) = \nabla_x V(x) \frac{\partial x}{\partial t}(t)$$

Ahora ya tenemos todas las herramientas necesarias para poder probar los equivalentes de los teoremas de Lyapunov en el caso no autónomo. Como mencionamos anteriormente, estos nos van a permitir estudiar el tipo de estabilidad de un punto de equilibrio, siempre que podamos encontrar funciones de Lyapunov apropiadas.

A partir de ahora vamos a considerar $\dot{x} = f(t, x)$ en las condiciones del teorema de Picard y de forma que las soluciones existen para todo tiempo futuro. Esto último es que el intervalo I tiene la forma $I = [a, \infty)$ para algún a o $I = \mathbb{R}$.

Con las definiciones establecidas y las herramientas técnicas necesarias introducidas, estamos en condiciones de enunciar los teoremas fundamentales que caracterizan la estabilidad mediante funciones de Lyapunov. Estos teoremas extienden los resultados clásicos del caso autónomo al contexto no autónomo, estableciendo condiciones suficientes para cada tipo de estabilidad.

Teorema 2.2. *El punto de equilibrio 0 es estable si existe una función $V \in C^1$ localmente definida positiva y una constante $r > 0$ tal que $\dot{V}(t, x) \leq 0$ para todo $x \in B(0, r)$ donde $\dot{V}(t, x)$ es la derivada de Lyapunov.*

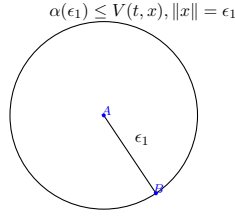
DEMOSTRACIÓN: Como V es localmente definida positiva, existe $s > 0$ y $\alpha : [0, s) \rightarrow \mathbb{R}$ de clase K tal que $\alpha(\|x\|) \leq V(t, x)$ para todo $t \geq t_0$ y todo $x \in B(0, s)$.

Queremos probar que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon, t_0)$ tal que si $\|x(t_0)\| < \delta$ entonces $\|x(t)\| < \epsilon$ para todo $t \geq t_0$.

Vamos a elegir $\epsilon_1 = \min\{\epsilon, r, s\}$, de esta forma vamos a mantener las soluciones a una distancia menor que ϵ y vamos a asegurar las condiciones que nos interesan sobre V y sobre α .

Vamos a elegir δ de forma que $\sup_{\|x\| \leq \delta} V(t_0, x) < \alpha(\epsilon_1)$. Esto es posible porque $V(0) = 0$ y además es continua.

Ahora si $\|x(t_0)\| < \delta$ se tiene que $V(t_0, x(t_0)) < \alpha(\epsilon_1)$ y al ser $\dot{V} \leq 0$ sobre las orbitas de las soluciones se tiene que $V(t, x(t)) \leq V(t_0, x(t_0)) < \alpha(\epsilon_1)$ para todo $t \geq t_0$ y todo $x(t_0) \in B(0, \delta)$.



Un detalle técnico respecto a la prueba, es que esta sumiendo que la solución nunca sale de $B(0, \epsilon_1)$. Para que la prueba sea bien formal supongamos que existe t_1 el menor t tal que $x(t_1) \geq \epsilon_1$, entonces $V(t_1, x(t_1)) \geq \alpha(\epsilon_1) > V(t_0, x_0)$.

Pero por hipótesis $\dot{V} \leq 0$ en $B(0, \epsilon_1)$ entonces se tiene que

$$V(t_1, x(t_1)) \leq V(t_0, x_0) < \alpha(\epsilon_1) \leq V(t_1, x(t_1))$$

lo que es absurdo, por lo tanto $x(t)$ nunca sale de $B(0, \epsilon_1)$. $\square$

Teorema 2.3. *El punto de equilibrio 0 es uniformemente estable si existe una función $V \in C^1$ localmente definida positiva y decreciente tal que $\dot{V} \leq 0$.*

DEMOSTRACIÓN: La prueba sigue las mismas líneas que el teorema anterior solo que ahora podemos elegir δ de forma independiente del instante inicial t_0 . Esto se debe a que al ser V decreciente va a estar acotada superiormente por una función de clase K que solo depende de la variable espacial.

Por ser decreciente y localmente definida positiva nuevamente tomando $\epsilon_1 = \min\{\epsilon, r, s\}$ tenemos

$$\alpha(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \beta(\|x\|)$$

Si elegimos δ de forma que $\beta(\delta) < \alpha(\epsilon_1)$. Luego el resto de la prueba sigue como en el teorema anterior. Tal δ va a existir porque ambas funciones son estrictamente crecientes y valen 0 en 0. $\square$

Teorema 2.4. *El punto de equilibrio 0 es uniformemente asintóticamente estable si existe una función $V \in C^1$ localmente definida positiva, decreciente y una constante $r > 0$ tal que $\dot{V}$ es localmente definida negativa.*

DEMOSTRACIÓN: Bajo estas hipótesis ya sabemos que 0 es uniformemente estable. Por lo tanto hay que probar que 0 es un atractor uniforme, es decir existe $\delta_1 > 0$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $T(\epsilon) < \infty$ donde si $\|x_0\| < \delta_1$ entonces $\|x(t)\| < \epsilon$ para todo $t \geq T + t_0$.

Por hipótesis sabemos que existe $r > 0$, $\alpha, \beta, \gamma : [0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ de clase K tal que si $\|x\| < r$ entonces:

- $\alpha(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \beta(\|x\|)$ para todo $t \geq t_0$
- $\dot{V}(t, x) \leq -\gamma(\|x\|)$

Vamos a elegir $\delta_1 < \beta^{-1}(\alpha(r))$, en particular $\delta_1 < r$ ya que $\alpha(\delta_1) \leq \beta(\delta_1) = \alpha(r)$ y al ser α estrictamente creciente se tiene que $\delta_1 < r$.

En particular esto implica que si $\|x\| < \delta_1 < r$ y por ser $\dot{V}$ localmente definida negativa se tiene que las soluciones se mantienen dentro de $B(0, r)$ y por lo tanto las condiciones de ser $\dot{V}$ definida negativa al igual que V definida positiva se cumplen a lo largo de las trayectorias.

Ahora elegimos $\delta_2 < \min\{\beta^{-1}(\alpha(\epsilon)), \delta_1\}$, esto nos garantiza razonando como antes que $\delta_2 < \epsilon$.

Finalmente vamos a elegir $T = \frac{\beta(\delta_1)}{\gamma(\delta_2)}$.

Vamos a ver que si $\|x_0\| < \delta_1$ entonces $\|x(t_1)\| < \delta_2$ para algún $t_1 \in [t_0, t_0 + T]$.

Supongamos que esto no es así, entonces:

$$0 < \alpha(\delta_2) \leq V(t, x(t)) = V(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t_0+T} \dot{V}(\tau, x(\tau)) d\tau$$

Pero tenemos que:

$$\dot{V}(\tau, s(\tau, t_0, x_0)) < -\gamma(\|x(\tau)\|) \leq -\gamma(\delta_2)$$

$$V(t_0, x_0) < \beta(\delta_1)$$

entonces:

$$0 < \beta(\delta_1) - \int_{t_0}^{t_0+T} \gamma(\delta_2) d\tau = \beta(\delta_1) - T\gamma(\delta_2)$$

por lo tanto $T < \frac{\beta(\delta_1)}{\gamma(\delta_2)}$ en contra de la elección inicial de T por lo que existe $t_1 \in [t_0, t_0 + T]$ tal que $\|s(t_1, t_0, x_0)\| < \delta_1$. Como antes al ser $\dot{V}$ localmente definida negativa se tiene que una vez que $\|x(t_1)\| < \delta_2$ no se puede alejar mas de $\delta_2 < \epsilon$ y por lo tanto acabamos de probar que 0 es un atractor uniforme. □

La última prueba que vamos a dar hace referencia a la estabilidad asintótica cuando la velocidad de convergencia al punto de equilibrio es exponencial. Esto es muy útil en aplicaciones empíricas porque se pueden ver los efectos asintóticos en un número muy pequeño de iteraciones.

Para poder realizar la última prueba se necesita un lema conocido como lema de comparación. Este lema va a ser muy útil para acotar soluciones en función de las condiciones iniciales. Para esto definimos

$$D^+v(t) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}$$

Teorema 2.5. Sea $\dot{x} = f(t, x)$ en las condiciones del teorema de Picard, con $x(t)$ la solución tal que $x(t_0) = x_0$, definida en el intervalo J . Si $v : J \rightarrow \mathbb{R}$ es otra función que cumple:

- $v(t_0) \leq x_0$
- $D^+v(t) \leq f(t, v(t))$ para todo $t \in J$

Entonces, $v(t) \leq x(t)$ para todo $t \in J$.

DEMOSTRACIÓN:

Consideremos la función auxiliar $\dot{z}(t, \lambda) = f(t, z) + \lambda$, con $z(t_0, \lambda) = x_0$ y $\lambda > 0$. Por el teorema de Picard, la solución $z(t, \lambda)$ existe en algún compacto $[t_0, t_1] \subset J$ y por continuidad respecto al parámetro λ existe $\delta > 0$ tal que si $h < \delta$, entonces $z(t, h)$ es la única solución de $\dot{z}(t, h) = f(t, z) + h$ definida en $[t_0, t_1]$ y que además cumple:

$$|z(t, h) - x(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Esto es porque:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ \dot{z} = f(t, z) + \lambda \end{cases} \quad x(t_0) = z(t_0) = x_0$$

Por continuidad de x y z , como $x(t_0) = z(t_0) = x_0$, existe $t_1 > t_0$ tal que si $t_0 \leq t \leq t_1$:

$$\|x(t) - x_0\| < \frac{\varepsilon}{4L}, \quad \|z(t) - x_0\| < \frac{\varepsilon}{4L}$$

$$\Rightarrow \|x(t) - z(t)\| \leq \|x(t) - x_0\| + \|z(t) - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2L}.$$

$$\begin{aligned} \|x(t) - z(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t \dot{x}(s) - \dot{z}(s) ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - f(s, z(s)) - \lambda) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, z(s))\| ds + \int_{t_0}^t \lambda ds \\ &\leq \lambda(t - t_0) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\lambda(t_1 - t_0) < \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2L}\right) \quad \Rightarrow \quad \lambda < \frac{\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2L}\right)}{t_1 - t_0}.$$

Paso 1: $v(t) \leq z(t, \lambda) \quad \forall t \in [t_0, t_1]$

Supongamos, por contradicción, que existe $a \in [t_0, t_1]$ tal que $v(a) = z(a, \lambda)$ y $v(t) > z(t, \lambda)$ para $t \in (a, b] \subset [t_0, t_1]$. Entonces:

$$v(t) - v(a) > z(t, \lambda) - z(a, \lambda) \quad \forall t \in (a, b]$$

Lo que implica:

$$D^+v(a) \geq \dot{z}(a, \lambda) = f(a, z(a, \lambda)) + \lambda > f(a, v(a))$$

Esto contradice la hipótesis (2), por lo que debemos tener $v(t) \leq z(t, \lambda)$ para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Paso 2: $v(t) \leq x(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1]$

Si no fuera cierto, existiría $a \in [t_0, t_1]$ tal que $v(a) > x(a)$. Sea $\varepsilon = \frac{v(a) - x(a)}{2}$. Por la propiedad de $z(t, \lambda)$, podemos elegir λ suficientemente pequeño para que:

$$v(a) - z(a, \lambda) = v(a) - x(a) + x(a) - z(a, \lambda) > \varepsilon$$

Esto contradice el resultado del Paso 1. Por lo tanto, $v(t) \leq x(t)$ para todo $t \in [t_0, t_1]$. Como $[t_0, t_1]$ es un compacto arbitrario dentro de J , la desigualdad se cumple en todo J . □

Teorema 2.6. Sea $\dot{x} = f(t, x)$, donde $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde $D \subset \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 y $0 \in D$. Sea $V : I \times D \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 y tal que

$$k_1 \|x\|^\alpha \leq V(t, x) \leq k_2 \|x\|^\alpha$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \nabla_x V \cdot f(t, x) \leq -k_3 \|x\|^\alpha$$

con $k_1, k_2, k_3, \alpha > 0$, entonces 0 es uniformemente exponencialmente estable.

DEMOSTRACIÓN:

1. **Estabilidad:** Las soluciones son uniformemente asintóticamente estables ya que estamos en las condiciones de estabilidad asintótica uniforme.

2. **Velocidad:** Por un lado tenemos que $k_1 \|x\|^\alpha \leq V(t, x) \leq k_2 \|x\|^\alpha$ de donde $\|x\|^\alpha \leq \frac{V(t, x)}{k_1}$. Luego $\dot{V} \leq -k_3 \|x\|^\alpha \leq -\frac{k_3}{k_1} V$.

Aplicando el lema de comparación:

$$\begin{aligned} V(t, x) &\leq V(t_0, x_0) e^{-\frac{k_3}{k_1}(t-t_0)} \\ \implies \|x(t)\|^\alpha &\leq \frac{V(t, x)}{k_1} \leq \frac{V(t_0, x_0)}{k_1} e^{-\frac{k_3}{k_1}(t-t_0)} \\ V(t, x) &\leq k_2 \|x(t)\|^\alpha \\ \implies \|x(t)\|^\alpha &\leq \frac{k_2}{k_1} \|x(t_0)\|^\alpha e^{-\frac{k_3}{k_1}(t-t_0)} \end{aligned}$$

$$\implies \|x(t)\| \leq \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \|x(t_0)\| e^{-\frac{k_3}{\alpha k_1}(t-t_0)}$$

por lo tanto 0 es uniformemente exponencialmente estable. $\square$

3. Ecuaciones diferenciales lineales no autónomas

Los teoremas anteriores son los mas fundamentales pero en general es difícil encontrar una función de Lyapunov para poder probar cualquier tipo de estabilidad. El objetivo de esta sección, es dar herramientas, para analizar la estabilidad de puntos de equilibrio de una ecuación diferencial no autónoma de forma local, mediante linealización. Esto es útil ya que es mucho mas simple analizar el problema lineal que el problema no lineal.

En la prueba de dicho teorema vamos a hacer uso de un tipo particular de funciones de Lyapunov, utilizando matrices definidas positivas cosa que sirve tanto para el caso autónomo como para el no autónomo. Vamos a probar que la existencia de estas funciones es una condición necesaria y suficiente para que 0 sea un punto de equilibrio estable.

Llamamos matriz definida positiva a toda matriz que cumpla $x^T A x \geq 0$ para todo $x \neq 0$.

Antes de pasar a los teoremas principales de esta sección necesitamos un teorema técnico que nos va a permitir intercambiar la derivada y la integral en el caso impropio. Las ideas de este teorema están sacadas de [10].

Definición 3.1. Decimos que la integral $\int_0^\infty f(x, y) dy$ es uniformemente convergente si $\forall \varepsilon > 0 \exists A(\varepsilon)$ tal que $|\int_{A(\varepsilon)}^\infty f(x, y) dy| < \varepsilon$ para todo $x \in I$.

Teorema 3.1. Sea $\int_0^\infty f(x, y) dy$ uniformemente convergente para todo $x \in I$ y f continua $\implies \forall a, b \in I$ se tiene que

$$\int_a^b \int_0^\infty f(x, y) dy dx = \int_0^\infty \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

DEMOSTRACIÓN:

$$\int_0^\infty f(x, y) dy = \int_0^{A(\frac{\varepsilon}{b-a})} f(x, y) dy + R(\varepsilon)$$

donde $|R(\varepsilon)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ debido a la convergencia uniforme de la integral.

Por ser f continua y acotada $\implies \int_0^{A(\frac{\varepsilon}{b-a})} f(x, y) dy$ es integrable en $[a, b]$ respecto a x , luego:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[\int_0^{A(\frac{\varepsilon}{b-a})} f(x, y) dy + R(\varepsilon) \right] dx \\ &= \int_a^b \int_0^{A(\frac{\varepsilon}{b-a})} f(x, y) dy dx + \int_a^b R(\varepsilon) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \int_0^{A(\frac{\varepsilon}{b-a})} f(x, y) dy dx + (b-a) \frac{\varepsilon}{b-a} \\
&= \int_0^{A(\frac{\varepsilon}{b-a})} \int_a^b f(x, y) dx dy + \varepsilon
\end{aligned}$$

dado que $A\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right) \rightarrow \infty$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ tenemos que

$$\int_a^b \int_0^\infty f(x, y) dy dx = \int_0^\infty \int_a^b f(x, y) dx dy$$

□

Teorema 3.2. Sean $F(x) = \int_0^\infty f(x, y) dy$ y $\int_0^\infty f_x(x, y) dy$ son uniformemente convergentes para cualquier $x \in I$, donde I es un intervalo acotado. Además f y f_x son continuas. Entonces $\frac{\partial F}{\partial x}(x) = \int_0^\infty f_x(x, y) dy$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $G(x) = \int_a^\infty f_x(x, y) dy$.

$$\int_a^x G(x) dx = \int_a^x \int_0^\infty f_x(x, y) dy dx = \int_0^\infty \int_a^x f_x(x, y) dx dy$$

el cambio de orden de integración debido a la convergencia uniforme.

$$\Rightarrow \int_a^x G(x) dx = \int_0^\infty [f(x, y) - f(a, y)] dy = F(x) - F(a)$$

luego por el teorema fundamental del calculo

$$F'(x) = G(x)$$

de donde se concluye que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x) = \int_0^\infty f_x(x, y) dy$$

□

Probablemente el tipo más simple de función de Lyapunov que uno puede imaginar sería una de la forma $V(t, x) = x^T P(t)x$, donde P sea una matriz definida positiva y simétrica para todo t . Esto motiva a iniciar la búsqueda de funciones de este tipo para probar la estabilidad en el caso de ecuaciones diferenciales lineales no autónomas.

Para motivar el siguiente teorema vamos a comenzar a analizar que pasa en el caso autónomo, lo que va a dar un poco de claridad para el caso no autónomo cuando consideramos funciones de Lyapunov con esta forma.

Supongamos que queremos analizar la estabilidad de $\dot{x} = Ax$. Pensando en el método de Lyapunov y siendo $0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ queremos encontrar una función $V : D \rightarrow \mathbb{R}$, definida positiva con derivada de Lyapunov definida negativa.

En particular si $V(x) = x^T P x$ donde P es una matriz simétrica, definida positiva, esta función V es definida positiva.

$$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T (PA + A^T P)x = -x^T Q x$$

Si $PA + A^T P = -Q$ es una matriz simétrica definida negativa, $\dot{V}$ va a ser definida negativa. Si esta es una función de Lyapunov que cumple estas condiciones sobre las soluciones entonces 0 es asintóticamente estable.

En el caso no autónomo, vamos a tener $\dot{x} = A(t)x$ y si ahora consideramos una función $V(t, x) = x^T P(t)x$ y calculamos $\dot{V}$ obtenemos:

$$\dot{V}(t, x) = \dot{x}^T P(t)x + x^T \dot{P}(t)x + x^T P(t)\dot{x}$$

$$\dot{V}(t, x) = x^T (A(t)^T P(t) + \dot{P}(t) + P(t)A(t))x = -x^T Q(t)x$$

es decir que en el caso no autónomo vamos a pedir que

$$-\dot{P}(t) = Q(t) + P(t)A(t) + A(t)^T P(t)$$

Si Q es definida positiva, nuevamente se tiene que V es definida positiva y $\dot{V}$ es definida negativa. Esto prueba que la existencia de una función de Lyapunov lo que es suficiente para probar la estabilidad asintótica. Ahora veamos que esto también garantiza la estabilidad exponencialmente asintótica.

Si ahora pedimos que tanto P como Q sean definidas positivas y uniformemente acotadas.

$$\|P(t)\| = \max_{\|x\|=1} \|P(t)x\| \leq M \quad \forall t$$

Luego

$$\|x^T P(t)x\| \leq \|x\| \|P(t)\| \|x\| = M\|x\|^2$$

De la misma forma

$$x^T P(t)x > 0 \text{ si } x \neq 0$$

$$\inf_{\|x\|=1} \|x^T P(t)x\| \geq K \quad \forall t \geq t_0.$$

$$\|x^T P(t)x\| \geq K\|x\|^2$$

$$K\|x\|^2 \leq x^T P(t)x \leq M\|x\|^2$$

análogamente se puede ver que

$$-x^T Q(t)x \leq -K_2\|x\|^2$$

Y debido al teorema 2.6 esto implica la asintotia exponencial.

El siguiente teorema enuncia la necesidad y suficiencia de la existencia de funciones de esta forma particular.

Teorema 3.3. Sea $\dot{x} = A(t)x$ donde $A(t)$ es continua, acotada y $A(t) \in M_{n \times n}$ para cada t . El origen 0 es exponencialmente estable si y solo si para toda $Q(t)$ que sea continua, uniformemente acotada, simétrica y definida positiva para cada t existe una matriz $P(t) \in C^1$ uniformemente acotada, simétrica y definida positiva tal que:

$$-\dot{P}(t) = A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + Q(t)$$

en particular $V(t, x) = x^T P(t)x$ es una función de Lyapunov para $\dot{x} = A(t)x$.

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar la existencia de estas funciones siendo que $\dot{x} = A(t)x$ es exponencialmente estable. La otra dirección se probó en la discusión anterior.

Sea $P(t) = \int_t^\infty \phi^T(\tau, t)Q(\tau)\phi(\tau, t)d\tau$ donde toda solución $x(t)$ se puede escribir como $x(t) = \phi(t, t_0)x(t_0)$ donde $x(t_0)$ es el valor inicial y vamos a llamar $\phi(t, t_0, x(t_0)) = \phi(t, t_0)x(t_0)$

1 - $P(t)$ esta bien definida

Primero veamos que $P(t)$ esté bien definida, es decir la integral converge $\forall t \in \mathbb{R}, t \geq t_0$

Como 0 es exponencialmente estable

$$\|\Phi(\tau, t)x_0\| \leq be^{-\alpha(\tau-t)}\|x_0\|$$

$$\|\Phi(\tau, t)\| \leq be^{-\alpha(\tau-t)}$$

Como $\|Q(t)\| \leq c_4$ por ser uniformemente acotada

$$\|P(t)\| \leq \int_t^\infty \|\Phi^T(\tau, t)\| \|Q(\tau)\| \|\Phi(\tau, t)\| d\tau \leq \int_t^\infty c_4 b^2 e^{-2\alpha(\tau-t)} d\tau = \frac{c_4 b^2}{2\alpha}$$

2 - P es acotada

Ahora veamos que la forma de V nos esta en las condiciones para la estabilidad exponencial.

$$x^T P(t)x = \int_t^\infty (\phi(\tau, t)x)^T Q(\tau)\phi(\tau, t)x d\tau$$

$$x^T P(t)x \leq \int_t^\infty c_4 \|\phi(\tau, t)\|^2 \|x\|^2 d\tau$$

$$x^T P(t)x \leq \int_t^\infty c_4 b^2 e^{-2\alpha(\tau-t)} \|x\|^2 d\tau$$

$$= \frac{b^2 c_4}{2\alpha} \|x\|^2 = c_2 \|x\|^2$$

donde $c_2 = \frac{b^2 c_4}{2\alpha}$.

3 - V es definida positiva

Ahora buscamos la cota por debajo, para esto necesitamos ver una cota para las soluciones. Para eso veamos que como $\|A(t)\| \leq L$ para todo $t \geq 0$ y como $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$

$$\frac{d}{dt}[x(t)^T x(t)] = 2x^T(t)\dot{x}(t) = 2x^T(t)A(t)x(t) \leq 2\|x(t)\|^2 \|A(t)\|$$

$$\frac{d}{dt}[x^T(t)x(t)] \leq 2\|A(t)\|\|x(t)\|^2$$

$$-2L\|x(t)\|^2 \leq \frac{d}{dt}[x^T(t)x(t)] \leq 2L\|x(t)\|^2$$

$$-2L \leq \frac{\dot{\|x(t)\|}}{\|x(t)\|} \leq 2L$$

$$-\|x\|e^{-2L(\tau-t)} \leq \|x(t)\| \leq \|x\|e^{2L(\tau-t)}$$

por lo que $\|\phi(\tau, t, x)\|_2^2 \geq \|x\|^2 e^{-2L(\tau-t)}$ entonces

$$x^T P(t)x \geq \int_t^\infty c_3 \|\phi(\tau, t, x)\|_2^2 d\tau \geq \int_t^\infty \|x\|_2^2 e^{-2L(\tau-t)} d\tau$$

$$x^T P(t)x \geq \frac{c_3}{2L} \|x\|_2^2 = c_1 \|x\|_2^2$$

donde $c_1 = \frac{c_3}{2L}$. De aquí tenemos que

$$c_1 \|x\|_2^2 \leq x^T P(t)x \leq c_2 \|x\|_2^2$$

por lo tanto se ve que $P(t)$ es definida positiva y acotada.

Que $P(t)$ es C^1 se puede ver porque esta definida como la integral de un producto de funciones continuas. Es uniformemente acotada porque las cotas que se acaban de calcular son independientes de t .

Que $P(t)$ es simétrica se puede ver directamente de la definición ya que Q es simétrica.

4 - Q cumple $-\dot{P}(t) = A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + Q(t)$

Para esto vamos a utilizar la identidad:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\tau, t) = -\phi(\tau, t)A(t)$$

La misma la podemos deducir debido a que $\phi(\tau, t)\phi(t, \tau) = id$ y si consideramos $\phi(\tau, t)\phi(t, \tau)x = x$ donde x esta fijo entonces esa expresión es constante, luego

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}[\phi(\tau, t)\phi(t, \tau)x] = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\tau, t)\phi(t, \tau)x + \phi(\tau, t)\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, \tau)x = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\tau, t)\phi(t, \tau)x + \phi(\tau, t)A(t)\phi(t, \tau)x$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\tau, t)\phi(t, \tau) = -\phi(\tau, t)A(t)\phi(t, \tau)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\tau, t) = -\phi(\tau, t)A(t)$$

Como la integral es uniformemente acotada, integrable respecto a τ para cualquier t , el integrando es derivable respecto a t y este es integrable respecto a τ , podemos aplicar la regla de Leibniz y derivar bajo el signo integral.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \int_t^\infty \phi^T(\tau, t)Q(\tau)\frac{\partial \phi}{\partial t}(\tau, t)d\tau + \int_t^\infty \left[\frac{\partial \phi^T}{\partial t}(\tau, t) \right] Q(\tau)\phi(\tau, t)d\tau - Q(t)$$

Utilizando la expresión calculada antes para calcular remplazar dentro de la integral

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \int_t^\infty \phi^T(\tau, t)Q(\tau)\phi(\tau, t)d\tau A(t) - A^T(t) \int_t^\infty \phi^T(\tau, t)Q(\tau)\phi(\tau, t)d\tau - Q(t)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) - Q(t)$$

hay que ver entonces que $\dot{V}(t, x)$ es localmente definida negativa. Para esto vemos que

$$\dot{V}(t, x) = \dot{x}^T P(t)x + x^T \dot{P}(t)x + x^T P(t)\dot{x}$$

$$\dot{V}(t, x) = \dot{x}^T P(t)x + x^T (-P(t)A(t) - A^T(t)P(t) - Q(t))(t)x + x^T P(t)\dot{x}$$

$$\dot{V}(t, x) = -x^T Q(t)x$$

y como Q es simétrica y definida positiva se tiene que $\dot{V}$ es localmente definida negativa.

□

Ahora podemos pasar a probar el teorema principal de esta sección. El mismo nos permite analizar localmente la estabilidad de una ecuación diferencial no autónoma observando la estabilidad de su linealización.

Teorema 3.4. *Sea $\dot{x} = f(t, x(t))$ una ecuación diferencial no autónoma tal que 0 es un punto de equilibrio $f(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$. (ver [24])*

- Sea $J(t) = \frac{\partial f}{\partial x}$ la matriz Jacobiana respecto de x evaluada en el punto de equilibrio.
- $f_1(t, x) = f(t, x) - J(t)x$
- $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \frac{\|f_1(t, x)\|}{\|x\|} = 0$
- $\|J(t)\|$ es acotada para todo t .

Si 0 es exponencialmente estable para $\dot{z} = J(t)z(t)$ entonces es localmente exponencialmente estable para $\dot{x} = f(t, x(t))$.

Observación: La tercera condición quiere decir que la aproximación lineal por $J(t)$ es "buena" independientemente del tiempo.

DEMOSTRACIÓN: Como 0 es de equilibrio para $\dot{z} = J(t)z(t)$ sabemos que la matriz $P(t) = \int_t^\infty \phi^T(\tau, t)\phi(\tau, t)d\tau$ esta bien definida para todo $t \geq 0$ (elegimos $Q = I$) y que existen constantes c_1, c_2 tales que $c_1\|x\|^2 \leq x^T P x \leq c_2\|x\|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $t \geq 0$.

La función $V(t, x) = x^T P(t)x$ es por lo tanto decreciente, definida positiva, C^1 y además:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= \dot{x}^T P(t)x + x^T \dot{P}(t)x + x^T P(t)\dot{x} \\ &= f^T(t, x)P(t)x + x^T \dot{P}(t)x + x^T P(t)f(t, x) \\ &= x^T J^T(t)P(t)x + f_1^T(t, x)P(t)x + x^T \dot{P}(t)x + x^T P(t)f_1(t, x) + x^T P(t)J(t)x \\ &= x^T [\dot{P} + J^T(t)P(t) + P(t)J(t)]x + 2x^T P(t)f_1(t, x) \end{aligned}$$

Como para toda matriz $Q(t)$ simétrica definida positiva y acotada se puede encontrar una matriz $P(t)$ en las condiciones del teorema anterior, en particular podemos elegir $Q = I$ de forma que $\dot{P} + J^T(t)P(t) + P(t)J(t) = -I$ de donde

$$\dot{V}(t, x) = -\|x\|^2 + 2x^T P(t) f_1(t, x)$$

debido a $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \frac{\|f_1(t, x)\|}{\|x\|} = 0$ se puede elegir $r > 0$ y $\rho < 0.5$ tal que $\|f_1(t, x)\| \leq \frac{\rho}{c_2} \|x\|$ para todo $t \geq 0$ y todo $x \in B(0, r)$.

Luego $\|2x^T P(t) f_1(t, x)\| \leq 2\|x^T P(t) x\| \frac{\rho}{c_2} \leq 2\rho \|x\|^2$ para todo $t \geq 0$ y todo $x \in B(0, r)$.

Por lo tanto $\dot{V}(t, x) \leq -(1 - 2\rho)\|x\|^2 < -\|x\|^2$ para todo $t \geq 0$ y todo $x \in B(0, r)$ ya que $1 - 2\rho$ es positivo.

De aquí se ve que $\dot{V}$ es localmente definida negativa y que V es localmente definida positiva para f , por lo tanto 0 es un punto de equilibrio exponencialmente estable. $\square$

4. Teorema principal

Ahora tenemos el teorema de linealización, que nos permite estudiar la estabilidad de un sistema no autónomo localmente estudiando su linealización. Nos está faltando una forma sencilla de analizar la estabilidad del sistema lineal sin necesidad de construir la función de Lyapunov para este sistema. El siguiente teorema nos ayuda a hacer esto imponiendo condiciones sobre la matriz $A(t)$ de la ecuación diferencial lineal.

A partir de ahora vamos a llamar matriz de Hurwitz a toda matriz $A(t)$ cuyos valores propios son estrictamente negativos para todo t . Otra terminología utilizada para estas matrices es matriz de estabilidad.

Cuando se trata con ecuaciones diferenciales lineales autónomas es conocido que, si la parte real de los autovalores de la matriz son negativas, entonces la EDO va a ser asintóticamente estable. Lo que vamos a probar con el siguiente teorema y su corolario es que con algunas condiciones adicionales lo mismo va a ser cierto para las EDO lineales no autónomas. El teorema nos va a ayudar a imponer cotas a una $V(t, x)$ candidata a función de Lyapunov mientras que el corolario va a mostrar que en dichas condiciones siempre es posible encontrar una función de Lyapunov.

Para ver más detalles sobre los teoremas de esta sección o sus consecuencias ver [20]. En particular el siguiente teorema sigue las mismas líneas pero tiene algunas modificaciones.

Teorema 4.1. *Sea $\dot{x} = A(t)x$ una ecuación diferencial donde $A : \Gamma \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ y $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. y $t \in \Gamma$. Si $A \in C^1$ y además:*

- $\|A(t)\| \leq c$ para todo $t \geq 0$.

- $\left\| \frac{\partial A}{\partial t} \right\| \leq b$ para todo t .
- $\operatorname{Re}(\lambda(A(t))) \leq -\sigma < 0$, $\sigma > 0$ para todo $t \in \Gamma$.

Entonces $PA(t) + A^T(t)P = -I$ tiene una única solución para cada t . P es continua como función de t y

$$c_1 \|x\|^2 \leq x^T P(t)x \leq c_2 \|x\|^2$$

además

$$\left\| \frac{\partial P}{\partial t} \right\| \leq c_5$$

donde $c_5 = \frac{bk^4}{2\sigma^2}$ y k es una constante.

DEMOSTRACIÓN: Por ser A de Hurwitz para todo $u \in \Gamma$ fijo se tiene que las soluciones de $\dot{x} = A(u)x$ verifican $\|e^{tA(u)}\| \leq k(A(u))e^{-\beta t}$ donde k es una función de $A(u)$. Vamos a tratar de encontrar una constante k que sirva para todo $u \geq 0$.

Consideremos $S_1 = \{B : \|B\| \leq c \wedge B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})\}$ es un conjunto compacto ya que es cerrado y acotado. Esto debido a la continuidad de la norma.

De la misma forma $S_2 = \{B : \operatorname{Re}(\lambda(B(u))) \leq -\beta \wedge B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})\}$ es compacto ya que los valores propios varían de forma continua. Luego $S = S_1 \cap S_2$ es compacto. La compacidad de S nos permitirá extraer una constante k uniforme para todo $u \geq 0$ mediante un cubrimiento finito.

Ahora consideramos cualquier matriz $A \in S_1 \cap S_2$ y B una matriz cualquiera tal que $\|B\|$ es chica (ya veremos esto mas adelante).

La ecuación diferencial $\dot{x} = (A + B)x = Ax + Bx$, tiene solución $x(t) = e^{t(A+B)}x_0$ con $x(0) = x_0$

Si ahora consideramos $\dot{x} = Ax + Be^{t(A+B)}x_0$, tenemos que $x(t) = e^{t(A+B)}x_0$ sigue siendo una solución con $x(0) = x_0$. Luego:

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}x_0 + e^{tA} \int_0^t e^{-sA} B e^{s(A+B)} x_0 ds$$

con la cota $\|e^{tA}\| \leq K(A)e^{-\beta t}$

$$\|e^{t(A+B)}\| \leq K(A)\|x_0\|e^{-\beta t} + e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} \|B\| \|e^{s(A+B)}\| \|x_0\| ds$$

$$e^{\beta t} \|e^{t(A+B)}\| \leq K(A)\|x_0\| + \int_0^t K(A) e^{\beta s} \|B\| \|e^{t(A+B)}\| \|x_0\| ds$$

Usando la desigualdad de Gronwall

$$e^{\beta t} \|e^{t(A+B)}\| \leq K(A) \|x\| e^{K(A)\|B\|t}$$

$$\Rightarrow \|e^{t(A+B)}\| \leq K(A) \|x\| e^{-(\beta - K(A)\|B\|)t}$$

Ahora si $\beta - K(A)\|B\| > 0$ tenemos que las soluciones de $\dot{x} = (A+B)x$ también son exponencialmente asintóticamente estables y por lo tanto todas lo son en un entorno de A .

Luego por la compacidad de $S_1 \cap S_2$ podemos tomar un cubrimiento abierto finito de este conjunto y obtenemos una cota $\|e^{tA(u)}\| \leq ke^{-\gamma t}$ que sirve independientemente de u .

Al ser $A(u)$ Hurwitz tenemos que para cada u existe P tal que $PA(u) + A^T(u)P = -I$ tiene solución única dada por

$$P(u) = \int_0^\infty [e^{\tau A(u)}]^T e^{\tau A(u)} d\tau$$

$$x^T P(u)x = \int_0^\infty \|e^{\tau A(u)}x\|^2 \leq \int_0^\infty k^2 e^{-2\gamma\tau} \|x\|^2$$

$$x^T P(u)x \leq c_2 \|x\|, c_2 = \frac{k^2}{2\gamma}$$

para la otra parte sea $y(t) = e^{tA(u)}z(t) \implies \dot{y} = A(u)y$ luego

$$-y^T(t)\dot{y}(t) = -y^T(t)A(u)y(t) \leq \|A(u)\|y^T(t)y(t) \leq cy^T(t)y(t)$$

$$x^T P(u)x = \int_0^\infty y^T(t)y(t) \geq \int_0^\infty \frac{-1}{c} y^T(t)\dot{y}(t)$$

$$x^T P(u)x \geq \frac{1}{2c} [-y^T(t)y(t)]|_0^\infty = \frac{1}{2c} \|x\|$$

$$x^T P(u)x \geq \frac{1}{2c} [-y^T(t)y(t)]|_0^\infty = \frac{1}{2c} \|x\|^2$$

$$x^T P(u)x \geq c_1 \|x\|^2, c_1 = \frac{1}{2c}$$

con esto ya sabemos que $V(t, x) = x^T P x$ es localmente definida positiva para cada u .

Ahora vamos a buscar una cota para $\frac{\partial P}{\partial t}$ que nos va a permitir acotar $\dot{V}$.

$$P(u)A(u) + A^T(u)P(u) = -I$$

diferenciando respecto a t , la variable independiente.

$$0 = \frac{\partial P}{\partial t}(t)A(t) + P(t)\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A^T}{\partial t}P(t) + A^T(t)\frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t)A(t) + A^T(t)\frac{\partial P}{\partial t} = -P(t)\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial A^T}{\partial t}P(t)$$

multiplicando ambas partes por $e^{\tau A(t)}$ y su transpuesta

$$[e^{\tau A(t)}]^T [A^T(t)\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t}(t)A(t)]e^{\tau A(t)} = -[e^{\tau A(t)}]^T [P(t)\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial A^T}{\partial t}P(t)]e^{\tau A(t)}$$

podemos ver que

$$[e^{\tau A(t)}]^T [A^T(t)\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t}(t)A(t)]e^{\tau A(t)} = \frac{\partial [e^{\tau A(t)}]^T [\frac{\partial P}{\partial t}] e^{\tau A(t)}}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial [e^{\tau A(t)}]^T [\frac{\partial P}{\partial t}] e^{\tau A(t)}}{\partial \tau} = -[e^{\tau A(t)}]^T [P(t)\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial A^T}{\partial t}P(t)]e^{\tau A(t)}$$

si integramos ambos lados en τ desde 0 hasta ∞ obtenemos

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t) = \int_0^\infty [e^{\tau A(t)}]^T \left(P(t)\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A^T}{\partial t}P(t) \right) e^{\tau A(t)} d\tau$$

luego

$$\left\| \frac{\partial P}{\partial t} \right\| \leq 2k^2 e^{-\gamma t} \frac{k^2}{2\gamma} b = \frac{bk^4}{2\gamma^2}$$

□

Ahora que ya tenemos cotas para la función $V(t, x)$ candidata vamos a probar que siempre es posible encontrar un $\epsilon > 0$ de forma que V sea una función de Lyapunov y dadas las cotas probando que 0 es exponencialmente estable.

Corolario 4.1.1. Sea $\dot{x} = A(t)x$ de forma que considerando A como función de u esta en las condiciones del teorema anterior y supongamos que $\dot{u} < \epsilon$. Si $\epsilon < \frac{1}{c_5}$ entonces 0 es un punto de equilibrio exponencialmente estable para $\dot{x} = A(\epsilon t)x$.

DEMOSTRACIÓN: Definiendo $V(t, x) = x^T P(t)x$ por el teorema anterior $V(t, x)$ es definida positiva.

$$\dot{V}(t, x) = \dot{x}^T P x + x^T \dot{P} x + x^T P \dot{x} = x^T A^T P x + x^T \dot{P} x + x^T P A x$$

$$\dot{V}(t, x) = x^T [P A + A^T P + \dot{P}] = x^T [-I + t P] x$$

$$\dot{V}(t, x) = -\|x\|^2 + x^T P x \leq -\|x\|^2 + \|\dot{P}\| \|x\|^2$$

$$\dot{V}(t, x) \leq \|x\|^2 (\|\dot{P}\| - 1)$$

para ver que $\dot{V} < 0$ tenemos que exigir que $\|\dot{P}\| - 1 < 0$. Pero $\|\dot{P}\| \leq \frac{b k^4}{2 \sigma^2} \leq c_5 \epsilon$. De aquí $\epsilon < \frac{1}{c_5}$. □

En general se puede ver que si $\phi(t)$ es solución de $\dot{x} = A(t)x$, se tiene que $\phi(\epsilon t)$ no es solución de $\dot{y} = A(\epsilon t)y$. Esto es porque:

$$\frac{\partial \phi(\epsilon t)}{\partial t} = \epsilon \dot{\phi}(\epsilon t) = \epsilon A(\epsilon t) \phi(\epsilon t)$$

$$\dot{\phi}(\epsilon t) = A(\epsilon t) \phi(\epsilon t)$$

pero de ser solución ϕ debería aparecer solo como función de t .

Por lo tanto el teorema anterior no habla de que las soluciones sean las mismas sino que se puede obtener una nueva ecuación diferencial donde el punto de equilibrio sea exponencialmente estable al hacer que esta varié suficientemente lento.

Ejemplo 4.1. Veamos un ejemplo concreto con $\dot{x} = A(t)x$ y $\dot{x} = A(\epsilon t)x$ donde las soluciones no son necesariamente las mismas. Para esto consideremos $\dot{x} = tx$ y $\dot{x} = \epsilon tx$ ya que ambas son ecuaciones diferenciales para las que fácilmente se puede encontrar la solución.

Para $\dot{x} = tx$ tenemos solución $x_1(t) = x_0 e^{t^2/2}$ y para $\dot{x} = \epsilon tx$ la solución es $x_2(t) = x_0 e^{\epsilon t^2/2}$.

Calculando $\dot{x}_1 = tx(t) \neq \epsilon tx(t)$ a menos que $\epsilon = 1$.

De la misma forma $\dot{x}_2 = \epsilon tx(t) \neq tx(t)$.

Por lo tanto se puede ver fácilmente que no toda solución de una de estas EDO es solución necesariamente de la otra.

Ahora estamos en condiciones de probar el teorema principal de este capítulo.

Teorema 4.2. Sea $f : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^2$ y $\dot{x} = f(x, t)$, supongamos que 0 es un punto de equilibrio, esto es $f(0, t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Además supongamos que f esta en las condiciones del teorema de Picard y las soluciones existen para todo tiempo futuro.

- $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $J(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=0}$
- $\text{Re} \lambda_i(J(t)) \leq -\sigma < 0$ para todo $t \geq 0$ donde $\sigma > 0$
- $\|J(t)\|_2 < c$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$
- $\left\| \frac{\partial J(t)}{\partial t} \right\|_2 < b$ para todo $t \in I$.
- $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \frac{\|f(h, t) - J(t)h\|}{\|h\|} = 0$

Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $0 \leq \epsilon < \delta$ se tiene que 0 es exponencialmente estable para $\dot{x}(t) = f(x(t), \epsilon t)$.

DEMOSTRACIÓN: Por [3.4] sabemos que la estabilidad de $\dot{x} = f(x, t)$ localmente es igual a la de $\dot{x} = J(t)x$.

Luego $\text{Re} \lambda_i(J(t)) \leq -\sigma < 0$ para todo $t \geq 0$ donde $\sigma > 0$ y por el teorema [4.1] y su corolario existe $\delta > 0$ tal que si $0 \leq \epsilon < \delta$ entonces el sistema lineal $\dot{z} = J(\epsilon t)z$, para algún $\epsilon > 0$ se tiene que 0 es exponencialmente estable.

Por lo tanto 0 también es exponencialmente estable para $\dot{x} = f(x, \epsilon t)$.

□

5. Perturbaciones

El objetivo de este trabajo es estudiar las redes neuronales, principalmente el foco esta en las redes neuronales recurrentes. En el próximo capítulo vamos a ver como la arquitectura de una red neuronal recurrente la podemos asociar con una ecuación diferencial no autónoma. Ahí vamos a ver que su arquitectura va a estar dada por la discretización de una ecuación diferencial ordinaria de la forma $\dot{x} = f(t, x, u(t))$ donde $u : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ es algo que se mide del mundo real o digital, donde $x(t) \in D \subset \mathbb{R}^n$, $u : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si la función u la consideramos fija podemos ver que estamos las mismas condiciones que en las secciones anteriores de este capítulo ya que si llamamos $g(t, x) = f(t, x, u(t))$ estamos considerando la ecuación diferencial $\dot{x} = g(t, x)$, razón por la cual todos los resultados que se vienen enunciando continúan siendo validos.

Si una u en particular es tal que da lugar a un punto de equilibrio en 0 exponencialmente estable de la ecuación diferencial ($f(t, 0, u(t)) = 0$ para todo $t \geq t_0$), podemos considerar u mediante un cambio de variable que $u(t) = 0$ para todo tiempo. Para esto simplemente hacemos $\dot{x} = g(t, x, w(t)) = f(t, x, w(t) + u(t))$. En dicho caso se tendría que $g(t, 0, 0) = 0$ para todo $t \geq t_0$ si 0 fuese un punto de equilibrio.

En este momento surge la pregunta, ¿Qué pasa si ahora consideramos $\dot{x} = g(t, x, w(t))$ donde w no es nula?. En principio podría suceder que $g(t, 0, w(t)) \neq 0$ para todo o algún $t \geq 0$ por lo que podría suceder que 0 ya no sea un punto de equilibrio y por lo tanto las

soluciones ya no se acerquen al mismo. ¿Entonces que cosas se pueden garantizar en tal situación?

Existe un recíproco al teorema de Lyapunov [5.3] que garantiza en caso de que 0 sea exponencialmente estable la existencia de una función de Lyapunov que cumple:

- $V : I \times B(0, r) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- $c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2$
- $\dot{V} < -c_3 \|x\|^2$
- $\|\frac{\partial V}{\partial x}\| \leq c_4 \|x\|$

si ahora consideramos como se comporta dicha función en un entorno de 0 cuando $w \neq 0$.

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla_x V g(t, x, w(t)) \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla_x V g(t, x, 0) + \nabla_x V (g(t, x, w(t)) - g(t, x, 0))\end{aligned}$$

si ahora suponemos que g es Lipschitz respecto a la tercer variable con constante L .

$$\dot{V} < -c_3 \|x\|^2 + c_4 \|x\| L \|w(t)\|$$

$$\dot{V} < \|x\| (-c_3 \|x\| + c_4 L \|w(t)\|)$$

y vemos que $\dot{V} < 0$ si $-c_3 \|x\| + c_4 L \|w(t)\| < 0$ que es lo mismo que $c_3 \|x\| > c_4 L \|w(t)\|$ de donde si

$$\|x\| > \frac{c_4}{c_3} L \|w(t)\|$$

tenemos que $\dot{V}$ es negativa (ver figura 1).

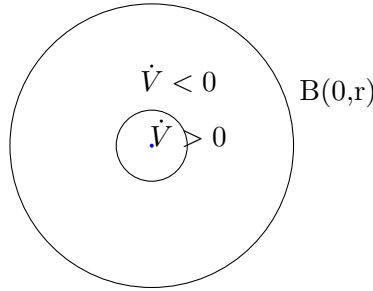


FIGURA 1. Función de Lyapunov en el sistema perturbado.

Esto hace pensar que si se toma una perturbación suficientemente chica tal que $\dot{V} < 0$ en alguna bola $B(0, \mu) \subset B(0, r)$ las soluciones que inician en $B(0, r) \setminus B(0, \mu)$ deberían ser tales que se acerquen a $B(0, \mu)$. De hecho se puede elegir μ de forma que en el borde $\dot{V} < 0$ con el objetivo de que una vez las soluciones entran a dicho conjunto nunca salgan. Excepto por algunos detalles técnicos que se van a ver en [5.2] donde se

ve que hay que tomar otros conjuntos un poco más grandes que incluyen dichas bolas, conceptualmente esta es la forma en la que funciona.

Esto nos da la idea que si $|w(t)|$ es chica para todo tiempo $t \geq t_0$ las soluciones a la ecuación diferencial si bien no van a ser asintóticas a 0 van a permanecer acotadas. El análisis que hicimos anteriormente lo podemos postular formalmente en el siguiente teorema.

Teorema 5.1. *Sea $\dot{x} = f(t, x, u(t))$ donde f es C^1 , en las condiciones del teorema de Picard y existencia de soluciones para todo tiempo futuro. Si además f es localmente Lipschitz en x, u uniformemente en t y si $\dot{x} = f(t, x, 0)$ tiene un punto de equilibrio exponencialmente estable en 0 y $\|w(t)\| < M$ para todo $t \geq t_0$ entonces existe una función V que cumple las siguientes condiciones:*

- $V : I \times B(0, r) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- $c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2$
- $\dot{V} < 0$ para todo x tal que $\|x\| > \frac{c_4}{c_3} L \sup_{t \geq t_0} \|w(t)\|$
- $\|\frac{\partial V}{\partial x}\| \leq c_4$

DEMOSTRACIÓN: Esto es seguir los argumentos dados en los párrafos anteriores y notar que la desigualdad a la que llegamos fue:

$$\|x(t)\| > \frac{c_4}{c_3} L \|w(t)\|$$

pero como esto debería cumplirse para todo $t \geq t_0$ vamos a necesitar la condición:

$$\|x\| > \frac{c_4}{c_3} L \sup_{t \geq t_0} \|w(t)\|$$

□

Ahora vamos a probar que si $\|w(t)\|$ es uniformemente acotada y suficientemente por un lado en el sentido del teorema anterior y con otra condición que vamos a colocar sobre $\|w(t)\|$ la que siempre podemos hacer que se cumpla entonces vamos a tener algo similar a la estabilidad pero ahora al variar w .

Teorema 5.2. *Sea $\dot{x} = f(t, x, u(t))$ en las condiciones del teorema de Picard, existencia de soluciones para todo $t \geq t_0$ y Lipschitz respecto a la tercera variable con constante de Lipschitz L . Si 0 es localmente exponencialmente estable cuando $u(t) \equiv 0$ en una bola $B(0, r)$. Entonces existe una función V que verifica:*

- $V : I \times B(0, r) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1
- $\alpha_1(\|x\|) = c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2 = \alpha_2(\|x\|)$
- $\dot{V} < -\alpha_3(\|x\|)$ para todo x tal que $\|x\| > \frac{c_4}{c_3} L \sup_{t \geq t_0} \|w(t)\| + \epsilon = \mu$ para cualquier $\epsilon > 0$.
- $\|\frac{\partial V}{\partial x}\| \leq c_4 \|x\|$

Si además $\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ entonces existe β una función de clase KL y $T > t_0$ si $\|x(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ tal que:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) \text{ para todo } t_0 \leq t \leq t_0 + T \\ \|x(t)\| &\leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)) \text{ para todo } t_0 + T \leq t \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\rho = \alpha_1(r)$, $\nu = \alpha_2(\mu)$, por hipótesis entonces tenemos que $\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)) = \alpha_2^{-1}(\rho)$, entonces $\alpha_2(\mu) < \rho$. De forma análoga se ve que $\alpha_2(\|x(t_0)\|) < \rho$.

Definimos los conjuntos $\Omega_{t,\rho} = \{x \in B(0, r) : V(t, x) \leq \rho\}$ y $\Omega_{t,\nu} = \{x \in B(0, r) : V(t, x) \leq \nu\}$, entonces se tiene que

$$B(0, \mu) \subset \Omega_{t,\nu} \subset \{\alpha_1(\|x\|) \leq \nu\} \subset \{\alpha_1(\|x\|) \leq \rho\} \subset B(0, r) \subset D$$

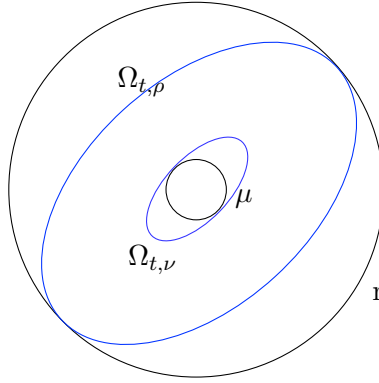


FIGURA 2. Conjunto "atractor" $\Omega_{t,\nu}$

La primer desigualdad es porque si x es tal que $\|x\| \leq \mu$ entonces $V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|) \leq \nu$. El resto de las desigualdades son directas. En particular tenemos que:

$$\Omega_{t,\nu} \subset \Omega_{t,\rho} \subset B(0, r) \subset D$$

Una vez que la solución entra en los conjuntos $\Omega_{t,\nu}$ y/o $\Omega_{t,\rho}$, la misma no puede salir de ellos ya que $\dot{V} < 0$ en el borde y por lo tanto estos son invariantes.

Por lo anterior al tomar $\alpha_2(\|x(t_0)\|) \leq \rho$ entonces $x(t) \in \Omega_{t,\rho}$ para todo $t \geq t_0$

Una solución que inicia en $\Omega_{t,\rho}$ entra en $\Omega_{t,\nu}$ en tiempo finito debido a que $\dot{V} < 0$ en $A = \{\Omega_{t,\rho} - \Omega_{t,\nu}\}$. Sea $k = \min_{\mu \leq \|x\| \leq r} W_3(x)$ entonces $\dot{V} \leq -k < 0$ en $A \subset \{\mu \leq \|x\| \leq r\}$, lo que implica:

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x(t_0)) - k(t - t_0) \leq \rho - k(t - t_0)$$

por lo tanto $V(t, x(t)) = \nu$ en algún punto de el intervalo $[t_0, t_0 + (\rho - \mu)/k]$. Además si definimos $\sigma(\|x(t_0)\|, t - t_0) = V(t_0, x(t_0)) - k(t - t_0)$ esta es una función de clase KL hasta el momento T en el que $x(t)$ entra a $\Omega_{t,\nu}$.

Ahora podemos definir $\beta(r, s) = \alpha_1^{-1}(\sigma(\alpha_2(r)), s)$ de donde se obtiene $\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0)$ para todo $t_0 \leq t \leq t_0 + T$

Por otro lado si $x(t_0) \in \Omega_{t, \nu}$ se tiene que $\|x(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))$ para todo $t_0 + T \leq t$ ya que $\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)) = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\alpha_2^{-1}(\nu))) = \alpha_1^{-1}(\nu) < \mu$ y este conjunto es invariante como se menciono anteriormente.

□

La desigualdad que se acaba de demostrar en el teorema anterior es lo que se conoce como estabilidad entrada/estado local como se enunciará en la siguiente definición. Esto no es otra cosa que

Definición 5.1. La ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x, u(t))$ es estable respecto a las entradas si existe una función β de clase KL y una función γ de clase K tales que para todo $x(t_0)$ y cualquier entrada acotada $u(t)$ la solución $x(t)$ existe para todo $t \geq t_0$ y satisface

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \gamma(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|)$$

El siguiente teorema es el recíproco de Lyapunov que utilizamos en las demostraciones anteriores y que ahora se enuncia y demuestra de manera precisa.

Teorema 5.3. Sea $\dot{x} = f(t, x)$ donde $f \in C^1$ y 0 es un punto de equilibrio exponencialmente estable del mismo. Además $\frac{\partial f}{\partial x}$ es uniformemente acotado en todo D . Entonces existe V de Lyapunov tal que:

$$c_1\|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2\|x\|^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -c_3\|x\|^2$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4\|x\|$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $\phi(s, t, x)$ a la solución que $\phi(t, t, x) = x$. Veamos primero que $c_1\|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2\|x\|^2$. Para esto definamos

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \int_t^{t+\delta} \phi^T(s, t, x) \phi(s, t, x) ds \\ V(t, x) &= \int_t^{t+\delta} \|\phi(s, t, x)\|^2 ds \leq \int_t^{t+\delta} k^2 \|x\|^2 e^{-2\lambda(s-t)} ds \\ V(t, x) &\leq -\frac{k^2 \|x\|^2}{2\lambda} (e^{-2\lambda\delta} - 1) \\ V(t, x) &\leq \frac{k^2 \|x\|^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda\delta}) \end{aligned}$$

También sabemos que $\|\frac{\partial f}{\partial x}\| \leq L$ para todo $x \in D$ y para todo $t \geq 0$. En particular $f(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$ y por el teorema del valor medio obtenemos $\|f(t, x)\| \leq L\|x\|$.

Luego tenemos

$$\begin{aligned} -L\|x\| &\leq \|f(t, x)\| \\ -L &\leq \frac{\|\dot{x}\|}{\|x\|} \\ e^{-L(t-t_0)} &\leq \|x\| \end{aligned}$$

razonando análogamente a lo anterior

$$\begin{aligned} V(t, x) &\geq \int_t^{t+\delta} e^{-L(s-t)} ds = -\frac{\|x\|^2}{2L}(e^{-2L\delta} - 1) \\ V(t, x) &\geq \frac{\|x\|^2}{2L}(1 - e^{-2L\delta}) \end{aligned}$$

De donde concluimos que $\frac{\|x\|^2}{2L}(1 - e^{-2L\delta}) \leq V(t, x) \leq \frac{k^2\|x\|^2}{2\lambda}(1 - e^{-2\lambda\delta})$ y podemos concluir que

$$c_1\|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2\|x\|^2$$

donde $c_1 = \frac{(1-e^{-2L\delta})}{2L}$ y $c_2 = \frac{k^2(1-e^{-2\lambda\delta})}{2\lambda}$.

Ahora veamos que $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -c_3\|x\|^2$.

Para esto llamemos $\phi_t(s, t, x) = \frac{\partial \phi}{\partial t}$ y $\phi_x(s, t, x) = \frac{\partial \phi}{\partial x}$.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \|\phi(t+\delta, t, x)\|^2 - \|\phi(t, t, x)\|^2 + \int_t^{t+\delta} 2\phi^T(s, t, x)\phi_t(s, t, x)ds$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int_t^{t+\delta} 2\phi^T(s, t, x)\phi_x(s, t, x)ds$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) = \|\phi(t+\delta, t, x)\|^2 - \|\phi(t, t, x)\|^2 + \int_t^{t+\delta} 2\phi^T(s, t, x)(\phi_t(s, t, x) + \phi_x(s, t, x)f(t, x))ds$$

En particular veamos que $\phi_t(s, t, x) + \phi_x(s, t, x)f(t, x) \equiv 0$

Sabemos que $\phi(s, t, x) = x + \int_t^s f(r, \phi(r, t, x))dr$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= -f(t, x) + \int_t^{t+\delta} \frac{\partial f}{\partial x}(s, \phi(s, t, x)) \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t, x) ds \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= I + \int_t^{t+\delta} \frac{\partial f}{\partial x}(s, \phi(s, t, x)) \frac{\partial \phi}{\partial x}(s, t, x) ds \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} f(t, x) &= \int_t^{t+\delta} \frac{\partial f}{\partial x}(s, \phi(s, t, x)) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} f(t, x) \right) ds\end{aligned}$$

Derivando respecto a s en ambos lados y llamando $H(s, t, x) = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} f(t, x)$

$$\dot{H} = \frac{\partial f}{\partial x}(s, \phi(s, t, x)) H(t)$$

con condición inicial

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, t, x) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, t, x) f(t, x) = -f(t, x) + f(t, x) = 0$$

por lo tanto

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t, x) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(s, t, x) f(t, x) \equiv 0$$

finalmente

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) = \|\phi(t + \delta, t, x)\|^2 - \|\phi(t, t, x)\|^2$$

lo que implica

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq k^2 e^{-2\lambda\delta} \|x\|^2 - \|x\|^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -(1 - k^2 e^{-2\lambda\delta}) \|x\|^2$$

de donde concluimos que $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -c_3 \|x\|^2$ siendo $c_3 = (1 - k^2 e^{-2\lambda\delta})$.

Ahora necesitamos que $(1 - k^2 e^{-2\lambda\delta}) > 0$ y por lo tanto se necesita que $1 > k^2 e^{-2\lambda\delta}$, esto va a pasar si y solo si $\delta > \frac{\log k^2}{2\lambda}$

Ahora pasamos a la última parte

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int_t^{t+\delta} 2\phi^T(s, t, x) \phi(s, t, x) ds \leq \int_t^{t+\delta} k e^{-\lambda(s-t)} e^L (s-t) ds$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq \frac{2k}{\lambda - L} \left(1 - e^{(L-\lambda)\delta} \right) \|x\|$$

ahora tomando $c_4 = \frac{2k}{\lambda - L} \left(1 - e^{(L-\lambda)\delta} \right)$ tenemos

$$\frac{\partial V}{\partial x} \leq c_4 \|x\|$$

□

CAPÍTULO 5

Estabilidad en redes neuronales

En este capítulo se comienza mostrando el proceso de discretización de una ODE y como se asocia la misma a una arquitectura de una red neuronal recurrente. Luego vamos a proceder a probar la estabilidad exponencial así como la estabilidad entrada estado de una arquitectura particular de una red neuronal recurrente. Hecho esto la red tendría todas las propiedades deseables de las que hablamos en la introducción.

1. Red recurrente

Como se vio en la introducción, la evolución del estado de una red recurrente se puede calcular como:

$$(4) \quad h^t = f(h^{t-1}, x^{t-1}, \theta)$$

donde h^t es el estado de la red en el tiempo t , x^t es la entrada al sistema en el tiempo t y h^{t-1} es el estado del sistema en el tiempo anterior. La red puede emitir una salida en cada paso de tiempo o puede hacerlo solamente al final de procesar todos los datos de entrada. El estado de la red intuitivamente juega el papel de acumulador de toda la información relevante que es necesaria para emitir una salida. Esto se puede representar gráficamente como en la figura 1.

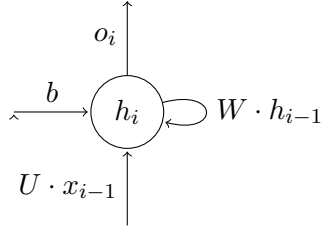


FIGURA 1. Representación grafica de una RNN

El esquema de la figura 1 indica como se realizan los cálculos. Para este caso particular estaría representando lo siguiente:

$$\begin{aligned} a^t &= b + Wh^{t-1} + Ux^{t-1} + b \\ h^t &= \sigma(a^t) \\ o^t &= c + Vh^t \end{aligned}$$

- a^t es la entrada lineal a la red para actualizar el estado.

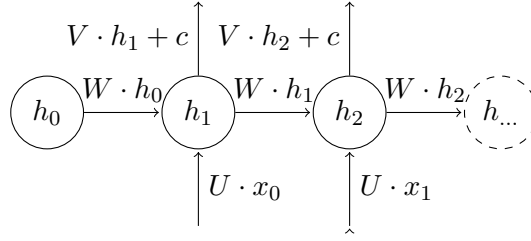


FIGURA 2. Representación grafica de una RNN desenrollada

- σ es una función de activación que toma la entrada lineal y esto actualiza el estado de la red.
- o^t es la salida de la red que puede ser entrada a una red densa o ser la salida final de la red.

2. Discretización

Ahora vamos a ver como una ecuación diferencial da lugar a la arquitectura de la red recurrente. Consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{h}(t) = f(h, x(t))$$

si se toman tiempos a intervalos fijos de forma que $t_{i+1} - t_i = \epsilon$ para todo $i \geq 0$ y desarrollamos h en torno a t_i tenemos:

$$h(t_{i+1}) = h(t_i) + \dot{h}(t_i)\epsilon + \epsilon\tau(\epsilon)$$

$$h(t_{i+1}) = h(t_i) + f(h(t_i), x(t_i))\epsilon + \epsilon\tau(\epsilon)$$

donde $\epsilon\tau(\epsilon) \equiv o(\epsilon)$

esto da lugar a una ecuación de la forma

$$h_t = F(h_{t-1}, x_{t-1})$$

anteriormente vimos que la red recurrente calcula

$$h^t = f(h^{t-1}, x^{t-1}, \theta)$$

que tiene la misma forma que la discretización de la ecuación diferencial si consideramos x y los parámetros θ como algo fijo.

3. Método de Euler

En el proceso de discretización de la ecuación diferencial hay cosas que podrían salir mal, como por ejemplo que la ecuación discretizada tuviera un comportamiento diferente al de la ecuación original. Esto se debe a que cuando se calcula la discretización en una computadora no se están tomando puntos fijos a intervalos de tiempo partiendo de la solución original sino que cada paso es en realidad una aproximación que se obtiene al dar un paso en la dirección de la diferencial.

Para poder garantizar el buen comportamiento de la discretización vamos a analizar el error cometido por la discretización de Euler que es lo que se presentó en la sección anterior. En este contexto vamos a decir que la discretización es estable para referirnos a que el error cometido en la aproximación se mantiene controlado a lo largo de toda la trayectoria.

Teorema 3.1. *Dada una ecuación diferencial de la forma $\dot{x} = f(t, x)$ en las condiciones del teorema de Picard y de forma que las soluciones existen para todo tiempo futuro. Su discretización es estable si*

$$\max_i |1 + \epsilon \lambda_i(J(t))| < 1 \forall t \geq t_0$$

donde $J(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t))$

donde $\lambda_i(J(t))$ representa los autovalores del Jacobiano.

DEMOSTRACIÓN: Como se vio en la sección de discretización

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + f(t_i, x(t_i))\epsilon + \epsilon \tau_i(\epsilon)$$

el método de Euler nos propone calcular los x de la siguiente forma:

$$x_{i+1} = x_i + \epsilon f(t_i, x_i)$$

si llamamos a $e_i = x(t_i) - x_i$ el error local en el paso i y restando el aproximado y el exacto obtenemos:

$$x(t_{i+1}) - x_{i+1} = x(t_i) - x_i + \epsilon f(t_i, x(t_i)) - \epsilon f(t_i, x_i) + \epsilon \tau_i(\epsilon)$$

$$e_{i+1} = e_i + \epsilon(f(t_i, x(t_i)) - f(t_i, x_i)) + \epsilon \tau_i(\epsilon)$$

Si ahora consideramos $g(t) = tx(t_i) + (1-t)x_i$ y $h(t) = f(t, g(t))$ tenemos que $f(x(t_i), t_i) - f(x_i, t_i) = h(1) - h(0) = h'(\theta)$ con $0 \leq \theta \leq 1$ donde $h'(\theta) = J(z_i)e_i$, donde $z_i = g(\theta_i)$ y $J(z_i) = \frac{\partial f}{\partial x}(t_i, z_i)$.

$$\|e_{i+1}\| \leq \|e_i\| \|I + \epsilon J(z_i)\| + \epsilon \|\tau_i(\epsilon)\|$$

Tomando $\tau(\epsilon) = \max_{j=0,\dots,i} \|\tau_j(\epsilon)\|$ y de la misma forma $\|I + \epsilon J(z)\| = \operatorname{argmax}_{z=z_1,\dots,z_n} \|I + \epsilon J(z_i)\|$ tenemos:

$$\|e_{i+1}\| \leq \|e_{i-1}\|(\|I + \epsilon J(z)\| + \epsilon\tau(\epsilon))\|I + \epsilon J(z)\| + \epsilon\tau(\epsilon)$$

$$\|e_{i+1}\| \leq \|e_{i-1}\| \|I + \epsilon J(z)\|^2 + [1 + \|I + \epsilon J(z)\|]\epsilon\tau(\epsilon)$$

$$\|e_{i+1}\| \leq \|e_0\| \|I + \epsilon J(z)\|^{i+1} + \frac{1 - \|I + \epsilon J(z)\|^{i+1}}{1 - \|I + \epsilon J(z)\|} \epsilon\tau(\epsilon)$$

Llamemos $L = \|I + \epsilon J(z)\|$.

$$\|e_{i+1}\| \leq \|e_0\| L^{i+1} + \frac{1 - L^{i+1}}{1 - L} \epsilon\tau(\epsilon)$$

Por lo tanto si dejamos el tiempo irse a infinito el error global va a estar acotado por

$$\|e_{i+1}\| \leq \frac{\epsilon\tau(\epsilon)}{1 - L}$$

y por lo tanto el método de Euler es estable. □

Se puede ver que si $\|I + \epsilon J(t)\| < 1$ para todo $t \geq 0$ entonces los valores propios de $I + \epsilon J(t)$ tienen que tener módulo menor que 1. De lo contrario se tendría que existe un vector v tal que $(I + \epsilon J(t))v = \alpha v$ donde $\alpha > 1$ y por lo tanto $\|I + \epsilon J(t)\| > 1$.

Recíprocamente supongamos que los valores propios de $I - \epsilon\lambda_i(J(t))$ tienen modulo menor que 1 y que P lleva $I + \epsilon J(t)$ a su forma de Jordan. En dicho caso se tendría $P(I + \epsilon J(t))P^{-1} = I + \epsilon PJ(t)P^{-1}$ y por la forma de la matriz $PJ(t)P^{-1}$ sus valores propios están sobre la diagonal, luego los valores propios de $I + \epsilon PJ(t)P^{-1}$ son tales que son $1 - \epsilon\lambda_i(J(t))$ (ya que los de $I + \epsilon PJ(t)P^{-1}$ y $I + \epsilon J(t)$ son iguales) por lo que necesariamente $|1 - \epsilon\lambda_i(J(t))| < 1$.

Siguiendo el mismo razonamiento se puede ver que si $|1 - \epsilon\lambda_i(J(t))| < 1$ para todos los valores propios y para todo $t \geq 0$ entonces los valores propios de $I - \epsilon\lambda_i(J(t))$ tienen modulo menor que 1.

Para terminar el argumento, si los valores de A tienen todos modulo menor que 1 entonces $\|A\|^i = C(r(A) + \epsilon)^i$ (por detalles ver [19]) para cualquier $\epsilon > 0$ donde $(r(A) + \epsilon) < 1$ y $r(A)$ es el radio espectral de A . por lo tanto llevando esto al caso de estabilidad del método de Euler tenemos que $\|I + \epsilon J(z)\|^i$ tiende a cero a medida que i tiende a infinito y esto es lo que se precisaba para terminar la prueba.

Teorema 3.2. *Dada una ecuación diferencial de la forma $\dot{h} = f(h, x(t))$ en las condiciones del teorema de Picard y de forma que las soluciones existen para todo tiempo futuro. Su discretización es estable si*

$$\max_{i=1, \dots, n} |1 + \epsilon J(t)| < 1$$

donde $J(t) = \frac{\partial f}{\partial h}(h(t), x(t))$

4. Estabilidad

Ahora vamos a utilizar los dos teoremas principales del capítulo de estabilidad 4.2 y 5.2 para crear una red neuronal recurrente que sea exponencialmente estable y también sea estable entrada/estado. Con este fin probaremos que una red neuronal con activación $\tanh$ y usando matrices antisimétricas lo es.

Vamos a proceder de la siguiente forma. Probaremos que para $\dot{h} = \tanh((W - \gamma I)h + Vx + b)$ es tal que todos sus valores propios tienen parte real negativa. De ahí procederemos a probar el resto de las condiciones del teorema principal del capítulo anterior 4.2. Al final del capítulo probaremos que también estamos en las condiciones de 5.2.

A partir de ahora vamos a asumir que $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el estado oculto de la red recurrente. La entrada a la red $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ y vamos a estar considerando ecuaciones diferenciales de la forma $\dot{h} = f(h, x(t))$. En la notación que sigue si v es un vector v^* representa el transpuesto conjugado de v .

Vamos a comenzar probando un Lema que nos va a ser útil en varias pruebas mas adelante. Este tiene que ver con la forma que toma el Jacobiano de una función C^1 que depende de una combinación lineal de las componentes de h y de x y se aplica elemento a elemento al vector resultante.

Estas funciones van a estar dependiendo en general de una combinación del estilo $Wh(t) + Vx(t) + b$ donde W va a ser una matriz de $m \times n$, V es una matriz $n \times n$ y b es un vector en $\mathbb{R}^n$.

Lema 4.0.1. Sea $f(h, x(t)) = \alpha(Wh + Vx + b)$, donde α es una función al menos $C^1(R)$ que se aplica elemento a elemento a los elementos de $Wh + Vx + b$. Entonces el Jacobiano de f como función de h tiene la siguiente forma:

$$\frac{\partial f}{\partial h} = \text{diag}(\alpha'(Wh + Vx + b))W$$

donde $\text{diag}(\alpha'(Wh + Vx + b))$ es una matriz diagonal cuyas entradas en la diagonal son $\alpha'(Wh + Vx + b)_i$.

DEMOSTRACIÓN: Para hacer mas simples las cuentas vamos a hacer el siguiente cambio de variable $z = Wh + Vx + b$.

$$f(h, x(t))_i = \alpha((Wh + Vx + b)_i) = \alpha\left(\sum_k W_{ik}h_k + \sum_k V_{ik}x_k + b_i\right)$$

Luego podemos aplicar la regla de la cadena $\frac{\partial f}{\partial h} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial h}$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \begin{bmatrix} \alpha'(z_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha'(z_n) \end{bmatrix} = \text{diag}(\alpha'(z))$$

Ahora tenemos $\frac{\partial z}{\partial h} = W$ de lo que concluimos que:

$$\frac{\partial f}{\partial h} = \text{diag}(\alpha'(Wh + Vx + b))W$$

□

Teorema 4.1. *Dada una función $\dot{h} = f(h, x(t)) = \tanh((W - \gamma I)h + Vx + b)$ donde $I, W \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $V \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $\gamma \in \mathbb{R}$, y $\gamma > 0$ y W es una matriz antisimetrica $W^T = -W$. Si h^* es un punto de equilibrio de la ecuación diferencial ($f(h_*, x(t)) = 0$). Sea $J(t) = \frac{\partial f}{\partial h}(h^*)$. entonces:*

- $\text{Re}(\lambda_i(J(t))) \leq -\gamma < 0$ para todo $t \geq 0$
- $J(t)$ esta acotado para todo tiempo.
- $\frac{\partial J}{\partial t}$ también esta acotado para todo $t \geq 0$
- $\lim_{\|s\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \frac{\|f(h_* + s, x(t)) - J(x(t))s\|}{\|s\|} = 0$

DEMOSTRACIÓN: Por el lema anterior tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial h} = \text{diag}(1 + \tanh^2((W - \gamma I)h + Vx + b))(W - \gamma I)$$

Evalutando en h_*

$$\frac{\partial f}{\partial h} = (W - \gamma I)$$

Veamos primero que W tiene valores propios con parte real nula. Sea v un vector asociado a un valor propio λ de norma 1. Esto es posible porque si v esta asociado a λ entonces el vector $\frac{v}{\|v\|}$ también lo esta y tiene norma 1.

$$Wv = \lambda v$$

$$\begin{aligned} v^* W v &= v^* \lambda v = \lambda \\ (v^* W v)^* &= (v^* \lambda v)^* = \bar{\lambda} = -v^* W v \end{aligned}$$

entonces λ tiene parte real nula. Luego haciendo el mismo razonamiento para la forma completa tenemos:

$$(W - \gamma I)v = \lambda v - \gamma v = (\lambda - \gamma)v$$

y por lo tanto todos los valores propios de $(W - \gamma I)$ tienen parte real negativa, es mas su parte real es igual a $-\gamma$.

Los puntos 2 y 3 en este caso son triviales ya que como se vio el Jacobiano es constante.

Para la última parte

$f(h_* + s, x(t)) = \tanh((W - \gamma I)(h_* + s) + Vx + b) = \tanh((W - \gamma I)h_* + Vx + b + (W - \gamma I)s)$, pero en h_* la función se anula y por lo tanto $(W - \gamma I)h_* + Vx + b$ para todo $t \geq 0$ lo que implica $f(h_* + s, x(t)) = \tanh((W - \gamma I)s)$.

$$\begin{aligned} \lim_{\|s\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \frac{\|f(h_* + s, x(t)) - J(x(t))s\|}{\|s\|} &= \\ \lim_{\|s\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \frac{\|\tanh((W - \gamma I)s) - (W - \gamma I)s\|}{\|s\|} & \end{aligned}$$

pero ahora $\tanh'((W - \gamma I)s) = (1 + \tanh^2((W - \gamma I)s))(W - \gamma I)$ y evaluando en $s = 0$ tenemos por Taylor que $\tanh((W - \gamma I)s) = (W - \gamma I)s + r(s)$ donde $\frac{\|r(s)\|}{\|s\|} \rightarrow 0$.

De donde concluimos que

$$\begin{aligned} \lim_{\|s\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \frac{\|\tanh((W - \gamma I)s) - (W - \gamma I)s\|}{\|s\|} &= \\ \lim_{\|s\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \frac{\|(W - \gamma I)s + r(s) - (W - \gamma I)s\|}{\|s\|} &= 0 \end{aligned}$$

□

Hasta aquí hemos terminado de probar que la red utilizando la función propuesta posee estabilidad exponencial. Para ver que también es estable entrada/estado alcanza con ver que f es Lipschitz respecto a la entrada. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{h} &= f(h, x(t)) = \tanh((W - \gamma I)h + Vx + b) \\ \frac{\partial f(h, x(t))}{\partial x} &= (1 + \tanh^2((W - \gamma I)h + Vx + b)) * V \end{aligned}$$

donde todos los términos de la izquierda son acotados y por ser la derivada acotada entonces la función f es Lipschitz respecto a la tercera variable. Como ya teníamos estabilidad esto nos coloca en las hipótesis del teorema 5.2. Por lo tanto si las perturbaciones en la entrada son suficientemente pequeñas vamos a tener estabilidad entrada/estado.

CAPÍTULO 6

Experimentos

En este capítulo vamos a aplicar la teoría desarrollada en el capítulo anterior al problema de clasificación de imágenes. Para esto vamos a utilizar el conjunto de datos de MNIST que contiene imágenes de tamaño 28×28 en escala de grises de los diferentes dígitos entre 0 y 9. Esto va a dar lugar a una serie temporal de largo fijo de 784 etapas.

X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
X_5	X_6	X_7	$\dots$	

FIGURA 1. Interpretación de la imagen como serie temporal

Cada dígito está representado como una imagen con un único canal de color el que se representa por medio de la intensidad con valores entre 0 y 1. El valor 0 corresponde a un punto en la imagen de color negro y el 1 corresponde al color blanco, los valores intermedios son intensidades que representan colores entre el negro y blanco.

Se va a utilizar el modelo estudiado en el capítulo anterior que está dado por la ecuación diferencial $\dot{h} = f(h, x(t)) = \tanh((W - \gamma I)h + Vx + b)$ donde W es una matriz antisimétrica y γ es lo que llamamos valor de difusión. En 4.1 se probó que $\frac{\partial f}{\partial h} = (W - \gamma I)$ y al ser W antisimétrica la parte real de sus autovalores es nula, por esto el factor de difusión nos permite automáticamente forzar que la parte real de los autovalores sea estrictamente negativa.

Como se vio en el capítulo anterior este modelo ofrece estabilidad exponencial y estabilidad entrada/estado. El único componente experimental sobre el que hay que tener cuidado es el cumplimiento de la condición de Euler para que la discretización mantenga las propiedades de estabilidad, sin embargo no tenemos una forma de forzar este valor por lo que tenemos que graficarlo a lo largo de los entrenamientos para observar que efectivamente esté en el rango de estabilidad.

Para comprender mejor los resultados experimentales se entrenan varios modelos incluyendo la arquitectura propuesta en condiciones de estabilidad y de no estabilidad

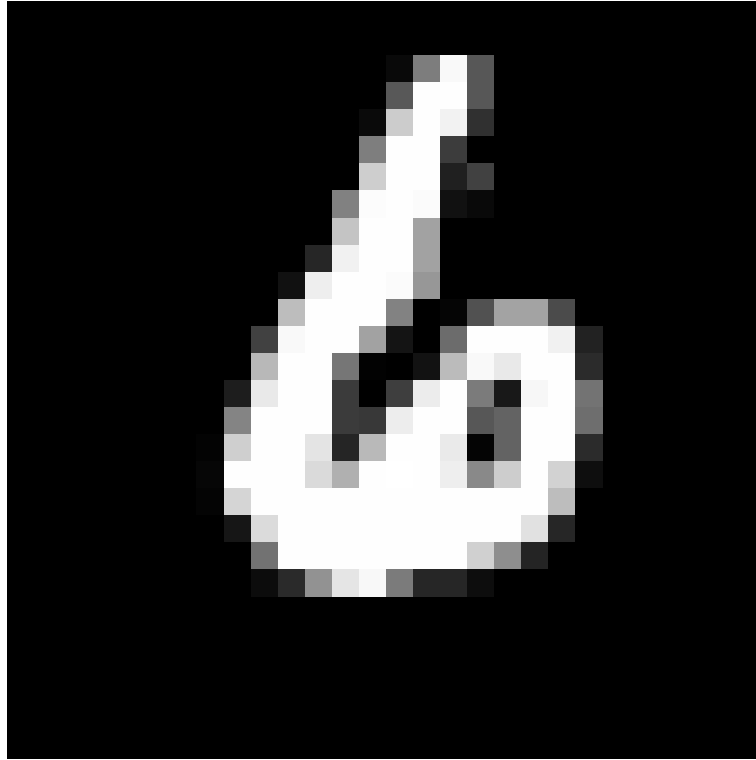


FIGURA 2. Imagen del dígito 6

para ver como esto afecta los resultados experimentales. Las arquitecturas probadas son las siguientes:

1. Modelo estable
 - Es el modelo que se acaba de describir, donde se elige $\gamma > 0$ de forma que la parte real de los autovalores sea estrictamente negativa. Esto nos permite garantizar la estabilidad asintótica del modelo.
2. Modelo inestable
 - Igual que el caso anterior pero utilizando un factor de difusión negativo para que la parte real de los autovalores sea positiva y por lo tanto los puntos de equilibrio sean inestables.
3. LSTM
 - Es para tener una comparación contra otra arquitectura recurrente muy utilizada.
4. Convolutacional
 - Aquí el objetivo es poder comparar contra una arquitectura especializada en el procesamiento de imágenes. En este caso no esperamos poder superar los resultados de la misma.

Para realizar el entrenamiento de los diferentes modelos se utilizó una búsqueda de hiper parámetros mediante una grilla y los resultados de cada entrenamiento fueron registrados en una planilla en formato CSV. Debido a restricciones de tiempo y el gran

número de entrenamientos posibles se utilizaron criterios de parada de los entrenamientos que podrían haber hecho que algunos de los mismos dieran resultados subóptimos en su medida de performance.

El conjunto de datos se dividió en 3 partes. Un conjunto de entrenamiento, otro de validación y uno final de test. El conjunto de datos de entrenamiento fue utilizado para ajustar los parámetros de los modelos mediante el método de propagación hacia atrás descrito en el capítulo de redes neuronales. El conjunto de validación se utilizó durante el entrenamiento para verificar periódicamente si el modelo estaba sobreajustando los datos del conjunto de entrenamiento. Finalmente el conjunto de test se usó para estimar el error esperado al observar datos que los modelos no hayan observado previamente.

En las tablas 3, 4 y 5 se muestra los resultados de evaluar los diferentes modelos sobre un conjunto de datos que no han observado previamente. También se registraron métricas de error cuando se aplica una alteración Gausiana a las imágenes que consiste en pixel a pixel seleccionar un valor aleatorio de una distribución Gausiana cortando los cambios mayores de 0,5 al valor del pixel. Esta última prueba se hace para verificar como cambia el comportamiento de los modelos al aplicar "pequeñas" alteraciones a las imágenes de esta forma perturbando la señal de entrada.

Modelo	Exactitud	Exactitud Alterada	Distancia media	Cambio
convolutional	0.96	0.95	1.82	0.01
stable pixel manual	0.93	0.92	1.82	0.01
stable pixel	0.89	0.87	1.82	0.03
unstable pixel	0.92	0.88	1.82	0.03
lstm	0.40	0.28	1.82	0.12

FIGURA 3. Resultados comparando con alteraciones de varianza 1

Modelo	Exactitud	Exactitud Alterada	Distancia media	Cambio
convolutional	0.96	0.88	5.91	0.08
stable pixel manual	0.93	0.76	5.91	0.17
stable pixel	0.89	0.51	5.91	0.38
unstable pixel	0.92	0.49	5.91	0.42
lstm	0.40	0.10	5.92	0.30

FIGURA 4. Resultados comparando con alteraciones de varianza 3

Modelo	Exactitud	Exactitud Alterada	Distancia media	Cambio
convolutional	0.96	0.78	9.89	0.18
stable pixel manual	0.93	0.46	9.89	0.46
stable pixel	0.89	0.30	9.89	0.60
unstable pixel	0.92	0.26	9.89	0.65
lstm	0.40	0.10	9.89	0.30

FIGURA 5. Resultados comparando con alteraciones de varianza 5

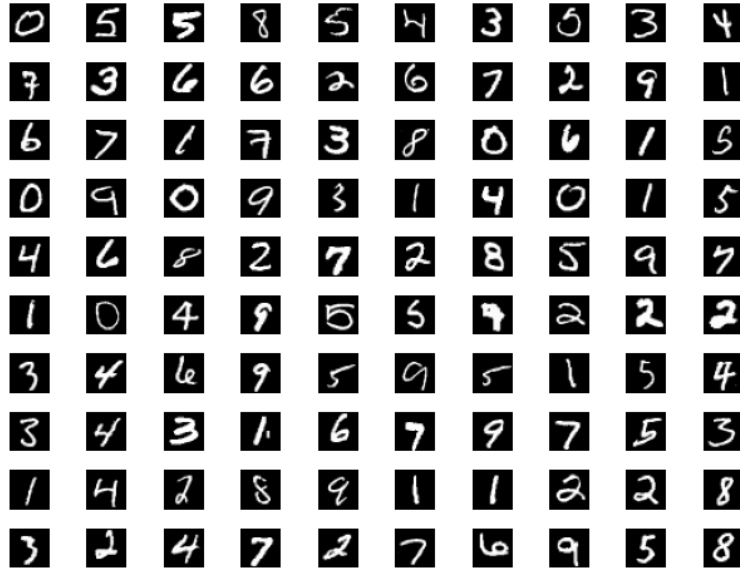


FIGURA 6. Imágenes originales

1. Conclusiones

Durante el proceso de entrenamiento se pudieron observar varias cosas. Por un lado es difícil lograr que se cumpla la condición de estabilidad para la discretización utilizando el método de Euler ($|1 - \lambda_i J(t)| < 1$). Al mismo tiempo se pudo observar experimentalmente que los entrenamientos que cumplen con dicha condición suelen necesitar más tiempo para alcanzar un buen valor de exactitud en comparación con los modelos donde esta condición está considerablemente por encima de 1 en términos relativos. Al mismo tiempo cuando dicha condición se cumple el avance u oscilación de las métricas del modelo suelen ser tales que el entrenamiento se detiene por las condiciones de terminación temprana. La condición que utilizamos debido a las restricciones de tiempo es el algoritmo que viene incluido en la mayoría de los frameworks de deep learning que implican la detención del entrenamiento si las métricas en un conjunto de test que se observa al final de cada época no mejoran durante un número fijo continuo de épocas.

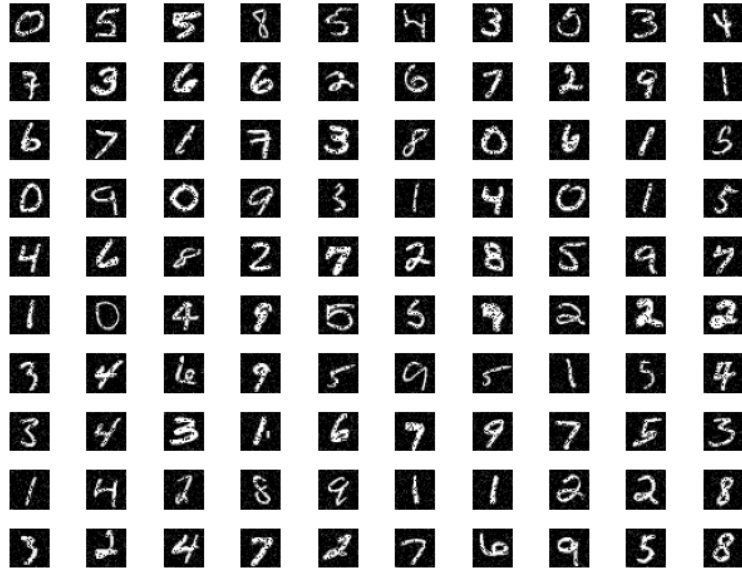


FIGURA 7. Alteradas con desviación 1

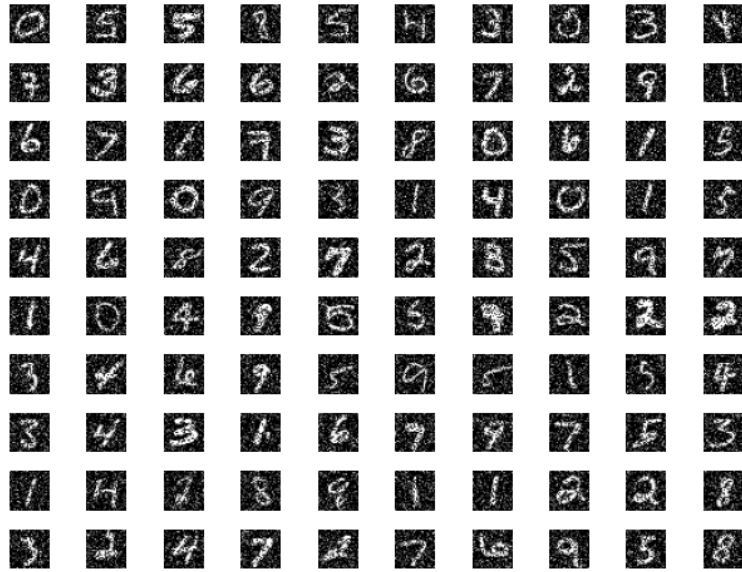


FIGURA 8. Alteradas con desviación 3

Existe una lentitud en el proceso de aprendizaje que es inherente al tipo de modelo que se decidió utilizar para realizar la experimentación ya que los modelos recurrentes son en general más lentos para ser entrenados debido a la imposibilidad de paralelizar su entrenamiento como suele suceder con otros tipos de modelos como pueden ser los convolucionales, transformers o las redes densas. Esto se debe a que no se pueden pasar

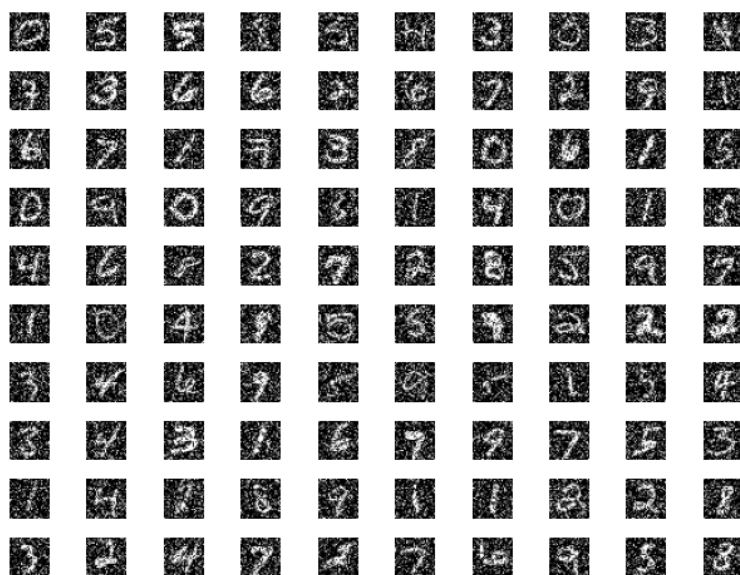


FIGURA 9. Alteradas con desviación 5

todos los datos por la red al mismo tiempo, ya que la respuesta de la red depende de lo que observo antes, esto no es una restricción para otros tipos de redes. Esto se puede ver analizando los datos de entrenamiento donde se puede observar que el tiempo necesario para entrenar una red convolucional fue una fracción del tiempo necesario para entrenar los modelos recurrentes.

El problema de lentitud se ve agravado ya que en el caso de las redes recurrentes el hecho de tener que avanzar un paso de tiempo a la vez con los ejemplos implica una mayor coordinación y movimiento de datos entre la CPU y la GPU que es la unidad especializada para hacer cálculos.

Se puede observar que el modelo recurrente estable alcanza niveles similares de exactitud cuando se lo compara con los otros modelos recurrentes, no obstante cuando se analizan los datos del mismo en comparación con los otros recurrentes este es más resistente a las alteraciones en las imágenes mostrando una menor pérdida de exactitud en comparación con el resto de los modelos recurrentes. En las mismas líneas cuando se compara el modelo recurrente estable con un modelo específico para este tipo de tareas se puede observar claramente que el modelo convolucional lo supera ampliamente incluso mostrando una mayor resistencia a las perturbaciones (al menos las que se utilizaron en la prueba).

Se puede observar que el modelo LSTM que se utilizó para la comparación con otro tipo de modelos recurrentes resultó en una performance muy mala incluso cuando la comparación de los modelos incluyó una diferencia muy grande en el número de parámetros donde el LSTM se llegó a probar con una cantidad bastante superior. Para esta prueba se utilizó exactamente una capa densa igual que para las versiones estables

del modelo con el objetivo de que la diferencia principal fuera solamente la arquitectura del modelo recurrente utilizado.

Se observa que cuando se compara el modelo recurrente estable contra un modelo convolucional el convolucional siempre termina ganando. Esto se debe a que las arquitecturas convolucionales son muy específicas para el tratamiento de imágenes y cuentan con algunas características que las hace resistentes a ciertos tipos de ruido en los datos. Esto se debe a que tienen ciertas características que ofrecen invarianza de la posición (lo que ayuda a ahorrar muchos parámetros) en la que se detectan ciertas características en las imágenes al mismo tiempo de que por su forma pueden llegar a ignorar alteraciones individuales en las imágenes.

Con esto observamos que efectivamente un modelo guiado por los principios de estabilidad estudiados a lo largo de la monografía da a lugar a un modelo con algunas características que lo hacen mejor que modelos de su misma clase donde no se cumplen las condiciones de estabilidad.

Bibliografía

- [1] Charu C. Aggarwal. *Neural Networks and Deep Learning: A Textbook*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2018.
- [2] Argimiro Arratia. Seminario redes neuronales diferenciales, apuntes del curso dictado en facultad de ciencias, udelar, montevideo, 2023.
- [3] Y. Bengio, P. Simard, and P. Frasconi. Learning long-term dependencies with gradient descent is difficult. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 5(2):157–166, 1994.
- [4] Christopher Michael Bishop and Hugh Bishop. *Deep Learning - Foundations and Concepts*. 1 edition, 2023.
- [5] Ovidiu Calin. *Deep Learning Architectures: A Mathematical Approach*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2020.
- [6] Bo Chang, Minmin Chen, Eldad Haber, and Ed H. Chi. AntisymmetricRNN: A dynamical system view on recurrent neural networks. In *International Conference on Learning Representations*, 2019.
- [7] Ricky TQ Chen, Yulia Rubanova, Jesse Bettencourt, and David K Duvenaud. Neural ordinary differential equations, 2018.
- [8] Kyunghyun Cho, Bart van Merriënboer, Caglar Gulcehre, Dzmitry Bahdanau, Fethi Bougares, Holger Schwenk, and Yoshua Bengio. Learning phrase representations using rnn encoder-decoder for statistical machine translation, 2014.
- [9] Jasmine Collins, Jascha Sohl-Dickstein, and David Sussillo. Capacity and trainability in recurrent neural networks, 2017.
- [10] R. Courant and E.J. McShane. *Differential and Integral Calculus*. Number v. 2 in Differential and Integral Calculus. Interscience Publishers, Incorporated, 1947.
- [11] Luc Devroye, László Györfi, and Gábor Lugosi. *A Probabilistic Theory of Pattern Recognition*, volume 31 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer, 1996.
- [12] Weinan E. A proposal on machine learning via dynamical systems. *Communications in Mathematics and Statistics*, 5:1–11, 2017.
- [13] Eldad Haber, Keegan Lensink, Eran Treister, and Lars Ruthotto. Imexnet: A forward stable deep neural network, 2019.
- [14] Eldad Haber and Lars Ruthotto. Stable architectures for deep neural networks. *Inverse Problems*, 34(1):014004, dec 2017.
- [15] Eldad Haber, Lars Ruthotto, Elliot Holtham, and Seong-Hwan Jun. Learning across scales—multiscale methods for convolution neural networks. In *Proceedings of the AAAI conference on artificial intelligence*, volume 32, 2018.
- [16] Kaiming He, Xiangyu Zhang, Shaoqing Ren, and Jian Sun. Deep residual learning for image recognition, 2016.
- [17] Kaiming He, Xiangyu Zhang, Shaoqing Ren, and Jian Sun. Identity mappings in deep residual networks, 2016.
- [18] Sepp Hochreiter and Jürgen Schmidhuber. Long short-term memory. *Neural Computation*, 9(8):1735–1780, 1997.
- [19] A. Katok, A.B. Katok, and B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1995.
- [20] H.K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Pearson Education. Prentice Hall, 2002.
- [21] Valentin Khrulkov, Alexander Novikov, and Ivan Oseledets. Expressive power of recurrent neural networks, 2018.

- [22] Yiping Lu, Aoxiao Zhong, Quanzheng Li, and Bin Dong. Beyond finite layer neural networks: Bridging deep architectures and numerical differential equations. In *International conference on machine learning*, pages 3276–3285. PMLR, 2018.
- [23] Pinchao Meng, Xinyu Wang, and Weishi Yin. Ode-ru: a dynamical system view on recurrent neural networks. *Electronic Research Archive*, 30(1):257–271, 2022.
- [24] M. Vidyasagar. *Nonlinear systems analysis (2nd ed.)*. Prentice-Hall, Inc., USA, 1993.
- [25] Stephen Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, volume 2 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, 2nd edition, 2003.